

GEOMETRIA ANALITYCZNA

1. Wektory \vec{a} i \vec{b} są prostopadłe oraz $|\vec{a}| = 2$ i $|\vec{b}| = 3$. Obliczyć długość wektora $\vec{a} - \vec{b}$.
2. Dany jest wektor $\vec{a} = [1; 2]$. Znaleźć współrzędne wektora \vec{b} prostopadłego do wektora \vec{a} , jeżeli $|\vec{b}| = 3\sqrt{5}$.
3. Dane są wektory $\vec{w} = [3; 7]$, $\vec{u} = [2; 3]$ i $\vec{v} = [-1; 1]$. Wyznaczyć liczby a i b tak, by wektor $\vec{w} + a\vec{u} + b\vec{v}$ był wektorem zerowym.
4. Obliczyć długość wektora $2\vec{AC} - 3\vec{BC}$, jeżeli A(2; 1), B(0; 2) i C(-1; 4).
5. Dane są punkty A(1; 2) i B(2; 4). Znaleźć punkt C spełniający warunek $\vec{AC} = 2\vec{AB}$.
6. Niech P będzie środkiem ciężkości trójkąta równobocznego ABC. Wyznaczyć wektory \vec{AP} i \vec{BP} w zależności od wektorów \vec{AB} i \vec{AC} .
7. Obliczyć miarę kąta między wektorami \vec{a} i \vec{b} , jeżeli wiadomo, że wektory $\vec{u} = -\vec{a} + 4\vec{b}$ i $\vec{v} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ są prostopadłe oraz $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$.
8. Dla jakich wartości wektory $\vec{a} = [1; 0]$ i $\vec{b} = [1; x]$ tworzą kąt 60° .
9. Obliczyć długości przekątnych równoległoboku zbudowanego na wektorach \vec{a} i \vec{b} , jeżeli $\vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = 3\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{m} \perp \vec{n}$, $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$.
10. Obliczyć miarę kąta między wektorami $\vec{a} = [\sqrt{3}; 1]$ i $\vec{b} = [-\sqrt{3}; 1]$, a następnie długości przekątnych równoległoboku wyznaczonych przez ten kąt.
11. Znaleźć współrzędne wektora \vec{x} równoległego do wektora $\vec{u} = [2; 3]$, jeżeli iloczyn skalarny wektorów \vec{x} i $\vec{v} = [-1; 1]$ jest równy 5.
12. Obliczyć $|\vec{a} - \vec{b}|$, jeżeli $|\vec{a} + \vec{b}| = 5$ i $|\vec{a}| = 3$ i $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$.
13. Dany jest romb ABCD o bokach długości 1 i kącie 60° przy wierzchołku A. Obliczyć iloczyn skalarny wektorów \vec{AM} i \vec{AN} , jeżeli M i N są odpowiednio środkami boków BC i CD.
14. Wyznaczyć wartości $x \in (0; \pi)$ dla których wektory $\vec{a} = [\sqrt{3}; -1]$ i $\vec{b} = [-2\sin x; 1]$ są równoległe.
15. Wektory \vec{a} i \vec{b} tworzą ze sobą kąt $\alpha = \frac{\pi}{3}$, przy czym $|\vec{a}| = 3$ i $|\vec{b}| = 5$. Obliczyć $|\vec{a} + \vec{b}|$ oraz $|\vec{a} - \vec{b}|$.
16. Znaleźć długość rzutu dwusiecznej kąta a trójkąta o wierzchołkach A(2; 0), B(6; 6), C(1; -4) na bok AB.
17. Dane są wektory $\vec{a} = [1; 3]$ i $\vec{b} = [-2; 1]$. Znaleźć wektor \vec{x} prostopadły do wektora \vec{a} i taki, że $\vec{b} \cdot \vec{x} = 7$.
18. Znaleźć kąt między przekątnymi równoległoboku napiętego na wektorach $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$, gdzie \vec{i} , \vec{j} są wersorami osi układu XOY.
19. Dane są wierzchołki A(6; -1), B(5; 1), C(1; 2), D(2; -4) czworokąta. Wykazać, że AC i BD są prostopadłe.
20. Wykazać, że trójkąt o wierzchołkach A(1; 0), B(1; 3), C(4; 3) jest równoramiennym trójkątem prostokątnym.
21. Dane są trzy wierzchołki A(4; 2), B(3; 6), C(-1; 4) równoległoboku ABCD. Obliczyć kąt między wektorami \vec{AK} i \vec{AL} , gdzie K i L są środkami odcinków BC i CD.

22. Dane są wektory $\vec{a} = [-1; 3]$, $\vec{b} = [1; 1]$, $\vec{c} = [-5; 3]$. Dobrać $r \in \mathbb{R}$ i $s \in \mathbb{R}$ takie, aby wektory $\vec{CA} = r\vec{a}$, $\vec{AB} = s\vec{b}$ i $\vec{BC} = \vec{c}$ tworzyły trójkąt ABC.
23. Znaleźć wektor \vec{a} prostopadły do wektora $\vec{b} = [-2; 3]$ o długości $|\vec{a}| = 6$.
24. Znaleźć długość wektora $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, wiedząc że $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 1$ oraz kąt pomiędzy \vec{p} i \vec{q} wynosi $\frac{\pi}{4}$.
25. Dla jakiej wartości parametru k wektory $\vec{a} = [1-k; 2]$ i $\vec{b} = [-3; 4]$ są równoległe.
26. Wektory \vec{p} i \vec{q} są prostopadłe a długość każdego z nich jest równa 1. Obliczyć długość wektora $\vec{a} = 4\vec{p} - 3\vec{q}$.
27. Dane są punkty A(1; 2) i B(3; 4). Znaleźć punkt C tak, aby wektor \vec{AC} był prostopadły do wektora \vec{AB} i $|\vec{AB}| = 2|\vec{AC}|$.
28. Dany jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości a . Obliczyć $\vec{BC} \circ \vec{CA} + \vec{AC} \circ \vec{AB} + \vec{BC} \circ \vec{AB}$.
29. W kwadracie ABCD o boku długości 1 punkty K i L dzielą przekątną BD na trzy równe części. Obliczyć $\vec{AK} \circ \vec{AL}$.
30. Wyprowadzić wzory na współrzędne środka ciężkości trójkąta o wierzchołkach A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C (x_3, y_3).
31. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach A (-2; -4), B (2; 8), C (10; 2).
32. Wierzchołkami trójkąta są punkty A(3; 6), B(-1;3) i C(2; -1). Obliczyć długość wysokości trójkąta poprowadzonej z wierzchołka C.
33. Dane są wierzchołki trójkąta A(-1; -1), B(0; -6) i C(-10; -2). Obliczyć długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka A.
34. Znaleźć równanie zbioru punktów równoodległych od punktów A (2; 0) i B (0, 1).
35. Znaleźć odległość między prostymi równoległymi.
36. Znaleźć równanie prostej przechodzącej przez punkt M (4; 3) i tworzącej z osiami układu współrzędnych trójkąt o polu $P = 3$.
37. Znaleźć równanie zbioru punktów, których suma kwadratów odległości od punktów A (-3; 0) i B (3; 0) jest równa 50.
38. Napisać równanie okręgu symetrycznego do okręgu $x^2 + y^2 = 2x + 4y - 4$ względem prostej $x - y - 3 = 0$.
39. Napisać równanie okręgu przechodzącego przez punkty A (1; 2), B (0; -1) i C (-3; 0).
40. Punkty A (0; 4) i D (3; 5) są wierzchołkami trapezu równoramiennego ABCD, którego podstawy są prostopadłe do prostej k o równaniu $y = x - 2$. Obliczyć współrzędne pozostałych wierzchołków wiedząc, że wierzchołek C należy do prostej K .
41. Odcinek o końcach A(3; 2) i B(2; -1) jest mniejszą podstawą trapezu. Większa podstawa trapezu jest dwa razy dłuższa od mniejszej, a jej środkiem jest punkt M(1; 1). Obliczyć współrzędne pozostałych wierzchołków.
42. Dwie wysokości trójkąta ABC, gdzie A (3; -4) zawarte są w prostych o równaniach $7x - 2y = 1$ i $2x - 7y = 6$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków.
43. Dane są dwa wierzchołki trójkąta A(-4; 3), B(4; -1) oraz punkt wspólny jego wysokości M (3; 3). Obliczyć współrzędne punktu C.
44. Obliczyć współrzędne wierzchołków równoległoboku, którego dwa boki są zawarte odpowiednio w prostych o równaniach $2x - y = 0$ i $x - 3y = 0$ i którego przekątne mają punkt wspólny P (2; 3).
45. Napisać równanie okręgu o środku w punkcie S (1; 2) stycznego do prostej o równaniu $y = x - 1$.

46. Dane są trzy wierzchołki $A(4; 2)$, $B(3; 6)$, $C(-1, 4)$ równoległoboku $ABCD$. Obliczyć kąt między wektorami \overrightarrow{AK} i \overrightarrow{AL} , gdzie K i L są środkami odcinków BC i CD .
47. Jedno z ramion trójkąta równoramiennego ABC jest zawarte w prostej o równaniu $y = 2x - 3$. Podstawą trójkąta jest odcinek o końcach $A(2; 1)$ i $B(5; 2)$. Obliczyć współrzędne punktu C .
48. W trójkącie równoramiennym ABC , w którym $C(1; 2)$, $AC=BC = 5$ podstawa jest zawarta w prostej o równaniu $x + y = 2$. Obliczyć współrzędne wierzchołków A i B .
49. Środkiem kwadratu $ABCD$ jest punkt $S(1; 3)$, a bok AB jest zawarty w prostej o równaniu $y = 2x - 4$. Obliczyć współrzędne punktów A i B .
50. Obliczyć pole trójkąta równobocznego, którego jeden z boków jest zawarty w prostej o równaniu $y = 2x - 3$ i jednym z wierzchołków jest punkt $(3; 1)$.
51. Obliczyć kąt między promieniami okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$ poprowadzonymi do punktów przecięcia okręgu z osią OX .
52. Znaleźć zbiór wszystkich tych punktów płaszczyzny, których odległość od prostej o równaniu $x = 8$ jest dwukrotnie większa niż ich odległość od punktu $(2; 0)$. Podaj nazwę tego zbioru.
53. Znaleźć równanie prostej przechodzącej przez punkt $(-2, -3)$ i tworzącej z ujemnymi półosiąmi prostokątnego układu współrzędnych trójkąt o najmniejszym polu.
54. Napisać równanie okręgu przechodzącego przez punkt $(1; 2)$ i stycznego do prostych $2x + y = 0$ i $2x + y = 20$.
55. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt $(3; 4)$ i zawierającej taką cięciwę okręgu $x^2 + y^2 = 25$, która ma długość $5\sqrt{2}$.
56. Odcinek o końcach $A(-2; 1)$ i $B(6; 2)$ jest podstawą trapezu. Druga podstawa jest dwa razy krótsza i ma środek w punkcie $P(3; 5)$. Obliczyć współrzędne wierzchołków i pole trapezu.
57. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt $(1; 2)$ i przecinającej krzywą $2y - x^2 = 1$ w punktach symetrycznych względem punktu $(1; 2)$.
58. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{2}{x}$, $x \in \mathbb{R}_+$. Wykazać, że pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych oraz styczną do wykresu tej funkcji nie zależy od wyboru punktu styczności.
59. Obliczyć współrzędne wierzchołków trójkąta równoramiennego prostokątnego ABC o wierzchołku $C(3; -1)$ oraz przeciwprostokątnej AB zawartej w prostej o równaniu $3x - y + 2 = 0$.
60. Wyznaczyć równanie prostej zawierającej cięciwę okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ wiedząc, że punkt $A(2; -0,5)$ jest środkiem cięciwy.
61. Dwa boki trójkąta zawarte są w wykresie funkcji $y = |x - 1|$. Trzeci bok zawarty jest w prostej k przechodzącej przez punkt $A(-5; 0)$. Wyznaczyć równanie prostej k , wiedząc, że pole trójkąta jest równe 12.
62. Dwa wierzchołki rombu leżą na osi OX , Przekątna rombu ma długość $3\sqrt{5}$ i zawarta jest w prostej o równaniu $2y - x = 0$. Wyznaczyć współrzędne wierzchołków i pole rombu.
63. Punkty $A(-1; 0)$ i $B(5; 3)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego. Wyznaczyć współrzędne trzeciego wierzchołka wiedząc, że leży on na prostej $y = x + 4$.
64. W prostokątnym układzie współrzędnych narysować okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 8 = 0$ i prostą styczną do niego, tworząc z dodatnimi półosiąmi układu trójkąt równoramienny. Wyznaczyć równanie tej prostej.

65. Napisać równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i stycznej do wykresu funkcji $f(x) = 2x^2 + \frac{8}{x}$
66. Wyznaczyć współrzędne punktu leżącego na krzywej o równaniu $y = \frac{2}{x}$ gdzie $x > 0$, którego odległość od prostej $x + 4y + 6 = 0$ jest najmniejsza.
67. Dane są punkty A (2; -1), B (1; 3) i C (-1; 1) będące wierzchołkami trójkąta. Znaleźć kąty tego trójkąta.
68. Wykazać, że trójkąt o wierzchołkach A (5; -4), B (3; 2), C (2, -5) jest prostokątny.
69. Dane są punkty A(1; -2), B(2; 4), C(0; 3). Znaleźć kąt między środkowymi trójkąta poprowadzonymi z wierzchołków A i C.
70. Dane są dwa przeciwległe wierzchołki kwadratu A(4; -1) i C(-3, 0). Znaleźć współrzędne pozostałych wierzchołków.
71. Przez punkt (-1; 1) poprowadź prostą tak, aby środek jej odcinka zawartego między prostymi $x + 2y - 1 = 0$ i $x + 2y - 3 = 0$ leżał na prostej $2x + y - 2 = 0$.
72. W prostokącie dany jest wierzchołek C (-2; 2) i $\overline{AB} = [3,3]$. Znaleźć równania przekątnych i kąt między nimi wiedząc, że wierzchołek A leży na prostej $x - 2y = 0$.
73. W trójkącie dane są równania dwóch boków $3x + y - 3 = 0$ i $3x + 4y = 0$ i równanie dwusiecznej jednego z kątów wewnętrznych $x - y + 5 = 0$. Znaleźć równanie trzeciego boku.
74. Przez punkt przecięcia się prostych $2x - 5y - 1 = 0$ i $x + 4y - 7 = 0$ przeprowadzić prostą dzielącą odcinek między punktami A (4; -3) i B (-1; 2) w stosunku $k = \frac{2}{3}$.
75. Do okręgu o środku S (1; 1) należy punkt A (2; 3). Obliczyć pole trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg.
76. Napisać równanie linii, której każdy punkt jest jednakowo odległy od prostej $x - 2 = 0$ i od okręgu $x^2 + y^2 = 1$. Narysować tę linię.
77. Wyznaczyć figurę, która jest zbiorem punktów M (x; y) spełniających warunek $|AM| = 5 |BM|$ gdzie A (0; 0), B (3; 0).

ODPOWIEDZI

1. $\sqrt{13}$
2. $\vec{b} = [-6; -3]$
3. $a = -2, b = -1$
4. 3
5. C (3; 6)
6. $\vec{AP} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}), \vec{BP} = \frac{1}{3}(\vec{AC} - 2\vec{AB})$
7. $\alpha = \frac{2}{3}\pi$
8. $x = \sqrt{13}$ lub $x = -\sqrt{3}$
9. $\sqrt{5}$ oraz 5
10. $\alpha = \frac{1}{3}\pi, d_1 = 2, d_2 = 2\sqrt{3}$
11. $\vec{x} = [10; 15]$
12. 3
13. $\frac{13}{8}$
14. $x = \frac{1}{3}\pi$ lub $x = \frac{2}{3}\pi$
15. 7 i $\sqrt{19}$
16. Równanie dwusiecznej $x + 7y + 2 = 0$, punkt wspólny dwusiecznej z bokiem BC to $P(\frac{8}{3}; -\frac{2}{3})$, rzut punktu P na bok AB to Q $(\frac{2}{3}; 2)$, długość szukanego rzutu $|AQ| = \frac{10}{3}$
17. $\vec{x} = [-3; 1]$
18. $\alpha = \frac{1}{2}\pi$
19. -
20. -
21. $\alpha = \frac{1}{4}\pi$
22. $r = -2, s = 3$
23. $\vec{a}_1 = [\frac{18}{\sqrt{13}}; \frac{12}{\sqrt{13}}], \vec{a}_2 = [-\frac{18}{\sqrt{13}}; -\frac{12}{\sqrt{13}}]$
24. $2\sqrt{10 - 3\sqrt{2}}$
25. $k = \frac{5}{2}$
26. $|\vec{a}| = 5$
27. C₁ (0; 3), C₂ (2; 1)
28. $-\frac{a^2}{2}$
29. $\frac{4}{9}$
30. -
31. P = 60
32. $|h| = 5$
33. $|s| = 5$

$$34. y = 2x - \frac{3}{2}$$

$$35. 5\frac{1}{2}$$

$$36. 3x - 2y - 6 = 0 \text{ lub } 3x - 8y + 12 = 0$$

$$37. x^2 + y^2 = 16$$

$$38. (x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 1$$

$$39. (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$$

$$40. B(4; 0), C(5; 3)$$

$$41. C(0; -2), D(2; 4)$$

$$42. B(-4; -2), C(1; 3)$$

$$43. C(4; 5)$$

$$44. A(0;0), B(\frac{6}{5}, \frac{2}{5}), C(4;6), D(\frac{14}{5}, \frac{28}{5})$$

$$45. (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$$

$$46. \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$47. C(3; 3)$$

$$48. A(-3; 5), B(4; -2)$$

$$49. A(2; 0), B(4; 4)$$

$$50. P = \frac{4\sqrt{3}}{15}$$

$$51. \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$52. \text{Elipsa } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

$$53. y = -\frac{2}{3}x - \frac{13}{3}$$

$$54. (x - 5)^2 + y^2 = 20 \text{ lub } (x - 1,8)^2 + (y - 6,4)^2 = 20$$

$$55. x - 7y + 25 = 0 \text{ lub } 7x + y - 25 = 0$$

$$56. C = (1; \frac{19}{4}), D(5; \frac{21}{4}), P = \frac{81}{4}$$

$$57. y = x + 1$$

$$58. -$$

$$59. A(-\frac{9}{5}; -\frac{17}{5}), B(\frac{3}{5}; 19,5)$$

$$60. 4x - 2y - 9 = 0$$

$$61. x - 2y + 5 = 0$$

$$62. A(0;0), B(\frac{15}{4}; 0), C(6;3), D(\frac{9}{4}; 3) \text{ lub } A(0;0), B(-\frac{15}{4}; 0), C(-6;-3), D(-\frac{9}{4}; -3)$$

63. $C_1(-2;2), C_2(3;7), C_3(-1;3), C_4\left(\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$

64. $y = -x + 4$

65. $y = 6x$

66. $P\left(2\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

67. $\cos\alpha = \frac{11}{\sqrt{221}}, \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{34}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{26}}$

68. -

69. $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

70. B (1; 3), D (0; -4)

71. $y - 1 = -\frac{2}{7}(x + 1)$

72. AC: $y + 2 = 2(x + 4)$, BD: $y + 1 = \frac{1}{2}(x + 5)$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$

73. $x + 3y - 13 = 0$

74. $y = \frac{7}{2}x - \frac{19}{2}$

75. $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

76. $y^2 = -6x + 9$

77. $\left(x - \frac{25}{8}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{64}$