

Marcin Kurczab
Elżbieta Kurczab
Elżbieta Świda

Matematyka

Program nauczania w liceach i w technikach

Zakres rozszerzony

Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro



Warszawa 2012

Spis treści

I. Wstęp	3
II. Ogólne cele edukacyjne i wychowawcze	3
III. Ramowy rozkład materiału	4
IV. Treści kształcenia. Szczegółowe cele edukacyjne. Założone osiągnięcia uczniów	5
V. Procedury osiągania celów kształcenia i procedury oceniania osiągnięć uczniów	26

I. Wstęp

Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 grudnia 2008 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz.U. 15.I.2009 r. Nr 4, poz. 17) w sposób istotny zmieniło podstawę programową kształcenia matematycznego w szkołach ponadgimnazjalnych (IV etap edukacyjny). Podstawa ta zawiera precyzyjnie opisane wymagania, a dzięki temu także zakres treści programowych i umiejętności oczekiwanych od uczniów na zakończenie kolejnego etapu kształcenia. Znany jest zatem cel kształcenia i treści nauczania. Na pytanie „Jak osiągnąć założone cele?” odpowiada niniejszy program nauczania matematyki w szkołach ponadgimnazjalnych, w którym znajdują się informacje o sposobie organizacji procesu nauczania.

O dopuszczeniu programu nauczania w danej szkole decyduje dyrektor szkoły, po zasięgnięciu opinii rady pedagogicznej (Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 8 czerwca 2009 r. w sprawie dopuszczenia do użytku w szkole programów wychowania przedszkolnego i programów nauczania oraz dopuszczenia do użytku szkolnego podręczników, Dz.U. Nr 89, poz. 730). Nauczyciel może zaproponować program własny, program opracowany przez innych autorów, albo program opracowany przez innych autorów wraz z dokonanymi zmianami. Zaproponowany przez nauczyciela program powinien być dostosowany do potrzeb i możliwości uczniów, dla których jest przeznaczony.

Realizacja naszego programu:

- umożliwi zdobycie wiadomości i umiejętności opisanych w podstawie programowej i w standardach wymagań egzaminacyjnych, w tym m.in. umiejętności:
 - budowania modeli matematycznych zjawisk z różnych dziedzin życia i ich stosowania;
 - wykorzystywania podstawowych narzędzi i technik matematycznych;
 - przeprowadzania prostego rozumowania dedukcyjnego;
 - dobywania i krytycznego analizowania informacji, formułowania hipotez oraz ich weryfikacji;
- daje matematyczne podstawy do uczenia się przedmiotów przyrodniczych, przede wszystkim fizyki, chemii, biologii;
- zapewnia dużą efektywność kształcenia; program ma charakter spiralny, zdecydowana większość nowych zagadnień pojawia się w trakcie realizacji programu, co najmniej dwukrotnie;
- umożliwi powtórzenie najważniejszych zagadnień występujących w podstawie programowej z matematyki na niższych etapach kształcenia.

W naszym programie przedstawiamy ogólne cele edukacyjne i wychowawcze, ramowy rozkład materiału, szczegółowe treści kształcenia wraz z zakresem przewidywanych osiągnięć ucznia. Omawiamy procedury osiągania celów kształcenia oraz procedury oceniania osiągnięć uczniów.

Do realizacji tego programu zalecamy serię podręczników i zbiorów zadań autorstwa Marcina Kurczaba, Elżbiety Kurczab i Elżbiety Świdry.

II. Ogólne cele edukacyjne i wychowawcze

Matematyka to nauka rozwijająca się od czasów starożytności po czasy współczesne. Dostarcza narzędzi badań dla nauk przyrodniczych, technicznych, ekonomicznych i społecznych. Nic więc dziwnego, że jest jednym z głównych składników wykształcenia współczesnego człowieka. Matematyka stymuluje rozwój intelektualny młodego człowieka, pobudza jego aktywność umysłową, rozwija zdolności poznawcze, a także uczy dobrej organizacji pracy, wyrabia dociekliwość i krytycyzm. Rola nauczyciela polega na pokazywaniu uczniom, że umiejętności matematyczne są niezbędne do funkcjonowania człowieka, zarówno w rodzinie (np. planowanie wydatków), jak i w społeczeństwie (np. orientacja w systemie podatkowym i w budżecie państwa) czy w dziedzinie sztuki (np. kanon w rzeźbie i architekturze klasycznej).

Opracowany przez nas program ma służyć:

w zakresie rozwoju intelektualnego ucznia (cele związane z kształceniem)

- rozwijaniu umiejętności zdobywania, porządkowania, analizowania i przetwarzania informacji;
- opanowaniu umiejętności potrzebnych do oceny ilościowej i opisu zjawisk z różnych dziedzin życia;

- wykształceniu umiejętności budowania modeli matematycznych w odniesieniu do różnych sytuacji życiowych i stosowaniu metod matematycznych w rozwiązywaniu problemów praktycznych;
- rozwijaniu umiejętności czytania tekstu ze zrozumieniem;
- rozwinięciu wyobraźni przestrzennej;
- nabyciu umiejętności samodzielnego zdobywania wiedzy matematycznej;
- rozwijaniu zdolności i zainteresowań matematycznych;
- rozwijaniu pamięci;
- rozwijaniu logicznego myślenia;
- nabyciu umiejętności poprawnego analizowania, wnioskowania i uzasadniania;
- wykształceniu umiejętności operowania obiektami abstrakcyjnymi;
- precyzyjnemu formułowaniu wypowiedzi;
- pobudzeniu aktywności umysłowej uczniów;

w zakresie kształtowania postaw (cele związane z wychowaniem)

- kształtowaniu wytrwałości w zdobywaniu wiedzy i umiejętności matematycznych;
- wyrabianiu systematyczności w pracy;
- motywowaniu uczniów do kreatywności i samodzielności;
- kształtowaniu postaw dociekliwych, poszukujących i krytycznych;
- nabyciu umiejętności dobrej organizacji pracy, właściwego planowania nauki;
- kształtowaniu odpowiedzialności za powierzone zadania;
- kształtowaniu pozytywnych postaw etycznych (pomoc koleżeńska uczniom mniej zdolnym, piętnowanie nieuczciwości wyrażającej się w ściąganiu, podpowiadaniu itp.);
- rozwijaniu umiejętności pracy w zespole;
- kształtowaniu postawy dialogu i kultury dyskusji (komunikacja);
- dbaniu o estetykę (czytelny rysunek, jasne i przejrzyste rozwiązanie zadań itp.).

III. Ramowy rozkład materiału

Poniższe zestawienie przedstawia podział treści programowych na poszczególne klasy oraz orientacyjną liczbę godzin potrzebną na ich realizację.

W IV etapie kształcenia, na nauczanie matematyki w zakresie rozszerzonym, proponujemy przeznaczyć:

- w klasie pierwszej – 4 godziny tygodniowo;
- w klasie drugiej – 6 godzin tygodniowo;
- w klasie trzeciej – 6 godzin tygodniowo.

Rok szkolny liczy około 37 tygodni. Zatem, w klasie pierwszej nauczyciel ma do dyspozycji 148 godzin, zaś w klasie drugiej – 222 godziny. Zdający maturę zakończą zajęcia w kwietniu. Dla nich rok szkolny trwa 29 tygodni, co daje około 174 godziny lekcji matematyki.

Klasa I. 37 tygodni po 4 godziny = 148 godzin (116 godzin + 32 godzin do dyspozycji nauczyciela)

1.	Wprowadzenie. Zbiory. Zbiory liczbowe	13
2.	Działania w zbiorach liczbowych	15
3.	Wyrażenia algebraiczne	16
4.	Geometria płaska – pojęcia wstępne	13
5.	Geometria płaska – trójkąty	10
6.	Trygonometria	13
7.	Geometria płaska – pole koła, pole trójkąta	9
8.	Funkcja i jej własności	17
9.	Przekształcanie wykresów funkcji	10

**Klasa II. 37 tygodni po 6 godzin = 222 godziny
(166 godz. + 56 godz. do dyspozycji nauczyciela)**

1.	Funkcja liniowa	20
2.	Funkcja kwadratowa	25
3.	Geometria płaska – czworokąty	18
4.	Geometria płaska – pole czworokąta	14
5.	Wielomiany. Funkcje wielomianowe	25
6.	Ułamki algebraiczne. Funkcje wymierne	24
7.	Ciągi	25
8.	Trygonometria	15

**Klasa III. 29 tygodni po 6 godziny = 174 godziny
(131 godz. + 43 godz. do dyspozycji nauczyciela)**

1.	Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna	20
2.	Geometria analityczna	16
3.	Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa	30
4.	Elementy statystyki opisowej	5
5.	Geometria przestrzenna	30
6.	Elementy analizy matematycznej	30

Godziny do dyspozycji nauczyciela powinny być przeznaczone na przeprowadzenie prac klasowych wraz z ich omówieniem, uzupełnienie wiadomości uczniów, a także (w trzeciej klasie) na powtórzenie wiadomości i rozwiązywanie próbnych arkuszy maturalnych.

IV. Treści kształcenia. Szczegółowe cele edukacyjne. Założone osiągnięcia uczniów

Klasa I

1. Wprowadzenie. Zbiory. Zbiory liczbowe (13 godzin)

Tematyka

- Zdanie. Zaprzeczenie zdania.
- Koniunkcja zdań. Alternatywa zdań.
- Implikacja. Równoważność zdań. Definicja. Twierdzenie.
- Prawa logiczne. Prawa De Morgana.
- Zbiór. Działania na zbiorach.
- Zbiory liczbowe. Oś liczbowa.
- Rozwiązywanie prostych równań.
- Przedziały.
- Rozwiązywanie prostych nierówności.
- Zdanie z kwantyfikatorem.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- pozna zdania proste i złożone;
- pozna spójniki logiczne;
- dowie się, co to jest definicja i czym różni się od twierdzenia;
- dowie się, co to jest twierdzenie odwrotne;
- pozna podstawowe prawa logiki, takie jak negacja alternatywy i negacja koniunkcji;

- pozna takie pojęcia, jak: zbiór pusty, zbiór skończony (nieskończony), element zbioru, równość zbiorów, zbiory rozłączne, dopełnienie zbioru;
- zapozna się z symboliką matematyczną dotyczącą zbiorów ($\in, \subset, \cap, \cup, -, ')$);
- pozna pojęcie sumy, różnicy, iloczynu i dopełnienia zbiorów;
- przypomni sobie wiadomości dotyczące liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych i niewymiernych;
- pozna relacje, jakie zachodzą między podzbiórami zbioru liczb rzeczywistych;
- przypomni sobie, czym jest oś liczbowa;
- pozna pojęcie przedziału (ograniczonego, nieograniczonego, otwartego, domkniętego, jednostronnie otwartego);
- nauczy się wykonywać działania na przedziałach (znajdować ich sumę, iloczyn oraz różnicę, a także dopełnienie przedziału);
- przypomni sobie własności równości i nierówności w zbiorze \mathbf{R} ;
- przypomni sobie podstawowe wiadomości o równaniach;
- uzupełni wiadomości o nierównościach;
- pozna kwantyfikator ogólny i szczegółowy oraz nauczy się zaprzeczać zdania z kwantyfikatorem.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- odróżnić zdanie logiczne od innej wypowiedzi i ocenić jego wartość logiczną;
- posługiwać się spójnikami logicznymi i wie, że potoczne rozumienie spójników „i” oraz „lub” może być inne niż znaczenie spójników logicznych „ \wedge ”, „ \vee ”;
- zaprzeczać zdanie;
- budować zdania złożone i oceniać ich wartość logiczną;
- odróżniać definicję od twierdzenia;
- mając dane twierdzenie w postaci implikacji, zbudować twierdzenie odwrotne do danego twierdzenia;
- stosować poznane prawa logiczne;
- wyznaczać część wspólną, sumę i różnicę zbiorów oraz dopełnienie zbioru;
- wskazać w podanym zbiorze liczby naturalne, całkowite, wymierne, niewymierne;
- posługiwać się pojęciem osi liczbowej;
- zaznaczać przedziały na osi liczbowej;
- wykonywać działania na przedziałach;
- stosować własności równości i nierówności w zbiorze \mathbf{R} oraz rozwiązywać proste równania i nierówności;
- zaznaczać zbiór rozwiązań nierówności na osi liczbowej;
- stosować określenia „dla każdego”, „dla pewnego”, „istnieje”, „dla dowolnego”;
- wykorzystywać język matematyki w komunikowaniu się.

2. Działania w zbiorach liczbowych (15 godzin)

Tematyka

- Zbiór liczb naturalnych.
- Zbiór liczb całkowitych.
- Zbiór liczb wymiernych i zbiór liczb niewymiernych.
- Prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych.
- Rozwiązywanie równań – metoda równań równoważnych.
- Rozwiązywanie nierówności – metoda nierówności równoważnych.
- Procenty.
- Punkty procentowe.
- Wartość bezwzględna. Proste równania i nierówności z wartością bezwzględną.
- Własności wartości bezwzględnej.
- Przybliżenia, błąd bezwzględny i błąd względny, szacowanie.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- pozna pojęcie liczby pierwszej i złożonej;
- pozna cechy podzielności liczb naturalnych oraz jak znajduje się NWD i NWW liczb naturalnych;
- przypomni sobie, jak wykonuje się działania na ułamkach;

- pozna pojęcie części całkowitej i ułamkowej;
- przypomni sobie prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych;
- przypomni sobie proporcje;
- pozna twierdzenia pozwalające przekształcać w sposób równoważny równania i nierówności;
- przypomni sobie pojęcie procentu i nauczy się sprawnie operować procentami;
- pozna pojęcie punktu procentowego;
- pozna pojęcie wartości bezwzględnej;
- pozna własności wartości bezwzględnej;
- pozna pojęcie błędu bezwzględnego i względnego;
- nauczy się szacować wyrażenia liczbowe.

Założone osiągnięcia ucznia:

Uczeń potrafi:

- stosować cechy podzielności liczb naturalnych do znajdowania NWW i NWD (w tym również w celu rozwiązania zagadnień praktycznych);
- sprawnie wykonywać działania na ułamkach;
- wyznaczyć część całkowitą i część ułamkową liczby;
- zaplanować i wykonać obliczenia na liczbach rzeczywistych (w tym z wykorzystaniem praw działań);
- stwierdzić, czy wynik obliczeń jest liczbą wymierną czy niewymierną;
- wyznaczać rozwinięcia dziesiętne liczb;
- zapisać liczbę wymierną (w tym mającą rozwinięcie dziesiętne okresowe) w postaci ilorazu liczb całkowitych;
- stosować twierdzenia pozwalające przekształcać w sposób równoważny równania i nierówności;
- stosować pojęcie procentu w obliczeniach;
- odczytywać dane z tabel i diagramów;
- wykorzystywać tabele i diagramy do przedstawiania danych;
- posługiwać się pojęciem punktu procentowego;
- obliczyć wartość bezwzględną danej liczby;
- zastosować interpretację geometryczną wartości bezwzględnej;
- zaznaczyć na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności typu $|x - a| = b$, $|x - a| \geq b$;
- zapisać nierówność (równanie) z wartością bezwzględną, znając zbiór rozwiązań tej nierówności (tego równania);
- rozwiązywać równania i nierówności z wartością bezwzględną, np.: $||x - 3| - 2| < 6$, $||x + 2| - 4| \geq 1$, w oparciu o własności wartości bezwzględnej;
- znaleźć przybliżenie liczby z zadaną dokładnością;
- stosować reguły zaokrąglania liczb;
- stosować pojęcie błędu bezwzględnego i błędu względnego przybliżenia;
- oszacować wartość wyrażenia liczbowego.

3. Wyrażenia algebraiczne (16 godzin)

Tematyka

- Potęga o wykładniku naturalnym.
- Pierwiastek arytmetyczny. Pierwiastek stopnia nieparzystego z liczby ujemnej.
- Działania na wyrażeniach algebraicznych.
- Wzory skróconego mnożenia (st. 2), cz. 1.
- Wzory skróconego mnożenia (st. 3), cz. 2.
- Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym.
- Potęga o wykładniku wymiernym.
- Potęga o wykładniku rzeczywistym.
- Dowodzenie twierdzeń.
- Określenie logarytmu.
- Zastosowanie logarytmów.
- Przekształcanie wzorów.
- Średnie.

Cele edukacyjneUczeń:

- przypomni sobie własności działań na potęgach o wykładniku naturalnym;
- przypomni sobie prawa działań na pierwiastkach arytmetycznych;
- pozna pojęcie pierwiastka stopnia nieparzystego z liczby ujemnej;
- przypomni sobie działania na wyrażeniach algebraicznych;
- pozna wzory skróconego mnożenia: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$,
 $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
- nauczy się rozkładać wyrażenia algebraiczne na czynniki za pomocą poznanych wzorów skróconego mnożenia;
- nauczy się usuwać niewymierność z mianownika lub licznika ułamka;
- przypomni sobie własności działań na potęgach o wykładniku całkowitym;
- przypomni sobie zapis liczby w notacji wykładniczej;
- pozna pojęcie potęgi o wykładniku wymiernym i własności działań na takich potęgach;
- pozna, jak konstruuje się potęgę o wykładniku niewymiernym;
- pozna prawa działań na potęgach o wykładniku rzeczywistym;
- pozna pojęcie dowodu wprost oraz dowodu nie wprost;
- pozna określenie logarytmu;
- pozna podstawowe własności logarytmu (wzór na logarytm ilorazu, iloczynu, potęgi);
- pozna wzór na zamianę podstaw logarytmu;
- pozna przykładowe zastosowania logarytmów;
- nauczy się przekształcać wzory stosowane w matematyce, fizyce, chemii;
- przypomni sobie pojęcie średniej arytmetycznej oraz pozna pojęcie średniej geometrycznej i średniej ważonej.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- sprawnie wykonywać działania na potęgach o wykładniku naturalnym i całkowitym, stosując odpowiednie prawa;
- zapisywać liczby w postaci wykładniczej $a \cdot 10^k$, gdzie $a \in \langle 1, 10 \rangle$ i $k \in \mathbf{C}$;
- sprawnie wykonywać działania na pierwiastkach, stosując odpowiednie prawa;
- sprawnie posługiwać się wzorami skróconego mnożenia (w tym do rozkładania sum algebraicznych na czynniki);
- usuwać niewymierność z mianownika lub licznika ułamka;
- wykonywać działania na potęgach o wykładniku rzeczywistym (wymiernym i niewymiernym), stosując odpowiednie prawa;
- dowodzić twierdzenia, posługując się dowodem wprost;
- dowodzić twierdzenia, posługując się dowodem nie wprost;
- obliczyć logarytm danej liczby przy danej podstawie;
- stosować w obliczeniach podstawowe własności logarytmu;
- znaleźć przybliżenie liczby zapisanej przy użyciu potęgi i przedstawić je (używając kalkulatora) w notacji wykładniczej;
- sprawnie przekształcać wzory stosowane w matematyce, fizyce, chemii;
- obliczać średnią arytmetyczną, geometryczną, ważoną.

4. Geometria płaska – pojęcia wstępne (13 godzin)Tematyka

- Punkt, prosta odcinek, półprosta, kąt, figura wypukła, figura ograniczona.
- Łamana, wielokąt, wielokąt foremny.
- Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie, odległość punktu od prostej, odległość między prostymi równoległymi, symetralna odcinka, dwusieczna kąta.
- Dwie proste przecięte trzecią prostą. Suma kątów w wielokącie.
- Wektor na płaszczyźnie (bez układu współrzędnych).
- Wybrane przekształcenia płaszczyzny, cz.1.

- Wybrane przekształcenia płaszczyzny, cz.2.
- Twierdzenie Talesa.
- Okrąg i koło (położenie prostej i okręgu oraz dwóch okręgów na płaszczyźnie).
- Kąty i koła.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- przypomni sobie podstawowe pojęcia geometryczne (punkt, prosta, odcinek, półprosta, kąt);
- pozna pojęcie figury wklęsłej i wypukłej;
- pozna pojęcie figury ograniczonej i nieograniczonej;
- przypomni sobie wiadomości o kątach (kąt prosty, ostry, rozwarty, kąty przyległe, kąty wierzchołkowe);
- przypomni sobie pojęcie łamanej, wielokąta, wielokąta foremnego;
- przypomni sobie położenie prostych na płaszczyźnie, pojęcie odległości punktu od prostej i pojęcie odległości między prostymi równoległymi;
- przypomni sobie pojęcie symetralnej odcinka i dwusiecznej kąta oraz jaką własność ma dowolny punkt leżący na symetralnej odcinka (dwusiecznej kąta);
- przypomni sobie twierdzenie o dwóch prostych równoległych, przeciętych trzecią prostą;
- przypomni sobie twierdzenie o sumie miar kątów wewnętrznych wielokąta;
- pozna pojęcie wektora na płaszczyźnie;
- pozna przekształcenia izometryczne, takie jak: translacja (przesunięcie równoległe o dany wektor), symetria osiowa oraz symetria środkowa;
- pozna przekształcenia nieizometryczne, takie jak: rzut równoległy na prostą oraz powinowactwo prostokątne;
- pozna twierdzenie Talesa;
- przypomni sobie pojęcie koła i okręgu;
- przypomni sobie położenie prostej względem okręgu;
- pozna twierdzenia dotyczące stycznej do okręgu;
- pozna wzajemne położenie dwóch okręgów;
- przypomni sobie definicję kąta środkowego w kole oraz pozna określenie kąta wpisanego w koło i kąta dopisanego do okręgu;
- pozna twierdzenia dotyczące kątów środkowych, wpisanych i dopisanych do okręgu.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- określać własności poznanych figur geometrycznych i posługiwać się tymi własnościami;
- wyznaczać odległość dwóch punktów, punktu od prostej, dwóch prostych równoległych;
- konstruować: proste prostopadłe, proste równoległe, symetralną odcinka, dwusieczną kąta;
- określić wzajemne położenie prostej i okręgu;
- korzystać z własności stycznej do okręgu;
- określić wzajemne położenie dwóch okręgów;
- korzystać z własności okręgów stycznych;
- stosować w rozwiązywaniu zadań poznane twierdzenia (m.in. twierdzenie o dwóch prostych przeciętych trzecią prostą, twierdzenie Talesa, twierdzenia dotyczące kątów środkowych, wpisanych w okrąg, dopisanych do okręgu);
- rysować obrazy figur w poznanych przekształceniach geometrycznych.

5. Geometria płaska – trójkąty (10 godzin)

Tematyka

- Podział trójkątów. Suma kątów w trójkącie. Nierówność trójkąta. Odcinek łączący środki dwóch boków w trójkącie.
- Twierdzenie Pitagorasa. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.
- Wysokości w trójkącie. Środkowe w trójkącie.
- Symetralne boków trójkąta. Okrąg opisany na trójkącie.
- Dwusieczne kątów trójkąta. Okrąg wpisany w trójkąt.
- Przystawianie trójkątów.
- Podobieństwo trójkątów.
- Twierdzenia o stycznej i siecznej.

Cele edukacyjneUczeń:

- przypomni sobie podział trójkątów ze względu na boki i kąty;
- przypomni sobie twierdzenie o sumie miar kątów w trójkącie;
- przypomni sobie, na czym polega nierówność trójkąta;
- pozna twierdzenie o odcinku łączącym środki dwóch boków trójkąta;
- przypomni sobie twierdzenie Pitagorasa;
- pozna twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa;
- pozna twierdzenie o wysokościach w trójkącie;
- pozna twierdzenie o środkowych w trójkącie;
- przypomni sobie twierdzenie o symetralnych boków trójkąta;
- przypomni sobie twierdzenie o dwusiecznych kątów trójkąta;
- przypomni sobie pojęcie trójkątów przystających oraz cechy przystawania trójkątów;
- przypomni sobie pojęcie trójkątów podobnych oraz cechy podobieństwa trójkątów;
- pozna twierdzenia o stycznej i siecznej.

Założone osiągnięcia uczniaUczeń potrafi:

- stosować poznane twierdzenia w rozwiązywaniu zadań (w tym m.in. twierdzenie o sumie kątów trójkąta, twierdzenie o odcinku łączącym środki dwóch boków trójkąta, twierdzenie Pitagorasa, twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa, twierdzenie o wysokościach w trójkącie, twierdzenie o środkowych w trójkącie);
- określić – znając długości boków trójkąta – czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny;
- opisać okrąg na trójkącie, wpisać okrąg w trójkąt, wyznaczyć promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny i w trójkąt równoramienny, wyznaczać promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym i na trójkącie równoramiennym – znając długości boków trójkąta;
- rozpoznawać trójkąty przystające;
- stosować cechy przystawania trójkątów w rozwiązywaniu zadań;
- rozpoznawać trójkąty podobne;
- stosować cechy podobieństwa trójkątów w rozwiązywaniu zadań (w tym również umieszczone w kontekście praktycznym);
- dowodzić twierdzenia z wykorzystaniem przystawania i podobieństwa trójkątów;
- stosować twierdzenia o stycznej i siecznej w rozwiązywaniu zadań geometrycznych.

6. Trygonometria (13 godzin)Tematyka

- Określenie sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa w trójkącie prostokątnym.
- Wartości sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dla kątów 30° , 45° i 60° .
- Kąt skierowany.
- Sinus, cosinus, tangens i cotangens dowolnego kąta.
- Podstawowe tożsamości trygonometryczne.
- Wzory redukcyjne.
- Twierdzenie sinusów.
- Twierdzenie cosinusów.

Cele edukacyjneUczeń:

- pozna określenie funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym;
- nauczy się obliczać wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° , 60° ;
- pozna pojęcie kąta skierowanego;
- pozna definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta;
- pozna podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta;
- pozna wzory redukcyjne;
- pozna twierdzenie sinusów i jego zastosowanie;
- pozna twierdzenie cosinusów i jego zastosowanie.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- wyznaczyć funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym;
- korzystać z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora);
- obliczyć miarę kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną);
- rozwiązywać zadania geometryczne z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym;
- określać znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach;
- obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta;
- obliczyć pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych, jeśli jest znana jedna z nich;
- stosować wzory redukcyjne;
- dowodzić tożsamości trygonometryczne;
- stosować twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów do rozwiązywania trójkątów oraz w innych zadaniach geometrycznych.

7. Geometria płaska – pole koła, pole trójkąta (9 godzin)Tematyka

- Pole figury geometrycznej.
- Pole trójkąta, cz. 1.
- Pole trójkąta cz. 2.
- Pola trójkątów podobnych.
- Pole koła, pole wycinka koła.
- Zastosowanie pojęcia pola w dowodzeniu twierdzeń.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- pozna pojęcie pola figury;
- pozna własności pola;
- przypomni sobie stosowane wcześniej wzory na pole trójkąta (np. $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$ czy wzór na pole trójkąta równobocznego);
- pozna nowe wzory na pole trójkąta (np. $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$, $P = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$,

$$P = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}, P = p \cdot r$$
);
- przypomni sobie twierdzenie dotyczące pól figur podobnych;
- przypomni sobie wzór na pole koła;
- przypomni sobie wzór na pole wycinka koła.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- obliczyć pole figury, wykorzystując podział tej figury na rozłączne części;
- stosować poznane wzory do obliczania pól trójkątów;
- stosować wzory na pole trójkąta do wyznaczania wielkości występujących w tych wzorach (np. długości wysokości, długości promienia koła wpisanego w trójkąt, długości promienia okręgu opisanego na trójkącie);
- zastosować twierdzenie o polach trójkątów podobnych w rozwiązywaniu zadań;
- zastosować wzór na pole koła i pole wycinka koła w rozwiązywaniu zadań;
- rozwiązywać zadania na dowodzenie z zastosowaniem pojęcia pola.

8. Funkcja i jej własności (17 godzin)Tematyka

- Pojęcie funkcji. Funkcja liczbowa. Dziedzina i zbiór wartości funkcji.
- Sposoby opisywania funkcji.
- Wykres funkcji.

- Dziedzina funkcji liczbowej.
- Zbiór wartości funkcji liczbowej.
- Miejsce zerowe funkcji.
- Równość funkcji.
- Monotoniczność funkcji.
- Funkcje różnowartościowe.
- Funkcje parzyste i funkcje nieparzyste.
- Funkcje okresowe.
- Największa i najmniejsza wartość funkcji liczbowej.
- Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu. Szkicowanie wykresów funkcji o zadanych własnościach.
- Zastosowanie wykresów funkcji do rozwiązywania równań i nierówności.
- Zastosowanie wiadomości o funkcjach do opisywania, interpretowania i przetwarzania informacji wyrażonych w postaci wykresu funkcji.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- przypomni sobie pojęcie funkcji;
- pozna różne sposoby opisywania funkcji (graf, wzór, tabela, wykres, opis słowny);
- pozna takie pojęcia, jak: dziedzina, zbiór wartości, miejsce zerowe funkcji liczbowej;
- pozna takie pojęcia, jak: równość funkcji, różnowartościowość, monotoniczność, parzystość, nieparzystość, okresowość;
- nauczy się badać na podstawie definicji własności funkcji, takie jak: monotoniczność, różnowartościowość, parzystość, nieparzystość;
- pozna wykresy niektórych funkcji, np. $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = |x|$, $y = [x]$, $y = \text{sgn } x$;
- pozna pojęcie najmniejszej i największej wartości funkcji;
- nauczy się odczytywać własności funkcji na podstawie jej wykresu;
- nauczy się szkicować wykres funkcji o podanych własnościach;
- nauczy się opisywać, interpretować i przetwarzać informacje wyrażone w postaci wzoru lub wykresu funkcji.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- odróżnić przyporządkowanie, które jest funkcją, od przyporządkowania, które funkcją nie jest;
- opisywać funkcje na różne sposoby (grafem, wzorem, tabelką, wykresem, opisem słownym);
- wskazać wykres funkcji liczbowej;
- wyznaczyć dziedzinę funkcji liczbowej;
- określić zbiór wartości funkcji (proste przykłady);
- obliczyć ze wzoru funkcji jej wartość dla danego argumentu;
- obliczyć argument funkcji, gdy dana jest wartość funkcji dla tego argumentu;
- obliczyć miejsca zerowe funkcji;
- określić na podstawie wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, wartość największą i najmniejszą funkcji, maksymalne przedziały, w których funkcja rośnie (maleje, jest stała) oraz zbiory, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie (ujemne, nieujemne, niedodatnie);
- określić na podstawie wykresu, czy dana funkcja jest różnowartościowa, okresowa, parzysta, nieparzysta;
- zbadać na podstawie definicji niektóre własności funkcji, takie jak: różnowartościowość, parzystość czy nieparzystość;
- sporządzić wykres funkcji spełniającej podane warunki;
- stosować poznane wykresy funkcji do rozwiązywania równań i nierówności;
- podać opis matematyczny zależności dwóch zmiennych w postaci funkcji;
- odczytywać i interpretować informacje na podstawie wykresów funkcji, dotyczące różnych zjawisk, np. przyrodniczych, ekonomicznych, socjologicznych, fizycznych, chemicznych;
- przetwarzać informacje wyrażone w postaci wzoru funkcji lub wykresu funkcji.

9. Przekształcanie wykresów funkcji (10 godzin)

Tematyka

- Podstawowe informacje o wektorze w układzie współrzędnych.
- Przesunięcie równoległe o wektor $\vec{w} = [p, q]$.
- Symetria osiowa względem osi OX i osi OY .
- Symetria środkowa względem punktu $(0, 0)$.
- Wykres funkcji: $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$.
- Powinowactwo prostokątne o osi OX i o osi OY .
- Szkicowanie wykresów wybranych funkcji.
- Zastosowanie wykresów funkcji do rozwiązywania zadań.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- pozna pojęcie wektora w układzie współrzędnych;
- nauczy się dodawać i odejmować wektory oraz mnożyć wektor przez liczbę;
- pozna pojęcie wektorów przeciwnych;
- pozna pojęcie przesunięcia równoległego w układzie współrzędnych;
- nauczy się przesuwać równoległe wykres funkcji wzdłuż o wektor $\vec{w} = [p, q]$;
- pozna pojęcie symetrii osiowej w układzie współrzędnych;
- nauczy się przekształcać wykres funkcji przez symetrię względem osi OX ;
- nauczy się przekształcać wykres funkcji przez symetrię względem osi OY ;
- pozna pojęcie symetrii środkowej w układzie współrzędnych;
- nauczy się przekształcać wykres funkcji przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych;
- nauczy się szkicować wykresy funkcji: $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$;
- nauczy się szkicować wykresy funkcji: $y = c \cdot f(x)$ oraz $y = f(c \cdot x)$, gdzie $c \neq 0$;
- nauczy się rozwiązywać równania i nierówności z wykorzystaniem wykresów funkcji.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- obliczyć współrzędne wektora i długość wektora;
- dodać i odjąć wektory, pomnożyć wektor przez liczbę;
- stosować pojęcie wektorów równych i przeciwnych w rozwiązywaniu prostych zadań;
- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykres funkcji $y = f(x + a)$;
- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykres funkcji $y = f(x) + b$;
- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykres funkcji $y = f(x + a) + b$;
- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykres funkcji $y = -f(x)$;
- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykres funkcji $y = |f(x)|$;
- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykres funkcji $y = f(|x|)$;
- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykres funkcji $y = f(-x)$;
- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykres funkcji $y = -f(-x)$;
- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykres funkcji $y = c \cdot f(x)$, $c \neq 0$;
- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykres funkcji $y = f(c \cdot x)$;
- poprawnie ustalić kolejność przekształceń, aby na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykres funkcji, np. $g(x) = \frac{1}{2} |f(|x|) - 3| + 2$;
- rozwiązywać równania i nierówności z wykorzystaniem wykresów funkcji;
- zinterpretować równanie z parametrem jako równość odpowiednich funkcji i na podstawie wykresu ustalić liczbę rozwiązań równania w zależności od wartości parametru.

Klasa II

1. Funkcja liniowa (20 godzin)

Tematyka

- Proporcjonalność prosta.
- Funkcja liniowa. Wykres funkcji liniowej.
- Miejsce zerowe funkcji liniowej. Własności funkcji liniowej.
- Znaczenie współczynników we wzorze funkcji liniowej.
- Równoległość i prostopadłość wykresów funkcji liniowych o współczynnikach kierunkowych różnych od zera.
- Zastosowanie wiadomości o funkcji liniowej w zadaniach z życia codziennego.
- Równania i nierówności z parametrem.
- Równania i nierówności z wartością bezwzględną.
- Równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.
- Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.
- Zastosowanie układów równań liniowych do rozwiązywania zadań tekstowych.
- Nierówność pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi i jej interpretacja geometryczna. Układy nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- przypomni sobie definicję proporcjonalności prostej;
- pozna definicję funkcji liniowej;
- pozna znaczenie współczynników we wzorze funkcji liniowej;
- nauczy się szkicować wykres funkcji liniowej;
- pozna własności funkcji liniowej;
- nauczy się znajdować wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy lub prostopadły do wykresu danej funkcji liniowej;
- nauczy się stosować wiadomości o funkcji liniowej do opisu zjawisk z życia codziennego;
- nauczy się rozwiązywać równania i nierówności z parametrem;
- nauczy się rozwiązywać równania i nierówności z wartością bezwzględną;
- pozna określenie równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi;
- przypomni sobie, jak rozwiązuje się układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi (pozna metodę wyznacznikową rozwiązywania układu równań).
- nauczy się przeprowadzać dyskusję liczby rozwiązań układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi;
- nauczy się opisywać zbiory punktów na płaszczyźnie z układem współrzędnych za pomocą układów nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi;
- nauczy się rozwiązywać algebraicznie i interpretować graficznie równania, nierówności oraz układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi z wartością bezwzględną.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- wskazać wielkości wprost proporcjonalne oraz określić współczynnik proporcjonalności;
- zastosować proporcjonalność prostą w rozwiązywaniu zadań;
- sporządzić wykres funkcji liniowej i odczytać własności funkcji na podstawie jej wykresu;
- znaleźć wzór funkcji liniowej o zadanych własnościach;
- wykorzystać interpretację współczynników występujących we wzorze funkcji liniowej w rozwiązywaniu zadań;
- wyznaczyć wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy (prostopadły) do wykresu danej funkcji liniowej;
- stosować pojęcie funkcji liniowej do opisywania zjawisk z życia codziennego (podać opis matematyczny zjawiska w postaci wzoru funkcji liniowej, odczytać informacje z wykresu lub wzoru, zinterpretować je, przeanalizować, przetworzyć);
- rozwiązywać równania i nierówności z jedną niewiadomą oraz interpretować je graficznie;
- przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań równania liniowego z parametrem;

- stosować poznane metody rozwiązywania układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi (w tym metodę wyznacznikową);
- przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi z parametrem;
- rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności liniowych z jedną niewiadomą oraz układów równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi;
- graficznie przedstawiać równania i nierówności liniowe z dwiema niewiadomymi oraz opisywać podane zbiory za pomocą układów równań i nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi;
- rozwiązywać algebraicznie i interpretować graficznie równania, nierówności oraz układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi z wartością bezwzględną.

2. Funkcja kwadratowa (25 godzin)

Tematyka

- Funkcja kwadratowa $y = ax^2$, gdzie $a \neq 0, x \in \mathbf{R}$.
- Wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej.
- Związek między wzorem funkcji kwadratowej w postaci ogólnej a wzorem funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej.
- Miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej.
- Wzory Viète'a.
- Szkicowanie wykresów funkcji kwadratowych. Odczytywanie własności funkcji kwadratowej na podstawie wykresu.
- Najmniejsza oraz największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.
- Badanie funkcji kwadratowej – zadania optymalizacyjne.
- Równania kwadratowe.
- Nierówności kwadratowe.
- Zadania prowadzące do równań i nierówności kwadratowych.
- Równania i nierówności kwadratowe z wartością bezwzględną.
- Równania i nierówności kwadratowe z parametrem.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- pozna własności funkcji kwadratowej $y = ax^2$, gdzie $a \neq 0$;
- nauczy się przedstawiać wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej;
- pozna wzory Viète'a i ich zastosowanie;
- nauczy się szkicować wykresy funkcji kwadratowych o zadanych własnościach;
- nauczy się odczytywać własności funkcji kwadratowej na podstawie jej wykresu;
- nauczy się wyznaczać najmniejszą oraz największą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;
- nauczy się stosować własności funkcji kwadratowej w zadaniach optymalizacyjnych;
- nauczy się rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe;
- nauczy się rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności kwadratowych;
- nauczy się rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z wartością bezwzględną (będzie je również interpretować graficznie);
- nauczy się rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z parametrem (korzystając z własności funkcji kwadratowej i wzorów Viète'a);
- nauczy się przeprowadzać dyskusję liczby rozwiązań równania kwadratowego z wartością bezwzględną i parametrem (na podstawie interpretacji graficznej zadania).

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- odróżnić wzór funkcji kwadratowej od wzorów innych funkcji;
- sporządzić wykres funkcji kwadratowej i podać jej własności na podstawie wykresu;
- wyznaczać współrzędne wierzchołka paraboli i wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej;
- przekształcać wykresy funkcji kwadratowych;
- wyznaczyć wzór ogólny funkcji kwadratowej o zadanych własnościach lub na podstawie jej wykresu;
- wyznaczyć miejsca zerowe funkcji kwadratowej i wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej;

- sprawnie przekształcać wzór funkcji kwadratowej (z postaci ogólnej do postaci kanonicznej, z postaci iloczynowej do postaci kanonicznej itd.);
- interpretować informacje występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, ogólnej i postaci iloczynowej (o ile istnieje);
- stosować wzory Viète'a;
- sprawnie rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe oraz interpretować je graficznie, zapisywać rozwiązania odpowiednich nierówności w postaci sumy przedziałów;
- rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności kwadratowych;
- wyznaczyć wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;
- rozwiązywać zadania (w tym również umieszczone w kontekście praktycznym) prowadzące do badania funkcji kwadratowej (zadania optymalizacyjne);
- rozwiązywać układy równań prowadzące do równań kwadratowych;
- analizować zjawiska z życia codziennego, opisane wzorem lub wykresem funkcji kwadratowej;
- opisać dane zjawisko za pomocą wzoru funkcji kwadratowej;
- rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z wartością bezwzględną i interpretować je graficznie;
- korzystając ze wzorów Viète'a oraz własności funkcji kwadratowej, rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z parametrem;
- przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań równania kwadratowego z parametrem i wartością bezwzględną;
- udowodnić niektóre własności funkcji kwadratowej z wykorzystaniem definicji (np. parzystość, monotoniczność w przedziale);
- rozwiązywać zadania na dowodzenie dotyczące funkcji kwadratowej lub równania kwadratowego.

3. Geometria płaska – czworokąty (18 godzin)

Tematyka

- Podział czworokątów. Trapezoidy.
- Trapezy.
- Równoległoboki.
- Okrąg opisany na czworokącie.
- Okrąg wpisany w czworokąt.
- Wielokąty – podstawowe własności.
- Jednokładność i podobieństwo figur.
- Podobieństwo czworokątów.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- przypomni sobie podział czworokątów;
- pozna własności deltoidu;
- pozna twierdzenia opisujące własności trapezów (np. twierdzenie o odcinku łączącym środki ramion trapezu);
- przypomni sobie własności równoległoboków;
- pozna warunek konieczny i wystarczający na to, by na czworokącie opisać okrąg;
- pozna warunek konieczny i wystarczający na to, by w czworokąt wpisać okrąg;
- przypomni sobie własności wielokątów (w tym wielokątów foremnych);
- pozna pojęcie jednokładności i jej własności;
- nauczy się znajdować obraz figury w jednokładności o danym środku i skali;
- nauczy się wyznaczać środek jednokładności o danej skali, gdy dana jest figura i jej obraz;
- pozna pojęcie podobieństwa i jego własności;
- przypomni sobie, co to są czworokąty podobne.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- posługiwać się własnościami czworokątów w rozwiązywaniu zadań;
- stosować twierdzenie o okręgu wpisanym w czworokąt i opisanym na czworokącie;
- stosować poznane twierdzenia w rozwiązywaniu zadań dotyczących wielokątów;
- stosować funkcje trygonometryczne w rozwiązywaniu zadań geometrycznych dotyczących czworokątów;

- stosować własności jednokładności i podobieństwa figur w rozwiązywaniu zadań, również umieszczonych w kontekście praktycznym;
- rozwiązywać zadania na dowodzenie dotyczące własności czworokątów.

4. Geometria płaska – pole czworokąta (14 godzin)

Tematyka

- Pole prostokąta. Pole kwadratu.
- Pole równoległoboku. Pole rombu.
- Pole trapezu.
- Pole czworokąta – zadania różne.
- Pola figur podobnych.
- Mapa. Skala mapy.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- przypomni sobie wzory na pola czworokątów (kwadratu, prostokąta, równoległoboku, rombu, trapezu);
- pozna nowe wzory na pole czworokąta;
- pozna twierdzenie dotyczące pól figur podobnych.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- stosować poznane wzory do obliczania pól wielokątów;
- stosować twierdzenie dotyczące pól figur podobnych, również występujących w kontekście praktycznym (np. dotyczących planu, mapy, skali mapy);
- rozwiązywać zadania z zastosowaniem pól figur płaskich, również z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych.

5. Wielomiany. Funkcje wielomianowe (25 godzin)

Tematyka

- Wielomiany jednej zmiennej rzeczywistej.
- Dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów jednej zmiennej rzeczywistej.
- Równość wielomianów.
- Podzielność wielomianów.
- Dzielenie wielomianów. Dzielenie wielomianów z resztą (twierdzenie o reszcie).
- Pierwiastek wielomianu. Twierdzenie Bezouta.
- Pierwiastki wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych.
- Pierwiastek wielokrotny.
- Rozkładanie wielomianów na czynniki.
- Równania wielomianowe.
- Funkcje wielomianowe.
- Nierówności wielomianowe.
- Zadania prowadzące do równań wielomianowych.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- pozna pojęcie wielomianu stopnia n ($n \in \mathbf{N}_+$) jednej zmiennej rzeczywistej;
- pozna twierdzenie o równości wielomianów i nauczy się je stosować;
- pozna takie działania na wielomianach jak: dodawanie, odejmowanie i mnożenie;
- nauczy się dzielić wielomian przez wielomian;
- nauczy się dzielić wielomian przez dwumian za pomocą schematu Hornera;
- pozna pojęcie pierwiastka wielokrotnego wielomianu;
- pozna twierdzenie Bezouta i nauczy się je stosować;
- pozna twierdzenie o reszcie i nauczy się je stosować;
- pozna twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych i nauczy się je stosować;
- pozna metody rozkładania na czynniki (wyłączanie czynnika poza nawias, wzorów skróconego mnożenia, metoda grupowania wyrazów, metoda „prób”);

- nauczy się rozwiązywać równania wielomianowe;
- pozna pojęcie funkcji wielomianowej;
- nauczy się rozwiązywać nierówności wielomianowe;
- posiędzie umiejętność rozwiązywania zadań tekstowych prowadzących do równań wielomianowych;
- nauczy się rozwiązywać zadania dotyczące własności wielomianów w oparciu o poznane twierdzenia.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- odróżnić wielomian od innego wyrażenia;
- sprawnie wykonywać działania na wielomianach;
- sprawnie rozkładać wielomiany na czynniki;
- sprawnie rozwiązywać równania i nierówności wielomianowe (w tym z wartością bezwzględną);
- rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności wielomianowych;
- rozwiązywać zadania dotyczące wielomianów, w których potrafi zastosować poznane definicje i twierdzenia;
- rozwiązywać zadania na dowodzenie dotyczące własności wielomianów.

6. Ułamki algebraiczne. Funkcje wymierne (24 godziny)

Tematyka

- Ułamek algebraiczny. Skracanie i rozszerzanie ułamków algebraicznych.
- Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych.
- Mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych.
- Proste równania wymierne.
- Proste nierówności wymierne.
- Zadania tekstowe prowadzące do równań wymiernych.
- Określenie funkcji wymiernej.
- Proporcjonalność odwrotna.
- Funkcja homograficzna.
- Zastosowanie wiadomości o funkcji homograficznej w zadaniach.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- pozna określenie ułamka algebraicznego;
- nauczy się skracać i rozszerzać ułamki algebraiczne;
- nauczy się dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić ułamki algebraiczne;
- nauczy się rozwiązywać proste równania wymierne;
- nauczy się rozwiązywać proste nierówności wymierne;
- nauczy się rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do prostych równań wymiernych;
- pozna definicję funkcji wymiernej;
- nauczy się wyznaczać dziedzinę funkcji wymiernej;
- pozna wykres i własności funkcji $y = \frac{a}{x}$, $a \neq 0$;
- przypomni sobie, co to są wielkości odwrotnie proporcjonalne;
- pozna funkcję homograficzną;
- nauczy się rysować wykresy funkcji homograficznych;
- nauczy się opisywać własności funkcji homograficznej na podstawie jej wykresu;
- nauczy się rozwiązywać zadania z wykorzystaniem własności funkcji homograficznej;
- będzie rozwiązywał zadania dotyczące własności funkcji wymiernych.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- wyznaczyć dziedzinę ułamka algebraicznego;
- skracać, rozszerzać, dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić ułamki algebraiczne;
- rozwiązywać proste równania wymierne;
- rozwiązywać proste nierówności wymierne;

- rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do prostych równań wymiernych;
- odróżnić na podstawie wzoru funkcję wymierną od innej funkcji;
- wyznaczać dziedzinę funkcji wymiernej;
- podać przykład funkcji wymiernej o danej dziedzinie;
- posługiwać się wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi;
- posługiwać się wykresem proporcjonalności odwrotnej;
- rysować wykresy funkcji homograficznych (w tym z wartością bezwzględną) i na ich podstawie opisywać własności funkcji;
- rozwiązywać zadania dotyczące własności funkcji homograficznej;
- rozwiązywać równania wymierne z parametrem (w tym także z wartością bezwzględną), w których wykorzystuje się wykres funkcji homograficznej (interpretacja graficzna równania);
- rozwiązywać zadania dotyczące różnych własności funkcji wymiernych.

7. Ciągi (25 godzin)

Tematyka

- Określenie ciągu. Sposoby opisywania ciągów.
- Ciągi zdefiniowane rekurencyjnie.
- Monotoniczność ciągów.
- Ciąg arytmetyczny.
- Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.
- Ciąg geometryczny.
- Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.
- Lokaty pieniężne i kredyty bankowe.
- Ciągi nieskończone. Granica ciągu liczbowego.
- Własności ciągów zbieżnych.
- Ciągi rozbieżne do nieskończoności.
- Własności ciągów rozbieżnych do nieskończoności.
- Szereg geometryczny.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- pozna definicję ciągu;
- pozna sposoby opisywania ciągów (wzór ogólny, wykres);
- pozna definicję rekurencyjną ciągu liczbowego;
- pozna definicję ciągu monotonicznego i nauczy się badać monotoniczność ciągu;
- pozna definicję ciągu arytmetycznego;
- pozna własności ciągu arytmetycznego;
- nauczy się stosować w zadaniach poznane wzory dotyczące ciągu arytmetycznego (n -ty wyraz ciągu, suma n początkowych wyrazów tego ciągu, średnia arytmetyczna);
- pozna definicję ciągu geometrycznego;
- pozna własności ciągu geometrycznego;
- nauczy się stosować w zadaniach poznane wzory dotyczące ciągu geometrycznego (n -ty wyraz ciągu, suma n początkowych wyrazów ciągu, średnia geometryczna);
- pozna pojęcie procentu prostego i składanego;
- nauczy się rozwiązywać zadania dotyczące lokat i kredytów;
- pozna definicję granicy ciągu liczbowego;
- nauczy się dowodzić na podstawie definicji granicy ciągu, że dana liczba jest granicą ciągu;
- pozna własności ciągów zbieżnych i nauczy się je stosować;
- pozna definicję ciągu rozbieżnego do nieskończoności;
- pozna własności ciągów rozbieżnych do nieskończoności;
- nauczy się obliczać granice niewłaściwe ciągów rozbieżnych do nieskończoności;
- pozna pojęcie szeregu geometrycznego;
- nauczy się wyznaczać sumę szeregu geometrycznego zbieżnego;
- nauczy się stosować wiadomości o szeregu geometrycznym w zadaniach.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- określać ciąg wzorem ogólnym;
- wyznaczać wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
- określać ciąg wzorem rekurencyjnym;
- wyznaczać wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym;
- narysować wykres ciągu i podać własności tego ciągu na podstawie wykresu;
- zbadać monotoniczność ciągu;
- zbadać, czy dany ciąg jest ciągiem arytmetycznym;
- wyznaczyć ciąg arytmetyczny na podstawie wskazanych danych;
- wyznaczyć sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
- rozwiązywać zadania tekstowe z wykorzystaniem własności ciągu arytmetycznego;
- zbadać, czy dany ciąg jest ciągiem geometrycznym;
- wyznaczyć ciąg geometryczny na podstawie wskazanych danych;
- wyznaczyć sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;
- rozwiązywać zadania tekstowe z wykorzystaniem własności ciągu geometrycznego;
- rozwiązywać zadania, stosując wzory na n -ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym;
- stosować procent prosty i procent składany w zadaniach dotyczących oprocentowania lokat i kredytów;
- wykazać na podstawie definicji, że dana liczba jest granicą ciągu;
- obliczać granice ciągów zbieżnych;
- obliczać granice niewłaściwe ciągów rozbieżnych do nieskończoności;
- odróżniać ciąg geometryczny od szeregu geometrycznego;
- badać warunek istnienia sumy szeregu geometrycznego;
- obliczać sumę szeregu geometrycznego;
- zamieniać ułamek okresowy na zwykły;
- stosować wzór na sumę szeregu geometrycznego w zadaniach (rozwiązywanie równań, nierówności, zadań geometrycznych itp.).

8. Trygonometria (15 godzin)

Tematyka

- Powtórzenie wiadomości z klasy I.
- Miara łukowa kąta.
- Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej. Okresowość funkcji trygonometrycznych.
- Wykresy funkcji trygonometrycznych.
- Proste równania i nierówności trygonometryczne.
- Sinus i cosinus sumy i różnicy kątów.
- Sumy i różnice sinusów i cosinusów.
- Równania trygonometryczne.
- Nierówności trygonometryczne.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- pozna pojęcie miary łukowej kąta;
- nauczy się rysować wykresy funkcji trygonometrycznych;
- będzie doskonalił umiejętność przekształcania wykresów funkcji trygonometrycznych;
- nauczy się rozwiązywać proste równania i nierówności trygonometryczne;
- pozna wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów;
- pozna wzory na sumy i różnice sinusów i cosinusów;
- nauczy się stosować poznane wzory (np. w dowodzeniu tożsamości trygonometrycznych);
- nauczy się rozwiązywać równania i nierówności trygonometryczne z zastosowaniem poznanych wzorów.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- zamienić miarę łukową kąta na miarę stopniową i odwrotnie;
- rysować wykresy funkcji trygonometrycznych i na ich podstawie określać własności tych funkcji;

- przekształcać wykresy funkcji trygonometrycznych;
- rozwiązywać proste równania i nierówności trygonometryczne;
- sprawnie operować poznanymi wzorami w dowodzeniu tożsamości trygonometrycznych oraz innych zadaniach;
- rozwiązywać równania i nierówności trygonometryczne z zastosowaniem poznanych wzorów.

Klasa III

1. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna (20 godzin)

Tematyka

- Potęga o wykładniku rzeczywistym – powtórzenie.
- Funkcja wykładnicza i jej własności.
- Proste równania wykładnicze.
- Proste nierówności wykładnicze.
- Zastosowanie funkcji wykładniczej do rozwiązywania zadań umieszczonych w kontekście praktycznym.
- Logarytm – powtórzenie wiadomości.
- Funkcja logarytmiczna i jej własności.
- Proste równania logarytmiczne.
- Proste nierówności logarytmiczne.
- Zastosowanie równań i nierówności logarytmicznych do rozwiązywania zadań dotyczących własności funkcji logarytmicznej.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- przypomni sobie własności działań na potęgach o wykładniku rzeczywistym;
- będzie doskonalił umiejętności wykonywania działań na potęgach;
- pozna pojęcie funkcji wykładniczej;
- pozna własności funkcji wykładniczej;
- nauczy się szkicować wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw;
- nauczy się rozwiązywać proste równania i nierówności wykładnicze;
- przypomni sobie pojęcie logarytmu;
- przypomni sobie własności logarytmów i ich zastosowanie w rozwiązywaniu zadań;
- pozna pojęcie funkcji logarytmicznej;
- zapozna się z własnościami funkcji logarytmicznej;
- będzie doskonalił umiejętność przekształcania wykresów funkcji logarytmicznych;
- nauczy się wyznaczać dziedzinę funkcji logarytmicznej;
- nauczy się rozwiązywać równania logarytmiczne;
- nauczy się rozwiązywać nierówności logarytmiczne;
- nauczy się analizować zjawiska z życia codziennego, które można opisać za pomocą funkcji wykładniczej;
- nauczy się dostrzegać zastosowanie logarytmów w sytuacjach z życia (lokaty bankowe, rozpad substancji promieniotwórczych itp.).

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- sprawnie wykonywać działania na potęgach o wykładniku rzeczywistym;
- stosować własności działań na potęgach w rozwiązywaniu zadań;
- odróżnić funkcję wykładniczą od innych funkcji;
- sporządzać wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw;
- przekształcać wykresy funkcji wykładniczych;
- opisywać własności funkcji wykładniczych na podstawie ich wykresów;
- rozwiązywać proste równania i nierówności wykładnicze;
- posługiwać się funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, biologicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym;
- obliczać logarytm liczby dodatniej;
- stosować własności logarytmów w rozwiązywaniu zadań;

- odróżnić funkcję logarytmiczną od innych funkcji;
- rysować i przekształcać wykresy funkcji logarytmicznych;
- opisywać własności funkcji logarytmicznych na podstawie ich wykresów;
- rozwiązywać równania i nierówności logarytmiczne oraz interpretować je graficznie;
- posługiwać się funkcjami logarytmicznymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym.

2. Geometria analityczna (16 godzin)

Tematyka

- Wektor w układzie współrzędnych. Długość odcinka. Współrzędne środka odcinka.
- Równoległość i prostopadłość wektorów.
- Równanie kierunkowe prostej. Równanie ogólne prostej.
- Równoległość i prostopadłość prostych w układzie współrzędnych.
- Odległość punktu od prostej.
- Pole trójkąta (w układzie współrzędnych).
- Równanie okręgu.
- Koło w układzie współrzędnych.
- Przekształcenia w układzie współrzędnych.
- Jednokładność w układzie współrzędnych.
- Zastosowanie wiadomości o równaniu prostej i równaniu okręgu do rozwiązywania zadań.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- przypomni sobie podstawowe informacje o wektorze w układzie współrzędnych;
- przypomni sobie, jak oblicza się odległość punktów w układzie współrzędnych;
- pozna metodę wyznaczania współrzędnych środka odcinka;
- pozna warunek na równoległość i prostopadłość wektorów;
- przypomni sobie informacje o równaniu kierunkowym prostej;
- nauczy się zapisywać równanie prostej w postaci ogólnej;
- przypomni sobie warunki na równoległość i prostopadłość prostych danych równaniami kierunkowymi;
- pozna warunki na równoległość i prostopadłość prostych danych równaniami w postaci ogólnej;
- pozna wzór na obliczenie odległości punktu od prostej;
- nauczy się obliczać pole trójkąta, korzystając z współrzędnych wierzchołków trójkąta;
- pozna równanie okręgu;
- nauczy się przekształcać równanie okręgu do postaci kanonicznej;
- nauczy się wyznaczać współrzędne środka i promień okręgu;
- nauczy się zapisywać równanie okręgu o zadanych własnościach (np. stycznego do jednej z osi układu, przechodzącego przez trzy punkty);
- nauczy się wyznaczać współrzędne punktów wspólnych prostej i okręgu;
- nauczy się wyznaczać równanie stycznej do okręgu;
- nauczy się określać wzajemne położenie dwóch okręgów opisanych równaniami;
- nauczy się wyznaczać współrzędne punktów wspólnych dwóch okręgów;
- nauczy się opisywać koło o danym środku i promieniu oraz rysować koło opisane odpowiednią nierównością;
- pozna przekształcenia w układzie współrzędnych, takie jak: symetria osiowa, symetria środkowa, przesunięcie równoległe, jednokładność.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- obliczyć odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;
- wyznaczyć współrzędne środka odcinka;
- zastosować informacje o wektorze w układzie współrzędnych do rozwiązywania zadań;
- badać równoległość oraz prostopadłość wektorów;
- wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej);
- zbadać równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych;

- wyznaczyć równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do danej prostej w postaci kierunkowej (lub ogólnej) i przechodzi przez dany punkt;
- obliczyć współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych;
- stosować wzór na odległość punktu od prostej (również obliczać odległość między prostymi równoległymi);
- odróżnić równanie okręgu od innych równań;
- przekształcać równanie okręgu do postaci kanonicznej i odczytywać współrzędne środka i promień okręgu;
- wyznaczać równanie okręgu o zadanych własnościach;
- znaleźć współrzędne punktów wspólnych dla prostej i okręgu;
- wyznaczyć równanie stycznej do okręgu;
- określić wzajemne położenie dwóch okręgów opisanych równaniami;
- opisać koło o danym środku i promieniu za pomocą nierówności oraz, mając daną nierówność, narysować koło, które ta nierówność opisuje;
- wyznaczyć współrzędne punktów wspólnych dwóch okręgów;
- stosować przekształcenia geometryczne w rozwiązywaniu zadań z geometrii analitycznej;
- rozwiązywać zadania dotyczące trójkątów, czworokątów oraz okręgów z zastosowaniem poznanej wiedzy.

3. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa (30 godzin)

Tematyka

- Reguła mnożenia.
- Reguła dodawania.
- Wariacje.
- Permutacje.
- Kombinacje.
- Kombinatoryka – zadania różne.
- Doświadczenie losowe.
- Zdarzenia. Działania na zdarzeniach.
- Określenie prawdopodobieństwa.
- Prawdopodobieństwo klasyczne.
- Prawdopodobieństwo warunkowe.
- Zdarzenia niezależne.
- Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.
- Doświadczenie losowe wieloetapowe.
- Schemat Bernoulliego.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- zapozna się z regułą dodawania oraz regułą mnożenia;
- pozna pojęcie permutacji zbioru;
- pozna pojęcie wariacji z powtórzeniami i bez powtórzeń;
- pozna pojęcie kombinacji;
- pozna wzory na liczbę permutacji, wariacji z powtórzeniami i bez powtórzeń oraz kombinacji;
- nauczy się rozwiązywać zadania kombinatoryczne;
- pozna takie pojęcia, jak doświadczenie losowe, zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego, zdarzenie losowe;
- nauczy się określać zbiór zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego, określać jego moc oraz określać zdarzenia elementarne sprzyjające danemu zdarzeniu;
- pozna klasyczną definicję prawdopodobieństwa (twierdzenie Laplace'a);
- nauczy się rozwiązywać zadania z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa;
- pozna aksjomatyczną definicję prawdopodobieństwa;
- pozna własności prawdopodobieństwa i nauczy się stosować je w rozwiązywaniu zadań;
- pozna definicję prawdopodobieństwa warunkowego;
- pozna wzór na prawdopodobieństwo całkowite i nauczy się stosować go w zadaniach;

- nauczy się badać niezależność zdarzeń na podstawie definicji;
- pozna schemat Bernoulliego i nauczy się go stosować.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- stosować wzory na liczbę permutacji, wariacji z powtórzeniami i bez powtórzeń oraz kombinacji;
- rozwiązywać zadania tekstowe z zastosowaniem kombinatoryki;
- określić zbiór (skończony) zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego i obliczyć jego moc;
- wyznaczyć liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających danemu zdarzeniu losowemu;
- obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń losowych na podstawie klasycznej definicji prawdopodobieństwa;
- stosować własności prawdopodobieństwa w zadaniach;
- obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń losowych za pomocą drzewa;
- obliczać prawdopodobieństwo warunkowe;
- stosować w zadaniach wzór na prawdopodobieństwo całkowite;
- badać niezależność zdarzeń;
- stosować w zadaniach schemat Bernoulliego.

4. Elementy statystyki opisowej (5 godzin)

Tematyka

- Podstawowe pojęcia statystyki. Sposoby prezentowania danych zebranych w wyniku obserwacji statystycznej.
- Średnia z próby.
- Mediana z próby i moda z próby.
- Wariancja i odchylenie standardowe.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- dowie się, na czym polega klasyfikacja danych statystycznych;
- nauczy się obliczać średnią z próby, medianę z próby i odchylenie standardowe z próby;
- nauczy się interpretować wymieniane wyżej parametry statystyczne.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- obliczać średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę, odchylenie standardowe z próby;
- interpretować wymieniane wyżej parametry statystyczne;
- odczytywać i interpretować dane empiryczne z tabel, diagramów i wykresów;
- przedstawiać dane empiryczne w postaci tabel, diagramów i wykresów;
- przeprowadzać analizę ilościową przedstawionych danych;
- porównywać i określać zależności między odczytanymi danymi.

5. Geometria przestrzenna (30 godzin)

Tematyka

- Płaszczyzny i proste w przestrzeni.
- Rzut równoległy na płaszczyznę. Rysowanie figur płaskich w rzucie równoległym na płaszczyznę.
- Prostopadłość prostych i płaszczyzn w przestrzeni. Rzut prostokątny na płaszczyznę.
- Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych.
- Kąt między prostą i płaszczyzną. Kąt dwuścienny.
- Graniastopy.
- Ostrosłupy.
- Siatka wielościanu. Pole powierzchni wielościanu.
- Objętość figury przestrzennej. Objętość wielościanów.
- Przekroje wielościanów, cz. 1 (kreślenie przekrojów).
- Przekroje wielościanów, cz. 2 (rozwiązywanie zadań).
- Bryły obrotowe. Pole powierzchni brył obrotowych.
- Objętość brył obrotowych.

Cele edukacyjne

Uczeń:

- pozna wzajemne położenie prostych i płaszczyzn w przestrzeni;
- nauczy się rysować figury w rzucie równoległym na płaszczyznę;
- pozna wzajemne położenie prostej i płaszczyzny;
- pozna twierdzenie o trzech prostych prostopadłych;
- nauczy się wyznaczać kąt między prostą a płaszczyzną;
- pozna pojęcie kąta dwuściennego oraz pojęcie kąta liniowego;
- przypomni sobie i uzupełni wiadomości o graniastosłupach;
- przypomni sobie i uzupełni wiadomości o ostrosłupach;
- przypomni sobie i uzupełni wiadomości o bryłach obrotowych;
- pozna przekroje brył.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- badać wzajemne położenie prostych i płaszczyzn w przestrzeni;
- stosować twierdzenie o trzech prostych prostopadłych;
- poprawnie narysować graniastosłup, ostrosłup lub bryłę obrotową w rzucie;
- podać własności figur przestrzennych, takich jak graniastosłupy, ostrosłupy czy bryły obrotowe;
- rozpoznać w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami i przekątnymi) oraz obliczyć miary tych kątów;
- rozpoznać w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami) oraz obliczyć miary tych kątów;
- rozpoznać w walcach i stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą) oraz obliczyć miary tych kątów;
- rozpoznać w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między ścianami;
- stosować wiedzę z trygonometrii oraz twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów do obliczania długości odcinków oraz miar kątów;
- rysować siatki figur przestrzennych;
- wyznaczać pola i objętości graniastosłupów, ostrosłupów i brył obrotowych;
- określić, jaką figurą jest dany przekrój sfery płaszczyzną;
- określić, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną (obliczyć pole przekroju).

6. Elementy analizy matematycznej (30 godzin)

Tematyka

6.1 Granica i ciągłość funkcji.

- Granica funkcji w punkcie.
- Granica niewłaściwa funkcji w punkcie.
- Granica funkcji w nieskończoności.
- Granice jednostronne funkcji.
- Asymptoty wykresu funkcji (pionowe, poziome, ukośne).
- Ciągłość funkcji (w punkcie i w zbiorze).

6.2 Pochodna funkcji.

- Pochodna funkcji w punkcie (interpretacja geometryczna i fizyczna; własności).
- Styczna do wykresu funkcji.
- Pochodna funkcji w zbiorze.
- Funkcja pochodna (własności).

6.3 Zastosowanie pochodnej funkcji.

- Pochodna funkcji a monotoniczność funkcji.
- Ekstrema lokalne funkcji.
- Ekstrema globalne funkcji (w przedziale domkniętym, w przedziale otwartym).
- Zadania optymalizacyjne.
- Badanie przebiegu zmienności funkcji.

Cele edukacyjneUczeń:

- pozna pojęcie granicy funkcji w punkcie;
- nauczy się obliczać granicę funkcji w punkcie;
- pozna pojęcie granicy funkcji w nieskończoności;
- nauczy się obliczać granicę funkcji w nieskończoności;
- pozna pojęcie granicy niewłaściwej funkcji w punkcie i nieskończoności;
- nauczy się obliczać granicę niewłaściwą funkcji w punkcie i nieskończoności;
- nauczy się wyznaczać granice funkcji na krańcach przedziałów określoności;
- nauczy się wyznaczać równania asymptot wykresu funkcji (pionowych, poziomych, ukośnych);
- pozna definicję funkcji ciągłej w punkcie i w zbiorze;
- nauczy się badać ciągłość funkcji w punkcie i w zbiorze;
- zapozna się z własnościami funkcji ciągłych;
- pozna pojęcie ilorazu różnicowego funkcji i nauczy się obliczać iloraz różnicowy funkcji;
- pozna definicję pochodnej funkcji w punkcie i jej interpretację geometryczną;
- nauczy się obliczać pochodną funkcji w punkcie na podstawie definicji;
- pozna pojęcie stycznej do wykresu funkcji;
- nauczy się wyznaczać styczną do wykresu funkcji w danym punkcie;
- pozna pojęcie funkcji pochodnej;
- wyprowadzi wzory na pochodne funkcji;
- nauczy się stosować w praktyce wzory na pochodne;
- nauczy się wykorzystywać pochodne do badania monotoniczności funkcji;
- pozna pojęcie ekstremum funkcji;
- pozna warunek konieczny i wystarczający istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej;
- nauczy się wyznaczać ekstrema funkcji różniczkowalnej;
- nauczy się stosować rachunek pochodnych do badania funkcji wymiernych i szkicowania ich wykresów;
- nauczy się stosować pochodną funkcji do analizowania i rozwiązywania problemów praktycznych (zadania optymalizacyjne).

Założone osiągnięcia uczniaUczeń potrafi:

- obliczyć granicę właściwą i niewłaściwą w punkcie i nieskończoności;
- obliczyć granice funkcji na krańcach przedziałów określoności;
- zbadać ciągłość funkcji w punkcie i w zbiorze;
- wykorzystać własności funkcji ciągłych w zadaniach;
- obliczyć pochodną funkcji w punkcie;
- sprawnie wyznaczać funkcje pochodne danych funkcji na podstawie poznanych wzorów;
- napisać równanie stycznej do wykresu funkcji oraz rozwiązywać różne zadania z wykorzystaniem wiadomości o stycznej;
- zbadać monotoniczność funkcji za pomocą pochodnej;
- wyznaczyć ekstrema funkcji różniczkowalnej;
- zbadać przebieg zmienności funkcji i naszkicować jej wykres;
- zastosować rachunek pochodnych do analizy zjawisk opisanych wzorami funkcji wymiernych (w tym zadania optymalizacyjne).

V. Procedury osiągnięcia celów kształcenia i procedury oceniania osiągnięć uczniów

Nikogo nie trzeba przekonywać, że rozwijanie umiejętności matematycznych wpływa na rozwój intelektualny człowieka. Matematyka uczy logicznego myślenia i wnioskowania. Na lekcjach matematyki uczeń nabywa umiejętności precyzyjnego wystawiania się, co pomaga mu w komunikowaniu się z innymi.

Edukację w liceum rozpoczynamy od wprowadzenia do matematyki. Realizacja tej tematyki pozwoli na zrozumienie budowy definicji i twierdzenia matematycznego (założenie, teza) oraz umożliwi kształcenie umiejętności logicznego wnioskowania. Umożliwi kształcenie precyzyjnego zapisu matematycznego, co wpłynie na kształtowanie umiejętności jasnego i precyzyjnego formułowania wypowiedzi.

Realizacja naszego programu w oparciu o przygotowane przez nas podręczniki i zbiory zadań umożliwi rozwiązywanie ciekawych problemów zarówno z algebry, jak i z geometrii. Zadania rozwiązywane na każdym etapie edukacji pozwolą na zdobycie umiejętności w zakresie: interpretowania tekstu matematycznego, używania prostych obiektów matematycznych, prostego modelowania matematycznego, stosowania strategii wynikającej z treści zadania, jak również prowadzenia prostych rozumowań, składających się z niewielkiej liczby kroków. Przedstawienie w podręcznikach różnych sposobów rozwiązania zadań uczy kreatywności w poszukiwaniu przez ucznia własnej metody rozwiązania problemu. Przykłady zaczerpnięte z życia codziennego pozwolą uczniowi dostrzec prawidłowości matematyczne w otaczającym go świecie i wpłyną na rozwijanie praktycznych umiejętności.

We współczesnym świecie niezbędna jest umiejętność posługiwania się różnymi tabelami, wykresami i diagramami. Kształtowanie tych umiejętności umożliwi realizacja naszego programu w każdym dziale matematyki, w szczególności przy omawianiu takiej tematyki, jak zbiory, elementy statystyki, czy własności funkcji. Na tych lekcjach uczeń nabędzie umiejętność zdobywania, porządkowania, analizowania i przetwarzania informacji. Opanuje umiejętność oceny ilościowej i opisu zjawisk z różnych dziedzin życia. Lekcje rachunku prawdopodobieństwa ułatwią uczniowi dokonanie wyboru strategii w przypadkach doświadczeń losowych (np. gry losowe).

Bardzo ważne jest kształtowanie postaw młodego pokolenia. Te cele należy kształtować na każdej lekcji matematyki. Trzeba wymagać od uczniów samodzielności w rozwiązywaniu problemów, piętnować nieuczciwość, wyrażającą się w podpowiadaniu czy w ściąganiu. Każdy uczeń powinien czuć się odpowiedzialny za powierzone mu zadania. Jednocześnie powinien uczyć się współpracy z rówieśnikami poprzez pomoc koleżeńską, wykonywanie wspólnych projektów itp.

Na lekcjach matematyki mamy doskonałe warunki do tego, by uczyć kultury dyskusji. Bardzo często uczniowie przedstawiają różne metody rozwiązania tego samego problemu, a naszym obowiązkiem jest wysłuchać wszystkich propozycji i wspólnie z zespołem podjąć decyzję, w jaki sposób dany problem ostatecznie rozwiązać. Zwracamy też uwagę na język matematyczny, precyzyjne formułowanie myśli, logiczną konstrukcję wypowiedzi. Kształcimy w ten sposób umiejętność komunikacji uczeń-nauczyciel, uczeń-uczeń.

Osiąganie założonych celów edukacyjnych i wychowawczych jest możliwe dzięki stosowaniu na lekcjach matematyki różnorodnych metod nauczania i odpowiedniego doboru form organizacyjnych lekcji. Ta różnorodność ma nie tylko uatrakcyjnić przedmiot, ale także zaktywizować uczniów w procesie uczenia się, zachęcić do rozwiązywania różnorodnych problemów, spowodować kształtowanie odpowiednich postaw.

1. Metody nauczania

Wśród najczęściej stosowanych metod pracy na uwagę zasługują:

a) Metoda podająca

- Wykład – w tej metodzie nauczania główną rolę odgrywa nauczyciel. Dobrze przygotowanie merytoryczne prowadzącego zajęcia jest podstawą rzetelnego przekazania wiedzy uczniom. To on formułuje problem, analizuje go, wskazuje drogi i sposoby rozwiązania. Uczniowie sporządzają notatki, zapamiętują fakty, zdobywają wiedzę i umiejętności poprzez naśladowictwo. Ta metoda jest ważna z punktu widzenia dalszej nauki. Na uczelniach jest stosowana powszechnie, zatem uczeń powinien być przygotowany do korzystania z wykładu. W szkole średniej nie powinna być jednak stosowana zbyt często.

b) Metody aktywizujące uczniów

- Pogadanka, dyskusja – w tej metodzie nauczyciel kieruje rozmową, umiejętnie prowadzi dyskusję i porządkuje jej przebieg. Zadaje pytania, naprowadza na prawidłowe odpowiedzi, rozjaśnia wątpliwości, rozstrzyga spory. Uczniowie dyskutują, formułują spostrzeżenia, wymieniają się doświadczeniami, argumentują, spierają się, wyciągają wnioski.
- Metoda problemowa – w tej metodzie nauczyciel stawia przed uczniami pewien problem matematyczny (zadanie problemowe), który uczniowie rozwiązują samodzielnie. Uczniowie zmuszeni są do dużego wysiłku intelektualnego. Analizują problem, formułują hipotezy, weryfikują je, w razie potrzeby wyjaśniają wątpliwości z nauczycielem, budują model rozwiązania problemu, dokonują korekt, podsumowują swoje spostrzeżenia i wnioski, sprawdzają obliczenia, formułują odpowiedź. Ta metoda kształci umiejętność rozwiązywania problemów, wzbogaca wiedzę uczniów i aktywizuje ich postawy w procesie kształcenia.

– Praca z tekstem matematycznym:

- 1) *Praca z podręcznikiem* – polega na samodzielnym przeczytaniu fragmentu podręcznika, zapoznaniu się z definicjami i twierdzeniami oraz ze sposobami rozwiązywania zadań. Kształci umiejętność czytania ze zrozumieniem tekstu matematycznego, analizowania definicji i twierdzeń oraz śledzenia algorytmów rozwiązania niektórych zadań.
- 2) *Praca z wykorzystaniem encyklopedii, słowników, czasopism popularnonaukowych, roczników statystycznych itp.* – przyzwyczajają uczniów do zbierania informacji z różnych źródeł, analizowania ich i przetwarzania, a także uświadomienia sobie, jaką rolę pełni matematyka w otaczającej ich rzeczywistości.
- 3) *Praca z komputerem* – odpowiednie stosowanie technologii informacyjnej może istotnie zwiększyć efekty kształcenia matematycznego. Rekomendujemy używanie programu GeoGebra – darmowego oprogramowania wspomagającego nauczanie matematyki. GeoGebra można zastosować we wszystkich działach występujących w nauczaniu matematyki na poziomie szkoły średniej. Na uwagę zasługuje na przykład zastosowanie GeoGebry do: badania własności funkcji, badania własności figur płaskich („odkrywanie” twierdzeń), rozwiązywania zadań z geometrii przestrzennej. Zastosowanie GeoGebry odbywać się może na kilku poziomach: a) prezentacja – za pomocą komputera i rzutnika nauczyciel prezentuje uczniom przygotowany wcześniej (statyczny) pokaz; b) prezentacja interaktywna – nauczyciel prezentuje uczniom dynamiczny pokaz (interaktywne aplety); c) prezentacja interaktywna z udziałem uczniów – nauczyciel prezentuje uczniom dynamiczny pokaz (interaktywne aplety) na tablicy (multimedialnej), w prezentacji biorą też udział wybrani uczniowie; d) zajęcia w pracowni komputerowej – każdy uczeń pracuje indywidualnie przy komputerze.

- Rozwiązywanie ciągu zadań – metoda ta polega na rozwiązywaniu przez uczniów zestawu zadań (ze zbioru zadań bądź przygotowanych przez nauczyciela). Ważne jest, aby zadania ułożone były w takiej kolejności, żeby rozwiązanie każdego następnego zadania pogłębiało wiedzę i umiejętności ucznia. Dobrze byłoby, aby wśród zadań pojawiły się też takie, które mają ciekawą nietypową treść lub zaskakujące rozwiązanie. Takiego rodzaju zadania i ćwiczenia w naturalny sposób pobudzają ciekawość i aktywność umysłową uczniów.

2. Formy pracy

Z wyborem metod nauczania ściśle wiąże się odpowiedni dobór form organizacyjnych lekcji. Wśród nich można wyróżnić następujące:

- **Praca z całą klasą** – polega na zaangażowaniu całej społeczności klasowej w rozwiązywanie problemów sformułowanych przez nauczyciela.
- 1) Nauczyciel realizuje ze wszystkimi uczniami te same treści (np. uczniowie rozwiązują te same zadania, analizują ten sam problem matematyczny, dyskutują na ten sam temat, nauczyciel prowadzi wykład). Ta forma pracy sprzyja nawiązywaniu więzi uczniowskich.
 - 2) Wzajemne odpytywanie się (uczeń zadaje pytanie i wskazuje tego, który ma na nie odpowiedzieć; uczeń, który odpowiedział na postawione pytanie, zadaje swoje pytanie następnemu uczniowi itd.). Taka metoda pracy angażuje wszystkich uczniów. Pozwala na sprawne powtórzenie materiału. Uczniowie kształcą umiejętność porządkowania informacji, formułowania i zadawania pytań.
- **Praca w grupach** – polega na podziale klasy na kiluosobowe zespoły i przydzieleniu im problemu do rozwiązania. Taka forma pracy przebiega w różny sposób, w zależności od wyboru metody pracy, np.:
- 3) Każda grupa dostaje do rozwiązania zadanie lub zadania; wszyscy członkowie grupy uczestniczą w rozwiązywaniu problemu, dzieląc się własnymi spostrzeżeniami, umiejętnościami i wiedzą; nad pracą grupy pieczę sprawuje wcześniej wybrany lider grupy. Sprawozdawca grupy referuje rozwiązanie problemu przed całą klasą.
 - 4) Metoda układanki „puzzle” – każdy członek grupy otrzymuje część informacji potrzebnej do wykonania zadania grupowego; poszczególni członkowie grupy są odpowiedzialni za przygotowanie swojej porcji informacji, przekazanie jej kolegom i przyswojenie informacji prezentowanych przez nich.
 - 5) Metoda „drzewa decyzyjnego” – nauczyciel określa problem będący przedmiotem analizy; dzieli uczniów na grupy. Uczniowie wybierają różne możliwości rozwiązania zadania, wypisują zalety

i wady każdej z metod rozwiązania, oceniają je z punktu widzenia wartości i celów, podejmują grupową decyzję o wyborze metody rozwiązania problemu.

Praca w grupach uczy organizacji pracy, podziału obowiązków pomiędzy członków grupy, odpowiedzialności za powierzone zadania. Uczy komunikacji między członkami grupy, zasad współpracy partnerskiej. Ma ogromne walory kształcące i wychowawcze.

- **Praca indywidualna** – każdy uczeń pracuje samodzielnie, pod kierunkiem nauczyciela (jeśli praca odbywa się na lekcji) lub samodzielnie (jeśli praca odbywa się w domu). Praca indywidualna pozwala uczniowi na samodzielne poszukiwanie odpowiedzi na postawione pytania, zmusza do własnych przemyśleń, zastanowienia się nad problemem i sposobem jego rozwiązania, utrwaleniem już zdobytej wiedzy, a także nad kształceniem umiejętności uczenia się. Uczeń pracuje we właściwym dla siebie tempie. Praca indywidualna wyrabia też nawyk sumiennego wykonania powierzonego zadania, odpowiedzialności za siebie, za swoją wiedzę i umiejętności.

3. Metody kontroli i oceny

Kontrolowanie i ocenianie uczniów powinno być spójne z tym, co było przedmiotem nauczania. Przedmiotem oceny nie może być relacja między wiedzą ucznia i nauczyciela, lecz postęp ucznia w procesie kształcenia. Głównymi obszarami oceniania powinny być: wiedza zdobyta przez ucznia, umiejętności pozwalające uczniowi na gromadzenie i pogłębianie wiedzy, umiejętności społeczne i komunikacyjne, a także postawa młodego człowieka, wyrażająca się w dążeniu do samorealizacji. Najłatwiej ocenić wiedzę, jaką posiada uczeń, trudniej – pozostałe obszary. Aby móc to uczynić, należy stosować aktywne metody nauczania. Tak ważną umiejętnością, jak komunikacja, która wyraża się w wypowiedzaniu, argumentowaniu, najlepiej można ocenić podczas dyskusji, pracy w grupach czy autoprezentacji. Z kolei umiejętności społeczne ujawnia współpraca w mniejszych zespołach, prace projektowe oraz zadania indywidualne, podejmowane przez pojedynczych uczniów. Ocenie podlega wówczas zaangażowanie w realizację zadań, odpowiedzialność za pracę, a także umiejętność współpracy między uczniami. Jest ważne, aby nauczyciel miał świadomość, że ocenianie nie służy tylko gromadzeniu ocen. Ma sprawdzać postępy ucznia, uświadamiać mu braki, w porę wykrywać kłopoty i trudności w nabywaniu różnych umiejętności, ale także zachęcać go do dalszej pracy i pokonywania trudności. Regularność oceniania zachęca uczniów do systematycznej pracy. Ważne jest, abyśmy dostrzegali nie tylko zaangażowanie uczniów podczas lekcji, ale także premiowali wszelkie prace domowe. Jest niezwykle ważne, aby system oceniania był jasny i czytelny dla uczniów i ich rodziców. Aby wnikliwie ocenić edukacyjne osiągnięcia ucznia, należy posługiwać się różnorodnymi środkami i metodami oceniania, takimi jak: sprawdziany pisemne (prace klasowe, testy, kartkówki), odpowiedzi ustne (referaty, odpowiedzi z kilku ostatnich zajęć, prezentacja rozwiązania zadania, dyskusja nad rozwiązaniem problemu itp.), praca w grupach, prace domowe oraz aktywność na zajęciach. Poszczególnym formom oceniania można nadać różną wagę. Egzamin maturalny jest egzaminem pisemnym, więc dużą wagę należy przywiązywać do prac pisemnych. Proponujemy następujący system oceniania:

- Prace klasowe oraz testy oceniane są w skali 1–6 wg skali procentowej.

niedostateczny	0%	do 45%
dopuszczający	46%	do 59%
dostateczny	60%	do 79%
dobry	80%	do 91%
bardzo dobry	92%	do 100%
celujący	ocena bardzo dobry + zadanie dodatkowe.	

- W szczególnych przypadkach (np. słaba klasa) można proponowaną skalę obniżyć do 40%, zmieniając odpowiednio przedziały procentowe.
- Kartkówki: proponujemy, aby maksymalna liczba punktów, jaką może otrzymać uczeń, była wielokrotnością liczby 6, najlepiej 6 pkt lub 12 pkt. Wówczas ocenę z kartkówki można obliczyć według

wzoru: $ocena = \frac{l_p}{k} - 1$, gdzie l_p to liczba punktów uzyskanych przez ucznia, $k = 1$ dla kartkówki 6-punktowej lub $k = 2$ dla kartkówki 12-punktowej (oczywiście, jeśli wartość oceny otrzymanej ze wzoru jest mniejsza niż 1, uczeń otrzymuje ocenę niedostateczną).

Praca w grupach: tę formę pracy jest dość trudno ocenić. Zdarza się, bowiem, że nie wszystkie osoby w grupie wkładają odpowiedni wysiłek w wykonanie zadania, niektóre w ogóle nie pracują, oczekując na wyniki pracy pozostałych. Osoby nieaktywne nie korzystają z lekcji. Jeśli praca w grupach ma charakter ćwiczeniowy (grupa otrzymuje jedno lub kilka zadań do rozwiązania), to proponujemy następujący system oceny jej pracy: nauczyciel informuje grupy, że ocena ich pracy to średnia dwóch ocen – pracy pisemnej i odpowiedzi ustnej. Każda grupa ma sekretarza, który na koniec zajęć przedstawia w formie pisemnej efekty pracy grupy, nauczyciel sprawdza i ocenia pracę pisemną. Następnie wybiera z każdej grupy jedną osobę, która na tablicy rozwiązuje zadanie wskazane przez nauczyciela. Odpowiedź ucznia podlega ocenie. Każdy członek danej grupy otrzymuje ocenę, która jest średnią ocen z pracy pisemnej i odpowiedzi ustnej ucznia danej grupy. Taki system oceny pracy grupowej powoduje, że wszyscy członkowie grupy czują się współodpowiedzialni za powierzone zadanie. Chętnie pomagają sobie nawzajem, wyjaśniają wątpliwości. Chcą, aby każdy uczeń z grupy był gotowy do prezentacji problemu.

4. Środki dydaktyczne

- a) Wykonywanie siatek i modeli figur przestrzennych – w ten sposób rozwijana jest wyobraźnia przestrzenna uczniów.
- b) Wykorzystanie telewizji edukacyjnej, filmów edukacyjnych, komputerów – jest elementem edukacji medialnej; daje możliwość prezentowania różnych modeli matematycznych; zwiększa atrakcyjność prezentowanego materiału.
- c) Analizowanie informacji z prasy, np. danych giełdowych, kursu walut, zmian cen różnych towarów na rynku.
- d) Wykorzystanie środków mnemotechnicznych.

Osiąganie zamierzonych celów kształcenia może odbywać się również przez uczestnictwo uczniów w kołach matematycznych, kołach interdyscyplinarnych, a także w konkursach matematycznych i w olimpiadzie matematycznej.