

XV Regionalny Konkurs Matematyczny
klas I-II szkół ponadgimnazjalnych regionu śląskiego
Etap szkolny - dnia 18. kwietnia 2007r.
Czas rozwiązywania: 90 minut

Główny organizator: Śląskie Stowarzyszenie Matematyczne „KANGUR”
Współpraca: Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli w Śląsku

Zadanie 1 (5 pkt.):

W prostokątnym układzie współrzędnych wyznacz zbiór $P = A \cap B$ taki, że:

$A = \{(x, y) : y \leq |x - 1|\}$ i $B = \{(x, y) : x \geq 0\}$. Wyznacz łączną długość części wszystkich prostych $y = x + k$, zawartych w zbiorze P, gdzie: $k \in C_+ \cup \{0\}$ przyjmuje wartości dziedziny funkcji $f(k) = \sqrt{k^2 + 2k} + \sqrt{16 - k^2}$.

Zadanie 2 (5 pkt.):

Prosta $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$ oraz osie OX i OY prostokątnego układu współrzędnych wyznaczają na płaszczyźnie XOY trójkąt prostokątny. Wykreślono okrąg styczny do dłuższej przyprostokątnej i przechodzący przez wierzchołek kąta ostrego, którego środek leży na przeciwprostokątnej. Wyznacz stosunek pola części koła (wyznaczonego przez okrąg) zawartego w tym trójkącie do pola pozostałej części koła.

Zadanie 3 (5 pkt.):

Ciąg liczbowy określony jest następująco: $a_n = (2n - 1)(2k + 1)^2$.

- a) Dla jakiej liczby $k \in C$ suma trzech początkowych wyrazów tego ciągu jest równa $81k$?
- b) Dla jakiej liczby $k \in R$ suma 3 początkowych wyrazów ciągu, spełniających wyżej wymieniony warunek, jest najmniejsza? Podaj wartość tej sumy.

Zadanie 4 (5 pkt.):

Rozstrzygnij, czy rozwiązania równania $\frac{(2x - 1024)(x^2 - 5 \cdot 32^6 x + 4^{31})}{3x + 5} = 0$ można zapisać jako potęgi liczb naturalnych o wykładniku naturalnym.

Podaj, które wyrazy ciągu określonego wzorem $a_n = \frac{(2n - 1024)(n^2 - 5 \cdot 32^6 n + 4^{31})}{3n + 5}$ przyjmują wartości dodatnie.

Zadanie 5 (5 pkt.):

Z drutu o długości 5,4 metra należy zbudować szkielet graniastosłupa prostego, którego podstawą jest trójkąt prostokątny taki, że przeciwprostokątna jest o 160% dłuższa niż jedna z przyprostokątnych. Jaką wysokość powinien mierzyć ten graniastosłup, jeżeli jedna z jego ścian bocznych jest kwadratem, a wymiary graniastosłupa wyrażone są z dokładnością do 1 cm? Podaj objętość tego graniastosłupa.