

## STEREOMETRIA

1. Wiedząc, że  $\vec{a} = [4,3,4]$ ,  $\vec{a} + \vec{c} = [5,6,7]$  obliczyć długość wektora  $\vec{c} - \vec{a}$ .
2. Wyznaczyć wartości  $x$  tak, by wektor  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, x]$  był wektorem o długości 1.
3. Obliczyć objętość prostopadłościanu, jeśli jedna krawędź podstawy ma długość 3, przekątna podstawy ma długość 5, a przekątna prostopadłościanu ma długość 13.
4. Obliczyć pole przekroju czworościanu foremnego o krawędzi długości  $a$  jedną z płaszczyzn symetrii tego czworościanu.
5. Sześcian o danej krawędzi długości  $a$  przecięto płaszczyzną przechodzącą przez trzy jego wierzchołki, a nie zawierającą żadnej z krawędzi sześcianu. Znaleźć długość wysokości ostrosłupa odciętego tą płaszczyzną od sześcianu.
6. Obliczyć objętość czworościanu foremnego, którego krawędź ma długość  $a$ .
7. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym. Obliczyć stosunek objętości kuli opisanej na tym stożku do objętości kuli wpisanej w ten stożek.
8. Stożek i półkula mają taką samą podstawę o promieniu  $R$ . Obliczyć pole powierzchni bocznej stożka, gdy jego objętość jest równa objętości półkuli.
9. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o polu podstawy równym 4 i wysokości ściany bocznej długości 2. Obliczyć miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy.
10. Objętość kuli o promieniu długości  $R$  jest równa objętości walca, którego przekrój osiowy jest kwadratem. Obliczyć długość wysokości tego walca..
11. Ostrosłup prawidłowy czworokątny o boku podstawy  $a$  równej 3 ma wysokość  $h$  długości 6. Obliczyć kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.
12. Obliczyć pole powierzchni bocznej stożka o wysokości  $h$  długości 3 i objętości  $V$  równej 16..
13. Z jednego wierzchołka sześcianu poprowadzono przekątne dwóch ścian tego sześcianu. Obliczyć miarę kąta między tymi przekątnymi.
14. Z powierzchni bocznej stożka, po jej rozwinięciu, otrzymano półkole o promieniu długości 2. Obliczyć miarę kąta między tworzącą a osią stożka.
15. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym. Wyznaczyć stosunek pola powierzchni bocznej tego stożka do pola jego podstawy.
16. Wyznaczyć punkty, w których płaszczyzna  $2x - 3y + z - 6 = 0$  przecina osie układu współrzędnych.
17. Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu trójkąta prostokątnego o bokach 1,1,  $\sqrt{2}$  wokół przeciwprostokątnej.
18. Obliczyć długość wektora  $\vec{a}$ , jeśli  $\vec{a} \circ \vec{b} = 7$   $\vec{a} \parallel \vec{b}$   $\vec{b} = [3,-2,1]$ .
19. Obliczyć długość dowolnej środkowej trójkąta ABC, jeżeli: A = (-1,2, 3), B = (1,6, -3), C = (4, -2,- 1).
20. Ostrosłup prawidłowy trójkątny ma bok podstawy  $a$  równy 6 i wysokość  $h$  długości 5. Obliczyć kąt płaski przy wierzchołku ostrosłupa.
21. Stosunek pola powierzchni bocznej stożka do jego pola powierzchni podstawy jest równy 2. Wysokość stożka jest równa 3 cm. Obliczyć objętość tego stożka.
22. W prawidłowym ostrosłupie trójkątnym kąt między krawędzią boczną i krawędzią podstawy ma miarę  $\alpha$ . Obliczyć cosinus kąta:
  - a) nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy,
  - b) nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

23. Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o boku długości 3. Wysokość prostopadłościanu ma długość 4. Znaleźć cosinus kąta między przekątnymi ścian bocznych wychodzących z tego samego wierzchołka. Obliczyć pole trójkąta, którego dwa boki są tymi przekątnymi.
24. Na sześciacie opisano kulę oraz w ten sześciat wpisano kulę. Znaleźć stosunek pól powierzchni tych kul.
25. Obliczyć długość przekątnej sześciatu o powierzchni  $24 \text{ m}^2$ .
26. Obliczyć długość wektora  $\vec{v}$ , gdy  $\vec{u} = [2, -4, 4]$ ,  $\vec{u} \circ \vec{v} = 9$  i  $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$ .
27. Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma wszystkie krawędzie jednakowej długości. Wyznaczyć sinus miary kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy..
28. Na osi OY znaleźć punkt M równo oddalony od punktów  $A = (2, -1, 5)$  i  $B = (-3, 2, 4)$ .
29. Dla jakich wartości parametru  $m$  wektory  $\vec{a} + m\vec{b}$  oraz  $\vec{c}$  są prostopadłe, gdy  $\vec{a} = [2, 2, 1]$ ,  $\vec{b} = [1, 1, 0]$ ,  $\vec{c} = [m - 1, 3, -1]$ ?
30. Dla jakich wartości parametru  $k$  wektor  $[2, k, -2]$  tworzy z wektorem  $[1, 1, 1]$  kąt o mierze  $\frac{\pi}{3}$ ?
31. Obliczyć pole przekroju sześciatu o krawędzi długości 1 płaszczyzną zawierającą przekątną sześciatu i przechodzącą przez środek krawędzi nie mającej punktu wspólnego z tą przekątną.
32. Dla jakich wartości parametru  $m$  wektory  $\vec{a} + m\vec{b}$  oraz  $\vec{c}$  są równoległe, gdy  $\vec{a} = [2, 2, 2]$ ,  $\vec{b} = [1, 2, 0]$ ,  $\vec{c} = [2m + 9, 3, -1]$ ? Czy zwroty tych wektorów są zgodne?
33. Obliczyć długość wektora  $3\vec{v} - 2\vec{u}$ , gdzie  $\vec{v} = [-1, 2, 0]$ ,  $\vec{u} = [0, 1, -3]$ .
34. Obliczyć pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego o podstawie sześciokąta, jeżeli długość boku sześciokąta jest równa 2, a długość krawędzi bocznej ostrosłupa jest równa 5.
35. Romb o boku długości  $a$  i kącie ostrym  $\alpha$  obraca się dookoła boku. Obliczyć objętość powstałej bryły.
36. Przekątna prostopadłościanu ma długość  $d$  i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt  $\alpha$ , a z płaszczyzną jednej ze ścian bocznych kąt  $\beta$ . Obliczyć objętość tego prostopadłościanu.
37. Obliczyć długość wysokości ostrosłupa prawidłowego o podstawie trójkątnej, którego krawędź podstawy jest równa  $\sqrt{3}$ , a krawędź boczna ma długość 2.
38. Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu tworzy wycinek koła o promieniu długości  $R = 16$  i kącie środkowym miary  $90^\circ$ . Znaleźć objętość stożka.
39. Promień kuli jest równy przekątnej sześciatu o krawędzi długości  $a$ . Znaleźć stosunek objętości kuli do objętości sześciatu.
40. W kulę o promieniu długości 3 wpisano dwa stożki obrotowe o wspólnej podstawie, z których jeden ma wysokość dwa razy dłuższą niż drugi. Obliczyć objętość bryły złożonej z tych stożków.
41. Wyznaczyć współrzędne punktu A leżącego na osi OZ w równych odległościach od punktów  $B = (3, -2, 1)$  i  $C = (-3, 3, 2)$ .
42. Dane są punkty  $A = (1, 0, -1)$ ,  $B = (2, -3, 0)$ ,  $C = (1, 1, 1)$ . Znaleźć wektor  $\vec{a} = s \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$  i jego długość, gdy  $s$  jest iloczynem skalarnym wektorów  $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{AC}$ .
43. Dane są punkty  $A = (-3, 2, 1)$ ,  $B = (-1, 0, 2)$ ,  $C = (3, 5, -2)$ . Na płaszczyźnie OXY znaleźć taki punkt D, aby wektor  $\overrightarrow{CD}$  był równoległy do wektora  $\overrightarrow{AB}$ . Znaleźć długość wektora  $\overrightarrow{BD}$ .

44. Przekątna prostopadłościanu tworzy z jego podstawą kąt miary  $60^\circ$ . Podstawa tego prostopadłościanu jest kwadratem o przekątnej  $d = 2\sqrt{3}$ . Obliczyć objętość prostopadłościanu.
45. Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 24. Obliczyć długość przekątnej sześcianu.
46. Na stożku obrotowym o promieniu podstawy równym  $r$  i tworzącej długości  $2r$  opisać kulę. Znaleźć pole powierzchni tej kuli.
47. W kulę o promieniu  $R = 4$  wpisano walec o promieniu podstawy  $r = 2$ . Obliczyć objętość walca.
48. Trójkąt o bokach 3, 4, 5 obrócono w przestrzeni wokół jednego z boków. Obliczyć maksymalną objętość tak powstałej bryły.
49. Obliczyć stosunek objętości kuli do objętości walca opisanego na tej kuli.
50. Krawędzie prostopadłościanu mają długości 2 cm, 4 cm i 7 cm. Obliczyć długość najkrótszej łamanej zamkniętej złożonej z krawędzi i przechodzącej przez wszystkie wierzchołki.
51. Wiadomo, że kula  $K_2$  ma promień o 6 większy niż kula  $K_1$ , zaś jej objętość jest 64 razy większa od objętości kuli  $K_1$ . Oblicz stosunek pola powierzchni kuli  $K_2$  do pola powierzchni kuli  $K_1$ .
52. Dane są:  $\vec{AB} = [1, 2, 3]$  i  $\vec{AC} = [3, 2, 1]$ . Obliczyć pole trójkąta ABC.
53. Dany jest punkt  $A = (2, 1, -2)$ . Na prostej określonej równaniami parametrycznymi:  $x = 2t + 3$ ,  $y = -t + 2$ ,  $z = 3t - 1$ , dla  $t \in \mathbb{R}$ , znaleźć punkt B taki, by wektor był prostopadły do osi OX.
54. Wyznaczyć punkty, w których prosta określona równaniami parametrycznymi:  $x = -2 + t$ ,  $y = 2 - 3t$ ,  $z = -1 + t$ , gdzie  $t \in \mathbb{R}$  przebija płaszczyzny układu współrzędnych.
55. Pole ściany bocznej prawidłowego ostrosłupa czworokątnego jest równe polu jego podstawy. Obliczyć sinus kąta, jaki tworzą przeciwległe krawędzie boczne tego ostrosłupa.
56. Dany jest sześcian o krawędzi długości  $a$ . Oblicz objętość kuli stycznej do wszystkich krawędzi tego sześcianu.
57. Obliczyć objętość stożka, którego przekrojem osiowym jest trójkąt równoboczny, jeżeli wiadomo, że objętość kuli wpisanej w ten stożek jest równa  $36\pi \text{ cm}^3$ .
58. Oblicz tangens miary kąta dwuściennego w czworościanie foremnym.
59. Obliczyć stosunek objętości kuli opisanego na walcu do objętości kuli wpisanej w ten walec.
60. Tworzącą stożka widać ze środka kuli wpisanej w ten stożek pod kątem o mierze  $\frac{2\pi}{3}$ . Obliczyć stosunek objętości stożka do objętości tej kuli.
61. Punkty  $X = (2, 3, 1)$ ,  $Y = (3, 3, 2)$ , oraz  $Z = (4, 2, 0)$  są środkami boków trójkąta. Znaleźć współrzędne wierzchołków tego trójkąta.
62. Obliczyć kąt między prostą równoległą do wektora  $[4, -3, 3\sqrt{3}]$  i przechodzącą przez punkt  $(-1, 2, -3)$  a wektorem  $[10, -1, \sqrt{3}]$ .
63. Dany jest ostrosłup prawidłowy sześciokątny ABCDEFS o krawędzi podstawy długości 2. Wysokość ostrosłupa jest równa 2. Obliczyć obwód przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez jego wierzchołek S (nie należący do podstawy), punkt B i środek odcinka EF.
64. Sześcian o krawędzi długości 3 przecięto płaszczyzną zawierającą przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem ostrym miary  $\alpha$ . Obliczyć pole otrzymanego przekroju dla  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  oraz  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .

65. W prawidłowym ostrosłupie  $n$ -kątnym płaszczyzna równoległa do podstawy dzieli krawędzie boczne w stosunku 1: 3 licząc od wierzchołka ostrosłupa. W jakim stosunku płaszczyzna ta dzieli objętość ostrosłupa? ( $n \geq 3$ ).
66. Stożek i walec mają równe tworzące, równe pola powierzchni bocznych i równe objętości. Obliczyć cosinus miary kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy stożka.
67. Z czworościanu foremnego o krawędzi  $a$  odcięto cztery naroża w kształcie przystających do siebie czworościanów foremnych o krawędzi  $\frac{a}{3}$ . Obliczyć promień kuli opisanej na otrzymanym w ten sposób wielościanie.
68. Dwie kule o promieniach równych 1 są styczne zewnętrznie i leżą w kuli o promieniu równym 2. Jaka jest długość promienia kuli mającej dokładnie po jednym punkcie wspólnym z każdą z trzech danych kul?
69. Oblicz długość promienia kuli wpisanej w ostrosłup prawidłowy sześciokątny o wysokości równej 0,5 i krawędzi podstawy długości 4.
70. Obliczyć długość promienia kuli opisanej na ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym o wysokości równej 3 i krawędzi podstawy długości 1.
71. Znaleźć długość promienia kuli opisanej na ostrosłupie prawidłowym trójkątnym o krawędzi podstawy równej 1 i wysokości długości 2.
72. Wyznaczyć wymiary ostrosłupa prawidłowego o podstawie kwadratowej wpisanego w kulę o promieniu  $R = 8$ , mającego największą objętość.
73. Ostrosłup przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy dzielącą wysokość w stosunku 2:3. Obliczyć stosunek objętości powstałych brył.
74. Podstawą ostrosłupa jest czworokąt o obwodzie równym 28 opisany na okręgu o promieniu  $r = 3$ . Kąt nachylenia ścian bocznych do płaszczyzny podstawy ostrosłupa ma miarę  $\alpha = 45^\circ$ . Obliczyć objętość ostrosłupa.
75. Stożek o objętości  $V$  przecięto dwiema płaszczyznami równoległymi do jego podstawy dzielącymi jego wysokość (licząc od wierzchołka stożka) na trzy części w stosunku 1: 2: 3. Znaleźć objętość powstałej w ten sposób części środkowej stożka.
76. Znaleźć objętość czworościanu foremnego opisanego na kuli o promieniu  $r$ .
77. Znaleźć rzut równoległy punktu  $A = (5, 2, 9)$  na płaszczyznę  $OXY$  w kierunku wektora  $\vec{v} = [1, 2, 3]$ .
78. Obliczyć pole powierzchni i objętość wielościanu, którego wierzchołkami są wszystkie środki krawędzi czworościanu foremnego o krawędzi długości  $a$ .
79. Krawędź boczna długości  $k$  trójkątnego prawidłowego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem  $\alpha$ . Obliczyć objętość tego ostrosłupa.
80. W stożek wpisano kulę. Stosunek pola powierzchni tej kuli do pola podstawy stożka jest równy 4 : 3. Obliczyć kąt rozwarcia stożka i stosunek objętości kuli do objętości stożka.
81. Wykazać, że jeżeli punkt  $P$  należy do wnętrza czworościanu foremnego o krawędzi długości  $a$ , to suma jego odległości od wszystkich ścian czworościanu jest stała. Oblicz długość  $d$ .
82. Na czterech wzajemnie stycznych kulach o promieniu  $r$  opisano kulę. Znaleźć promień tej kuli.
83. W prawidłowym ostrosłupie trójkątnym krawędź boczna jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz cosinus kąta pomiędzy dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.
84. Dla jakich długości boków trójkąta równoramiennego o obwodzie  $2p$  bryła powstała w wyniku obrotu tego trójkąta dookoła prostej zawierającej jego podstawę ma maksymalną objętość?

85. W czworościanie ABCD kąty przy wierzchołku D są proste. Wykazać, że kwadrat pola ściany ABC jest równy sumie kwadratów pól pozostałych ścian.
86. Przez jedną krawędź czworościanu foremnego oraz punkt wewnętrzny krawędzi skośnej do niej poprowadzono płaszczyznę. Kąt nachylenia tej skośnej do płaszczyzny przecinającej czworościan ma miarę  $\alpha$ . Wiedząc, że krawędź czworościanu ma długość  $a$ , oblicz pole otrzymanego przekroju.
87. Z czterech kul trzy mają promień  $R$ , czwarta zaś  $r$ . Z tych kul ustawiono na stole piramidę tak, że każda z tych kul jest styczna do trzech pozostałych, przy czym kule jednakowe tworzą jej podstawę. Oblicz największą odległość punktów kuli o promieniu  $r$  od stołu.
88. Wykazać, że stosunek objętości stożka do objętości kuli wpisanej w ten stożek jest równy stosunkowi pola powierzchni całkowitej stożka do pola powierzchni kuli.
89. Sześcian o krawędzi  $a$  wpisano w czworokątny ostrosłup prawidłowy tak, że cztery jego wierzchołki należą do krawędzi bocznych ostrosłupa, zaś cztery pozostałe należą do podstawy ostrosłupa. Ściana boczna nachylona jest do podstawy pod kątem  $\alpha$ . Oblicz objętość ostrosłupa.
90. Tworzącą stożka widać ze środka kuli wpisanej w ten stożek pod kątem o mierze  $\alpha$ . Wyznacz stosunek objętości kuli do objętości stożka.
91. Na czworościanie foremnym opisano walec w ten sposób, że przeciwległe krawędzie czworościanu są średnicami podstaw walca. Wyznacz stosunek objętości kuli opisanej na walcu i kuli wpisanej w czworościan.

## ODPOWIEDZI

1.  $\sqrt{10}$ ;

2.  $x = \frac{2}{3} \vee x = -\frac{2}{3}$ ;

3.  $V = 144$ ;

4.  $P = \frac{a^2 \sqrt{2}}{4}$

5.  $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$  lub  $h = a$

6.  $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$

7. 8

8.  $P_b = \pi \sqrt{5} R^2$

9.  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$

10.  $h = \frac{2R}{3} \sqrt[3]{18}$

11.  $\operatorname{tg} \alpha = 4$  tzn.  $\alpha = \operatorname{arctg} 4$ .

12.  $P_b = 4\sqrt{9\pi + 16}$

13.  $\alpha = \frac{\pi}{3}$

14.  $\alpha = \frac{\pi}{6}$

15. 2

16.  $(3,0,0), (0,-2,0), (0,0,6)$

17.  $V = \frac{\pi \sqrt{2}}{6}$

18.  $\frac{\sqrt{14}}{2}$

19. Środkowa poprowadzona z wierzchołka C ma długość  $\sqrt{53}$

20.  $\cos \gamma = \frac{19}{37}$  tzn.  $\gamma = \arccos \frac{19}{37}$

21.  $V = 3\pi \text{ cm}^3$

22. a)  $\cos x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos \alpha$     b)  $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{ctg} \alpha$

23.  $\cos \gamma = \frac{16}{25}$   $P = \frac{3}{2} \sqrt{41}$

24. 3

25.  $d = 2\sqrt{3}$  m

26. 3

27.  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$

28.  $M = (0, -\frac{1}{6}, 0)$ .

29.  $m = -3 \vee m = -1$

30.  $k = 2\sqrt{6}$

31.  $P = \frac{\sqrt{6}}{4}$

32.  $m = -4$ . Zwroty wektorów nie są zgodne.

33.  $\sqrt{61}$

34.  $P = 6\sqrt{3}(1 + 2\sqrt{2})$

35.  $V = \pi a^3 \sin^2 \alpha$

36.  $V = d^3 \sin \alpha \sin \beta \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}$

37.  $h = \sqrt{3}$

38.  $V = \frac{64\pi}{3} \sqrt{15}$

39.  $4\pi\sqrt{3}$

40.  $V = 16\pi$ .

41.  $A = (0, 0, 4)$ .

42.  $\vec{a} = [0, -1, -2], |\vec{a}| = \sqrt{5}$

43.  $D = (7, 1, 0) \quad |\vec{BD}| = \sqrt{69}$

44.  $V = 36$

45.  $d = 2\sqrt{3}$

46.  $P = \frac{16}{3} \pi r^2$

47.  $V = 16\sqrt{3}\pi$

48.  $V = 16\pi$

49.  $\frac{2}{3}$

50. 30 cm

51. 16

52.  $P = 2\sqrt{6}$

53.  $B = (2, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2})$

54.  $(0, -4, 1), (-\frac{4}{3}, 0, -\frac{1}{3}), (-1, -1, 0)$

55.  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{30}}{17}$

56.  $V = \frac{\pi}{3} a^3 \sqrt{2}$

57.  $V = 81 \pi \text{ cm}^3$

58.  $\text{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$

59.  $2\sqrt{2}$

60.  $\frac{9}{4}$

61.  $A = (3, 2, -1), B = (1, 4, 3), C = (5, 2, 1)$

62.  $\alpha = \frac{\pi}{4}$

63.  $\sqrt{7} + 2\sqrt{2} + \sqrt{13}$

64. Dla  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  przekrój jest trójkątem i  $P = 3\sqrt{3}$ ; dla  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  przekrój jest trapezem i  $P = 6(\sqrt{6} - 1)$

65. Skala podobieństwa  $k=4$ , więc  $V_1 : V_2 = 1: 64$ .

$$66. \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$67. R = \frac{a\sqrt{22}}{12}$$

$$68. \frac{2}{3}$$

$$69. r = 14\sqrt{3} - 24$$

$$70. R = \frac{5}{3}$$

$$71. R = \frac{13}{12}$$

$$72. a = \frac{32}{3}, h = \frac{32}{3}$$

$$73. \frac{8}{117}$$

$$74. V = 42$$

$$75. V_2 = \frac{13}{108}V$$

$$76. V = 8r^3\sqrt{3}$$

$$77. A' = (2, -4, 0)$$

$$78. P = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2, V = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$$

$$79. V = \frac{\sqrt{3}}{4}k^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha$$

$$80. 60^\circ, \frac{4}{9}$$

$$81. d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$82. R = r \left( 1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$$

$$83. \cos \alpha = \frac{7}{15}$$

84. Podstawa trójkąta jest równa  $\frac{1}{2}p$ , a ramię  $\frac{3}{4}p$ .

85. -

$$86. P = \frac{a^2\sqrt{2}}{4\sin \alpha}$$

$$87. R + r + \sqrt{(R+r)^2 - \frac{4}{3}R^2}$$

88. -

$$89. V = \frac{a^3(2 + \operatorname{tg} \alpha)^3}{6\operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$90. -4\operatorname{ctg}^3 \alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha$$

$$91. 27$$