GRANICE I POCHODNE FUNKCJI

1. Znaleźć zbiór wartości funkcji $f(x) = 4x^3 - 12x$ dla $x \in \langle -2;0 \rangle$.
2. Znaleźć wszystkie przedziały dla których funkcja $f(x) = x - \cos x$, gdzie $x \in R$, jest rosnąca.
3. Podać definicję granicy funkcji w punkcie x_0.
4. Obliczyć pochodną funkcji $y = \frac{\sin 2x}{\cos x}$.
5. Wyznaczyć tangens kąta, pod którym przecinają się krzywe $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$ w punkcie $P(-1;1)$.
6. Obliczyć granicę $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{2x}$ i zbadać ciągłość funkcji.
7. Wykazać, że funkcja $f(x) = \frac{|x| \sin x}{x^2 + 1}$ jest nieparzysta.
8. Obliczyć z definicji $f'(x)$ dla $f(x) = \frac{1}{2x}$.
9. Obliczyć $\lim_{x \to 2} \left(4 + \frac{4 - x^2}{x - 2} \right)$.
10. Wyznaczyć kąty, pod którymi przecinają się krzywe $y = x^2$ i $y^2 = x$.
11. Znaleźć asymptoty krzywej $y = \frac{x - 2}{x^2 - 4}$.
12. Zbadać monotoniczność funkcji $f(x) = x\sqrt{x - 4}$. Podać najmniejszą wartość jaka przyjmuje ta funkcja.
13. Rozwiązać równanie $f(2x) = f'(x)$, gdy $f(x) = \sin^2 x$.
14. Podać definicję pochodnej funkcji w punkcie, a następnie korzystając z tej definicji obliczyć $f'(0)$, gdy $f(x) = \sqrt{4 + x + x^2}$.
15. Zbadać monotoniczność funkcji $f(x) = \frac{1 - 2x^2 - x^4}{x}$.
16. Podać definicję funkcji ciągłej w punkcie. Zbadać ciągłość funkcji $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x \ dla \ x < 0 \\ 1 - x \ dla \ x > 0 \end{cases}$.
17. Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji $y = x(32 + x^3)$ w przedziale $\langle -3;1 \rangle$.
18. Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $y = 3\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right)$ w punkcie o odciętej $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
19. Znaleźć taką dodatnią liczbę *a*, aby proste styczne do paraboli o równaniu $y = a - x^2$ poprowadzone w punktach przecięcia paraboli z osią OX, były prostopadłe.

20. Wyznaczyć wartość a tak, by funkcja $y=(ax-3)\sqrt{x}$ osiągała ekstremum dla $x=1$. Zbadać czy jest to maksimum czy minimum.

21. Wyznaczyć dziedzinę i znaleźć ekstremum funkcji $f(t)=t+\frac{5}{t}$.

22. Dla jakiej wartości parametru a styczna do krzywej o równaniu $y=\frac{1}{x+a}$ poprowadzona w punkcie $x_0=\frac{1}{2}$ jest równoległa do prostej $4x+9y=0$?

23. Dla jakiej wartości a funkcja $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 5x}{x} & dla \quad x\neq 0\\ a \quad dla \quad x=0\end{cases}$ jest ciągła dla $x=0$?

24. Wyprowadzić wzór na pochodną funkcji w dowolnym punkcie: $a)\, f(x)=x^3 \quad b)\, f(x)=x^4$.

25. Obliczyć pole trójkąta ograniczonego styczną do krzywej $y=\cos x$ w punkcie $M\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ oraz osiami układu OXY.

26. Na okręgu o promieniu długości r należy opisać trapez, którego jeden z kątów ma miarę łukową α. Jakie powinny być miary pozostałych trzech kątów, aby pole trapezu było najmniejsze? Obliczyć to najmniejsze pole.

27. Znaleźć ekstrema funkcji $y=x^2|x+2|$.

28. Zbadać monotoniczność funkcji $f(x)=x^4-\frac{1}{x}+5$ w przedziale $(0;\infty)$.

29. Wykazać, że prosta $y=2$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji $y=\frac{2x^2+3x}{x^2-1}$.

30. Obliczyć $f'(0)$ jeżeli $f(x)=(x^2+1)(1-3x)$.

31. Pod jakim kątem wykres funkcji $y=\sin\sqrt{3}x$ przecina oś OX w punkcie $x_0=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$?

32. Wyznaczyć punkt, w którym funkcja określona wzorem $f(x)=2x^3-3x^2-12x+13$ ma maksimum lokalne.

33. Wykazać, że funkcja $f(x)=3x-x^2$ jest rosnąca w przedziale $(-1;1)$.

34. Podać wzór funkcji $f(x)$ takiej, że $f'(x)=x$ i $f(0)=1$.

35. Obliczyć pochodną funkcji $y=x\cos^3 x$ w punkcie $x_0=\pi$.

36. Dla jakich wartości parametru k funkcja $f(x)=x^3-x^2+kx$ nie ma ekstremum lokalnego?

37. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x)=\frac{1}{x^2-2x+2}$ w przedziale $\langle -2;2\rangle$.

38. Znaleźć ekstrema funkcji $f(x)=(x+3)^2(x+8)^3$ dla $x\in R$. Ile pierwiastków ma równanie $f(x)=108$?

39. Obliczyć granicę:

a) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{x-\frac{1}{2}}{x-\sqrt{2x^3+2x-1}}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 3x}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\cos 2x}$

e) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x}{x-1}$

f) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x}{x-1}$

g) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-\sin x}{x}$

h) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+4x-12}{x^3-8}$

i) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

j) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg2|x|}{3x}$

k) $\lim\limits_{x\to0}\log_2\dfrac{x^2}{1-\cos 4x}$

l) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$

ł) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$

m) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{8x^3+3}}$

n) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$

o) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3^{\frac{1}{x}}}{4++5^{\frac{1}{x}}}$

p) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\log\left(10x^2+1\right)-2\log x\right]$

r) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{4}{1-x^3}\right)$

s) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin(x-2)}{2x-x^2}$

t) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x+\sin x}{x}$

u) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\cos 2x}$

w) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{1-\cos 2x}$

x) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$

40. W oparciu o definicję pochodnej obliczyć:

a) $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ *dla* $f(x)=\cos^2 x$

b) $f'(3)$ *dla* $f(x)=\sqrt{2x+3}$

c) $f'(1)$ *dla* $f(x)=\sqrt{5-x}$

d) $f'(2)$ *dla* $f(x)=\frac{1}{2x}$

e) $f'(x_0)$ *dla* $f(x)=\cos 3x$

f) $f'(4)$ jeżeli $f(x)=\sqrt{1+2x}$

41. Obliczyć:

a) $f'(\sqrt{3})$ jeżeli $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$

b) $f'(0)$ *i* $f'(\sqrt{2})$ jeżeli $f(x)=\frac{x^5+1}{x+1}$

c) $f'\left(\frac{3}{8}\pi\right)$ jeżeli $f(x)=\cos 2x$

d) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ jeżeli $f(x)=\sqrt{2\cos x+9}$

e) $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ gdzie $f(x)=\sqrt{\cos 2x}$.

f) $f'(4)$ jeżeli $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

g) $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ jeżeli $f(x)=\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt{x}$

h) $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ jeżeli $f(x)=\sqrt{1+\cos 2x}$

i) $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ jeżeli $f(x)=x\sin^2 3x$

j) $f'(1)$ jeżeli $f(x)=x\sqrt{x^2+3}+\sin^2 3\pi x$

42. Dla jakiej wartości parametru a funkcja $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\sin x}{\sqrt{x^2+4}-2} & dla \quad x\neq 0 \\ a & dla \quad x=0 \end{cases}$ jest ciągła w punkcie $x=0$?

43. Który z punktów paraboli $y=x^2$ jest położony najbliżej prostej $y=2x-2$?

44. Podać definicję asymptot pionowych. Wyznaczyć asymptoty pionowe funkcji $y = \frac{14}{x\left(2^x - 4\right)}$.
45. Dłuższa podstawa trapezu równoramiennego jest równa 13cm, a jego obwód 28cm. Wyrazić pole trapezu jako funkcję długości jego ramienia. Znaleźć dziedzinę i zbiór wartości funkcji.
46. Dana jest funkcja $f(x) = \cos^2 3x + \frac{3}{2}x - \log 5 + 3$. Rozwiązać równanie $f'\left(\frac{1}{3}x\right) = 0$.
47. Funkcje *f* i *g* są określone wzorami $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$ i $g(x) = \frac{1}{x}$. Obliczyć $h'(1)$, gdzie $h(x) = f(g(x))$.
48. Obliczyć granice jednostronne funkcji *f* w punkcie $x_0 = 2$ jeśli $f(x) = \frac{|2-x|}{x-2}$.
49. Obliczyć $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, jeżeli $f(x) = \sqrt{\sin 3x}$.
50. Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji $y = \frac{x^{2004}}{2004} - \frac{x^{2003}}{2003} + \frac{x^2}{2} - x - 2003$.
51. W jakich punktach krzywej $y = x^3 - 3x$ styczne do tej krzywej są prostopadłe do prostej $x + 6y + 1 = 0$. Napisać równania tych stycznych.
52. Znaleźć *x*, dla których $f'(x) + 4f(x) = 0$, jeśli $f(x) = \cos^2 2x$.
53. Znaleźć funkcję *f*, jeżeli $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$ oraz $f(0) = 5$.
54. Napisać równanie stycznej do paraboli $y = \frac{1}{4}x^2$, tworzącej z osią OX kąt $45°$.
55. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = 4\sqrt[3]{8 + \sin 3x}$ w punkcie $x_0 = 0$.
56. Wykazać, że funkcja $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + \cos x$ jest rosnąca w całej swojej dziedzinie.
57. Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x}$ przedziale $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$.
58. Dla jakiej wartości parametru *a* funkcja $f(x) = ax + \cos^2 x$ jest malejąca w zbiorze liczb rzeczywistych?
59. Pokazać, że żadna styczna do wykresu funkcji $f(x) = \sin x - 3\cos x$ nie jest równoległa do prostej o równaniu $4x - y + 5 = 0$.
60. Znaleźć współrzędne punktów, w których styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2$, $x \in R$ jest równoległa do osi OX.
61. Sprawdzić, czy $x = \frac{\pi}{6}$ jest rozwiązaniem równania $\left(tg^2 2x\right)' = 16\sqrt{3}$
62. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^4 - x + 1$ równoległej do prostej $y = 3x$.

63. Zbadać ciągłość funkcji $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-1}{|x-1|} & dla \quad x<1 \\ x^2-3 & dla \quad x\geq 1 \end{cases}$ w punkcie $x=1$.

64. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x)=x+ctgx$ w przedziale $\left\langle \frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\rangle$.

65. Wyznaczyć asymptoty wykresu funkcji $y=\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$.

66. Wykazać, że funkcja $y=\sqrt{x^3-1}$ jest różnowartościowa i wyznaczyć funkcję do niej odwrotną.

67. Wyznaczyć pole trójkąta ograniczonego styczną do wykresu funkcji $f(x)=9-x^2$ w punkcie $x=2$ oraz osiami układu współrzędnych.

68. Wykazać, że równanie $x^3+3x-7=0$ ma tylko jeden pierwiastek i sprawdzić, że leży on w przedziale $(1;2)$.

69. Czy dla $x=2$ funkcja $f(x)=|x-2|(x^2+x+1)$ ma pochodną? Czy w punkcie tym osiąga ekstremum?

70. Znaleźć w przedziale $\langle 0;\pi\rangle$ wszystkie x spełniające nierówność $2f(2x)<3f'(x)$, gdzie $f(x)=\cos^2 x$.

71. W jakim przedziale funkcja $f(x)=x\sqrt{2-x},\quad x\in(-\infty;2\rangle$ jest funkcją malejącą.

72. Czy funkcja $f(x)=\frac{1}{3}x^3+3x^2+9x,\quad x\in R$ ma ekstremum w punkcie o odciętej $x_0=-3$?

73. Znaleźć ekstrema funkcji $y=x^2|x-2|$.

74. Korzystając z definicji pochodnej sprawdzić czy istnieje $f'(-1)$ jeśli $f(x)=|x+1|$.

75. Dana jest funkcja $f(x)=\cos^2 x$. Narysować wykres funkcji $y=f'(x)$ w przedziale $\langle 0;\pi\rangle$.

76. Wyznaczyć zbiór wartości funkcji $y=x\sqrt{4-x^2}$.

77. Znaleźć te styczne do wykresu funkcji $y=x^3-3x^2+2x$, które są równoległe do prostej $2x-y+1=0$.

78. Napisać równanie stycznej do krzywej $y=\sqrt{x}$ i prostopadłej do prostej $4x+y=0$.

79. Obliczyć $f'(0)$ jeżeli $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$.

80. Wyznaczyć przedziały, w których funkcja $f(x)=2\cos^2 x-x$ jest rosnąca.

81. Wyznaczyć asymptoty krzywej $f(x)=\sqrt{1+x^2}-2x$.

82. Dany jest wielomian $W(x)=x^2+px+4$. Dla jakich wartości parametru *p* nierówność $W(x)>W'(x)$ jest spełniona dla każdego $x\in R$.

83. Dla jakich wartości parametru $a\in R$ funkcja $f(x)=\frac{ax^2-4}{x+2a}$ nie ma ekstremum?

84. Dla jakiej wartości x styczna do krzywej $y=x^3-3x$ jest prostopadła do prostej $2x-6y+1=0$?

85. Liczbę dodatnią a rozłożyć na iloczyn dwóch dodatnich czynników tak, aby suma ich odwrotności była najmniejsza.
87. W półkole o promieniu R wpisano prostokąt o największym polu. Obliczyć cosinus kąta rozwartego miedzy przekątnymi tego prostokąta.
88. Dla jakiej wartości parametru m funkcja $f(x)=\frac{1}{3}x^3+mx^2+4x+1$ jest rosnąca w całej swojej dziedzinie?
89. Dana jest parabola $y=x^2$ i prosta $y=x-1$. Dwa wierzchołki A i B trójkąta ABC leżą na danej prostej. W którym punkcie paraboli należy umieścić wierzchołek C, aby pole trójkąta było najmniejsze?
90. Zbadać jaką najmniejszą wartość może osiągnąć suma $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$,

jeżeli $x+y=1 \wedge x>0 \wedge y>0$.

91. Wyznaczyć ekstrema funkcji $y=x^2\sqrt{4-x^2}$ i naszkicować jej wykres.
92. Obliczyć tangens kąta pod którym przecinają się wykresy funkcji $f(x)=2x$ i $g(x)=tgx$ w początku układu współrzędnych.
93. Funkcja $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x-5}$ ma dla $x=3$ maksimum równe 1. Wyznaczyć pozostałe ekstrema tej funkcji.
94. Dla jakiej wartości parametru α funkcja $f(x)=2x^3+3x^2+\cos 2\alpha+\sin\alpha$ gdzie $x\in R$ osiąga minimum o wartości –1?
95. Funkcje f i g są określone wzorami $f(x)=(\log_a b+\log_a a)x+3+\frac{1}{x}$ i $g(x)=\dfrac{2x^4+bx^3+a}{x^3+2}$.

Dla jakich wartości parametrów a i b funkcje f i g maja te same asymptoty ukośne?

96. W jakim punkcie przedziału <-2;1> styczna do wykresu funkcji $f(x)=x^4+6x^3+2x$ ma największy współczynnik kierunkowy?
97. Wyznaczyć asymptoty wykresu funkcji $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}-x}{x}$.
98. Uzasadnić, że równanie $x^3+x+7=0$ w zbiorze liczb rzeczywistych ma dokładnie jedno rozwiązanie. Wyznaczyć przedział o długości nie przekraczającej $\frac{1}{2}$, do którego należy to rozwiązanie.
99. Wyznaczyć wartość parametru a tak, aby funkcja $f(x)=\begin{cases} x^2+ax & dla\ x\geq 1 \\ \dfrac{\sin(x-1)}{|x-1|} & dla\ x<1 \end{cases}$

była ciągła w $x_0=1$.

100. Wyznaczyć takie $\alpha\in(0;\frac{\pi}{2})$ aby prosta o równaniu $y=-2x+4$ była styczna do wykresu funkcji $f(x)=-x^2+2x+\sqrt{3}-tg2\alpha$.
101. Dla jakiej wartości parametru a funkcja $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+5x-3$ ma ekstremum lokalne w punkcie $x=1$. Określić rodzaj ekstremum.
102. Jaki kat z dodatnią półosią OX tworzy styczna do krzywej $y=R\sqrt{R^2-x^2}$ w punkcie odciętej $x_0=\frac{R}{\sqrt{2}}$?
103. Ile różnych stycznych o współczynniku kierunkowym 12 można poprowadzić do wykresu funkcji $f(x)=2x^3-3x^2+5$, gdy $x\in R$.
104. Dla jakich wartości parametru a funkcja $f(x)=(|x|-a)^3-3|x|$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0=0$?
105. Udowodnij, że wykres funkcji $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$ nie ma punktów przegięcia.

106. Wyznaczyć dziedzinę funkcji y=arcsin($\log_{\frac{1}{2}}$ x).

107. Znaleźć ekstremum funkcji f(x)=1-$\sqrt[3]{(3-x)^2}$.

108. Dla jakich m suma kwadratów pierwiastków rzeczywistych równania x^2+mx-m+3=0 osiąga najmniejszą wartość.

109. Uprościć wyrażenie y=$\sqrt{x^2+10x+25}+\sqrt{x^2}$, x∈ <-6;1> i sporządzić wykres pochodnej y'(x).

110. Dla jakich wartości parametru x granica $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2t}{\sin(t\sqrt{1+|x|})}$ ma największą wartość?

111. Udowodnić, że $f^{(n)}(x)=(-1)^n\times\dfrac{n!}{x^{n+1}}$ jeśli f(x)=$\frac{1}{x}$ i x≠ 0.

112. Napisać równanie normalnej do krzywej y=$\frac{2}{3}$cos(3x-$\frac{\Pi}{4}$) w punkcie o odciętej x=$\frac{\Pi}{3}$.

113. Znaleźć kąt pod jakim przecinają się krzywe $x^2+y^2=5$ oraz xy=2.

114. Rozwiązać równanie 6f(x)-f'(x) gdy f(x)=$\sin^2$3x.

115. Suma dwóch liczb dodatnich jest równa 12. Dobrać te liczby tak, aby suma ich odwrotności była najmniejsza.

116. Zbadać iloczyn różnych pierwiastków rzeczywistych równania $(m+1)x^2+2mx+m^2=0$ jako funkcję parametru m i narysować wykres tej funkcji.
Wskazówka: f(m)=$\frac{m^2}{m+1}$ ∧ m∈ (-∞;0>

117. Dane są krzywe f(x)=cos2α i g(x)=sinx dla x∈ (0;$\frac{\Pi}{2}$). Znaleźć sinus kąta, pod jakim przecinają się te krzywe.

118. W okrąg o promieniu $2\sqrt{2}$ wpisano prostokąt o największym polu. Znaleźć wymiary tego prostokąta i jego pole.

119. Narysować wykres funkcji y=$\left|\dfrac{x^2-1}{x}\right|$. Podać przedziały monotoniczności i ekstrema.

120. Wykazać, że ($\sqrt{x}$)'=$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ dla x>0, a następnie obliczyć f'($\frac{\Pi}{6}$), jeżeli f(x)=$\sqrt{\sin 5x}$.

121. Zbadać funkcję f(x)=$\dfrac{4}{x^2-3x-4}$. Znaleźć i wykreślić zależność liczby pierwiastków równania f(x)=m od parametru m∈ R.
Wskazówka: Po zbadaniu funkcji otrzymamy: k – liczba pierwiastków równania f(x)=m $k(m)=\begin{cases}2\ gdy\ m\in(-\infty;-\frac{16}{25})\cup(0;\infty)\\ 1\ gdy\qquad\qquad m=\frac{16}{25}\\ 0\ gdy\qquad\qquad m\in(-\frac{16}{25};0>\end{cases}$

122. Dane są punkty A9-1;0) B(3;-2). Punkt C należy do wykresu funkcji y=cosx dla x∈ <$\frac{\Pi}{2}$;Π>. Wyznaczyć punkt C tak, aby pole trójkąta ABC było najmniejsze.

123. Wśród prostokątów, których dwa wierzchołki leżą na prostej y=0, a dwa pozostałe na półokręgu y=$\sqrt{2x-x^2}$, szukamy takiego, który ma największe pole powierzchni. Wyznaczyć współrzędne środka symetrii wyznaczonego prostokąta oraz tangens kąta rozwartego między przekątnymi.

124. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji f określonej wzorem $f(x)\begin{cases}|x-1| & dla\ x\in<0;2>\\ x^2-x+1 & dla\ x\in(-\infty;0)\cup(2;\infty)\end{cases}$

125. Dane jest równanie $kx^2+x+k=0$. Niech f będzie funkcją przyporządkowującą liczbie k mniejszy pierwiastek tego równania. Obliczyć $\lim_{k\to\frac{1}{2}^-} f(k)$.

126. Funkcja f określona wzorem $f(x)=\frac{2\sin^2(x-1)}{3-3\cos(x-1)}$ jest ciągła w punkcie $x_0=1$. Obliczyć f(1).

127. Wykazać, że w dziedzinie funkcji $f(x)=\arcsin(|x-2|-2)$ zawiera się zbiór (3;4>.

128. Pod jakim kątem przecinają się krzywe o równaniach y=sinx i y=cosx?

129. Styczna do krzywej $y=e^x$ w punkcie x_0 jest równoległa do prostej o równaniu 2x-2y-1=0. Wyznaczyć równanie tej stycznej.

130. Z kawałka drutu o długości 12cm zbudowano prostokąt o największym polu. Obliczyć długość przekątnej tego prostokąta.

131. Sprawdzić, że funkcja $f(x)=\frac{3-x^2}{2-x}$ posiada ekstremum, oraz że jest wypukła w pewnym zbiorze A i wklęsła w pewnym zbiorze B.

132. Wykazać, że funkcja $f(x)=\frac{4-x^2}{x^2}$ jest wypukła w swojej dziedzinie.

133. Funkcja określona wzorem $f(x)=-x^4+kx^2+k$ ma w trzech różnych punktach ekstremum. Wyznaczyć k.

134. Dla jakiej wartości parametru k funkcja $f(x)=-2x^3+kx^2-1$ w punkcie $x_0=1$ ma punkt przegięcia.

135. W półokrąg o promieniu r wpisano taki prostokąt ABCD, że bok AB o długości 2x leży na średnicy półokręgu. Niech P(x) oznacza pole powierzchni prostokąta ABCD. Wyznaczyć x tak, aby pole prostokąta ABCD było maksymalne.

136. Dana jest funkcja $f:\langle -\frac{\Pi}{2};\frac{\Pi}{2}\rangle \to R$, $f(x)=\cos^2x-\frac{1}{2}\cos x$. Sprawdzić, że funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie x=0.

137. Udowodnić, że funkcja $f(x)=\frac{a+x}{x-1}$, gdzie $a\neq -1$ spełnia warunek $f'(4)<0$ dla każdego a>-1.

138. Niech p(x) oznacza pole powierzchni trójkąta ABC takiego, że A(0;-2); $B(\frac{\Pi}{2};-2)$; C(x;sinx), gdzie $x\in R$. Obliczyć $\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{x}$.

139. Udowodnij, że istnieje styczna do wykresu funkcji $f(x)=\sqrt{x(1-x)}$ równoległa do osi OX.

140. Dana jest funkcja $f(x)=x-\frac{1}{x}$ dla x>0. Udowodnij, że $f'(n)>1$ dla każdego $n\in N$.

ODPOWIEDZI

1. $f(x) \in \langle -8;8 \rangle$.
2. $x \in \left(-\frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{7\pi}{12} + k\pi \right) \wedge k \in C$.
3. -
4. $y' = 2\cos x$ dla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
5. $tg\alpha = \frac{3}{4}$
6. $\frac{3}{2}$; funkcja nie jest ciągła w punkcie $x = 0$.
7. –
8. $f'(x) = -\frac{1}{2x^2}$.
9. 0.
10. $\alpha_1 = 90°, \quad tg\alpha_2 = \frac{3}{4}$.
11. $y = 0, \quad x = -2$.
12. Funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle 4; \infty)$, wartość najmniejsza jest równa 0.
13. $x = \frac{k\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \wedge k \in C$.
14. $f'(0) = \frac{1}{4}$.
15. Funkcja jest malejąca w przedziałach $(-\infty;0); (0;\infty)$.
16. Funkcja jest ciągła w zbiorze $(-\infty;0) \cup (0;\infty)$.
17. $y_{\max} = y(1) = 33, \quad y_{\min} = y(-2) = -48$.
18. y = $\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}(\pi + 2)$.
19. $a = \frac{1}{4}$.
20. $a = 1, \quad y_{\min} = y(1) = -2$.
21. $t \in R \setminus \{0\}; \ f_{\max} = f(-\sqrt{5}) = -2\sqrt{5}$.
22. $a = 1 \vee a = -2$.
23. $a = 5$.
24. -
25. $P = \frac{\pi^2}{8}$.
26. $P = 2r^2\left(\frac{1}{\sin\alpha} + 1\right)$.
27. $f_{\min} = f(-2) = f(0) = 0$.
28. Funkcja jest rosnąca w tym przedziale.

30. $f'(0) = -3.$

31. $\alpha = \frac{2}{3}\pi$.

32. $y_{\max} = y(-1) = 20$.

34. $f(x) = \frac{x^2}{2} + 1$.

35. $f'(\pi) = 1$.

36. $k \geq \frac{1}{3}$.

37. $y_{MAX} = 1, \quad y_{MIN} = \frac{1}{10}$.

38. $f_{\max} = f(-5) = 108, \quad f_{\min} = f(-3) = 0$, równanie ma dwa pierwiastki.

39.

a) $-\frac{1}{56}$.

b) $-\frac{2}{5}$.

c) 9

d) $-\frac{1}{2}$

e) ∞..

f) $-\infty$.

g) 0.

h) $\frac{2}{3.}$

i) 4.

j) Granica nie istnieje.

k) -3.

l) $\frac{1}{2}$.

ł) $-\infty$.

m) $-\frac{1}{2}$.

n) 1.

o) 0.

p) 1.

r) Granica nie istnieje.

s) $-\frac{1}{2}$.

t) 4.

u) $\frac{1}{2}$.

w) $\frac{\pi^2}{8}$.

x) $\frac{2}{3}$.

40.

a) $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$.

b) $f'(3)=\frac{1}{3}$.

c) $f'(1)=-\frac{1}{4}$.

d) $f'(2)=-\frac{1}{8}$.

f) $f'(4)=\frac{1}{3}$.

41.

a) $f'(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{8}$.

b) $f'(0)=-1,\quad f'(\sqrt{2})=10\sqrt{2}-7$.

c) $f'\left(\frac{3}{8}\pi\right)=-\sqrt{2}$.

d) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{3}$.

e) $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}$

f) $f'(4)=-\frac{1}{16}$.

g) $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt[6]{108}}{3}$.

h) $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$.

i) $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$.

j) $f'(1)=\frac{5}{2}$.

42. $a=4$.

43. $P(1;1)$.

44. $x=0;\quad x=2$.

45. $P(x)=(14-x)\sqrt{2x-1};\quad x\in\left(1;\frac{15}{2}\right);\quad P(x)\in(0;27)$.

46. $x=\frac{\pi}{12}+k\pi;\quad x=\frac{5\pi}{12}+k\pi\quad\wedge k\in C$.

47. $h'(1)=-3$.

48. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-1;\quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1$.

49. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$.

50. Funkcja rosnąca w przedziale $(1;\infty)$, a malejąca w przedziale $(-\infty;1)$.

51. $\left(-\sqrt{3};0\right)$, $\left(\sqrt{3};0\right)$; $y=6x+6\sqrt{3}$, $y=6x-6\sqrt{3}$.

52. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2} \wedge k\in C$.

53. $f(x)=x^3-x^2+x+5$.

54. $y=x-1$.

55. $y=x+8$.

57. Wartość najmniejsza to $\frac{\sqrt{2}}{2}$, wartość największa to 1.

58. $a\in(-\infty;-1)$.

59. -

60. $(0;0)$; $(2;-4)$.

61. Tak.

62. $y=3x-2$.

63. Funkcja jest ciągła w punkcie $x=1$.

64. $\frac{3\pi-4}{4}$ - wartość najmniejsza, $\frac{\pi+4}{4}$ - wartość największa.

65. $y=-1$ - asymptota pozioma lewostronna, $y=1$ - asymptota pozioma prawostronna, $x=0$ - asymptota pionowa.

66. $y=\sqrt[3]{x^2+1}$.

67. $P=\frac{169}{8}$.

68. –

69. $f'(2)$ nie istnieje; $f_{\min}=f(2)=0$.

70. $x\in\left(\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right)$.

71. $\left(\frac{4}{3};2\right)$.

72. Nie.

73. $f_{\max}=f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{32}{27}$, $f_{\min}=f(0)=f(2)=0$.

74. Nie istnieje.

75. -

76. $y\in\langle -2;2\rangle$.

77. $y=2x$, $y=2x-4$

78. $y=\frac{1}{4}x+1$..

79. $f'(0)=-120$

80. $\left\langle k\pi-\frac{5\pi}{12};k\pi-\frac{\pi}{12}\right\rangle$

81. $y=-x$ - asymptota ukośna prawostronna; $y=-3x$ - asymptota ukośna lewostronna..

82. $p \in \left(-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$

83. $a \in (0;1)$

84. $x=0.$

85. $a=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$.

86. -

87. $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$

88. $m\in \langle -2;2\rangle$

89. $C(\frac{1}{2};\frac{1}{4})$

90. 4

91. $y_{max}=y(-2\sqrt{\frac{2}{3}})=y(2\sqrt{\frac{2}{3}})=\frac{16\sqrt{3}}{9}$

92. $tg\alpha=\frac{1}{3}$

93. $f_{min}=f(7)=9$

94. $\alpha=-\frac{\Pi}{6}+2k\Pi \vee \alpha=\frac{7\Pi}{6}+2k\Pi \wedge k\in C$

95. a=b=3

96. x=-2

97. y=-2 asymptota pozioma lewostronna, y=0 asymptota pozioma prawostronna.

98. $x\in(-2;-\frac{3}{2})$

99. a=-2

100. $\alpha=\frac{\Pi}{6}$

101. $f_{max}=f(1)=-\frac{2}{3}$ dla a=3

102. 135^o

103. Dwie

104. $a=1 \vee a=-1$

105. –

106. $x\in \langle \frac{1}{2};2\rangle$

107. $y_{max}(3)=1$

108. m=2

109. –

110. x=0

111. –

112. $x-\sqrt{2}y-\frac{\Pi+2}{3}=0$

113. $tg\alpha=\frac{1}{3}$

114. $x=k\frac{\Pi}{3} \vee x=\frac{\Pi}{12}+k\frac{\Pi}{3} \wedge k\in C$

115. 6 i 6

116. –

117. $tg\alpha=3\sqrt{3}$ więc $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{21}}{14}$

118. $x=4 \wedge y=4 \wedge P=16$

119. f malejąca w przedziałach $(-\infty;-1)$; $(0,1)$, f rosnąca w przedziałach $(-1;0)$; $(1;\infty)$; $y_{min}=f(-1)=f(1)=0$

120. $f'(\frac{\Pi}{6})=\frac{5\sqrt{6}}{4}$

121. –
122. P=|1+x+2cosx|, więc dla $x \in <\frac{\Pi}{2}; \Pi>$ mamy P=1+x+2cosx, P_{min} jest dla $x=\frac{5\Pi}{6}$,
zatem $C(\frac{5\Pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$
123. Pole prostokąta $P(x)=(2-2x)\sqrt{2x-x^2}$, $x \in (0;1)$, dla $x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ pole ma wartość największą, środek symetrii $S(1; \frac{\sqrt{2}}{4})$, $tg\alpha=-\frac{4}{3}$
124. Funkcja jest ciągła w zbiorze $R\setminus\{2\}$. Funkcja jest różniczkowalna w przedziałach $(-\infty;0)$; $(1,2)$; $(2;\infty)$.
125. –1
126. $f(1)=\frac{4}{3}$
127. –
128. $arctg(2\sqrt{2})$
129. x-y+1=0
130. $3\sqrt{2}$
131. –
132. –
133. $k \in (0;\infty)$
134. k=6
135. $x=\frac{\sqrt{2}}{2}r$
136. –
137. –
138. 0
139. –
140. -