FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE

1. Obliczyć:

a) $\cos^2 120° - \sin^2 120°$

b) $\sin 1000°$

c) $\cos^2 105° - \sin^2 105°$

d) $\sin x + \cos^2 x$ jeżeli $\sin x - \cos x = 1$

e) $\cos\frac{\alpha}{2}$ jeśli $\cos\alpha = \frac{3}{5} \wedge \alpha \in (\pi ; 2\pi)$

f) $\log_4 \sin 135°$

g) $\frac{\cos 100°}{\sin 10°}$

h) $\cos 72°$ jeśli $\sin 12° = p$

i) $\log_3 \operatorname{tg} 30°$

j) $\operatorname{tg}\alpha$, gdy $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ i $\alpha \in (\pi ; \frac{3}{2}\pi)$

k) $\sin 2\alpha$, jeśli $\sin\alpha = \frac{4}{5} \wedge \alpha \in (\frac{\pi}{2} ; \pi)$

l) $\sin^4 x + \cos^4 x$ jeżeli $\sin 2x = 0{,}2$

ł) $\operatorname{tg}\alpha$ jeżeli $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \alpha \in (\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2})$

m) $\cos\alpha$ jeżeli $\operatorname{tg}\alpha = 2$ i $\alpha \in (\frac{\pi}{2} ; \frac{3}{2}\pi)$

n) $\frac{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} .....}{0,(1) + \sin 690°}$

o) $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ jeśli $\sin 2\alpha = -\frac{3}{5} \wedge \alpha \in (\frac{\pi}{2} ; \frac{3}{4}\pi)$

p) $\frac{\operatorname{tg} 225° - 2\cos 480° + 2\sin 300°}{\operatorname{tg} 15°}$

r) $\sin\frac{13\pi}{12}$

s) $\cos 3x + \cos x$ jeżeli $\sin x = -\frac{1}{3}$ i $x \in (\pi ; \frac{3\pi}{2})$

t) $\sin\frac{5}{6}\pi - \log_{\sqrt{3}} \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$

2.Rozwiązać równanie:

a) $\log_{\sin x} \frac{1}{2} = 2$

b) $\sin 3x - \sin x = \cos 2x$

c) $\sin x = \sin 2x$

d) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$

e) $1 + 3\cos x - \sin^2 x = 0$

f) $4^{\sin x} = 2^{\cos^2 x - 1}$

g) $4^{\sin^2 x} + 5 \cdot 4^{\cos^2 x} = 12$

h) $\sin 3x - \cos x = 0$

i) $\dfrac{\cos x}{1 - \sin x} = 1 + \sin x$

j) $3\sin x = 2\cos^2 x$

k) $\sin x - \cos 2x = 1$

l) $\cos x + \sin x = 0$

ł) $1 + \dfrac{1}{2\sin x} + \dfrac{1}{4\sin^2 x} + ... = \dfrac{2}{\sin x}$

m) $2^{-\sin^2 x} = \frac{1}{2}$

n) $\cos x - \cos (x - \dfrac{\pi}{2}) = \sin 3x \wedge x \in (-\pi ; \pi)$

o) $(\sin x - \cos x)^2 + \operatorname{tg} x = 2\sin^2 x$

p) $|\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x| = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

r) $\sin^3 x - \cos^3 x = 1 + \dfrac{1}{2} \sin 2x$

s) $\operatorname{ctg} (\pi - 2x) = \operatorname{ctg} (2x - \dfrac{\pi}{3})$

t) $\cos 2x + \cos 4x = \cos 3x$

u) $|\cos x| = \cos x + 2\sin x \wedge x \in \langle 0 ; 2\pi \rangle$

w) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \dfrac{1}{x}$

3. Rozwiązać nierówności:

a) $\sin x > \cos x \wedge x \in \langle -\pi ; \pi \rangle$

b) $\sqrt{\sin^2 x} - 1 \geq 0$

c) $\cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x + ... \geq -1 - \cos x$

d) $\log_{\cos x} \sin x \geq 1 \wedge x \in (0 ; 2\pi)$

e) $2\sin x - 1 < 0 \wedge x \in (0 ; \pi)$

f) $\log_{0,5} \sin^2 x > 2 \wedge x \in \langle 0 ; 2\pi \rangle$

g) $\cos (\pi - x) \leq \sin (\dfrac{\pi}{2} + x)$

h) g [f (x)] ≥ 1 jeżeli f (x) = 3^{x} i g (x) = sin x

i) $|\operatorname{tg} 2x| \le 1$

j) $\cos^2 x + \cos^3 x + \ldots < 1 + \cos x \wedge x \in (0; 2\pi)$

k) $2^{\sin x} > \frac{1}{2}$

l) $\sin^2 x \ge \cos^2 x$

ł) $2^{\frac{1}{\sin x}} \ge 2^{4\sin x} \wedge x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

m) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sin x - 2\cos x + 1} \le 3^{\frac{1}{2} + \log_{0,75} \frac{2}{\sqrt{3}}} \wedge x \in (\pi; 2\pi)$

n) $(4\sin^3 x) \quad \log_{\sin x} 2 < \log_{\sin x}(4\sin^3 x)$

o) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\sqrt{3}}(\operatorname{tg} x + 1)} \langle \quad 1 \wedge x \in (0; 2\pi)$

4. Narysować wykres funkcji:

a) $y = \sin 2x \cdot \operatorname{tg} x$

b) $f(x) = \cos^2 - |\sin x| \sin x$, dla $x \in (0; 2\pi)$

c) $f(x) = 1 - |\sin 2x|$

d) $f(x) = \sqrt{1 + \cos 2x}$

e) $f(x) = \left(\cos^2 2x\right)^{\frac{1}{2}} - 1$

f) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(-2x) \wedge x \in (0; \pi)$

g) $y = |2\sin 2x|$

h) $y = |2\cos 2x|$

i) $f(x) = \frac{|\cos x|}{\cos x}$

j) $f(x) = \frac{\sin x}{|\sin x|}$

k) $f(x) = |\sin x| - 1$ dla $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

l) $f(x) = \sin^2 x + |\cos x| \cos x$ dla $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

ł) $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$

m) $f(x) = [\sin x]$

n) $f(x)=\frac{1}{2}(\sin x+|\sin x|)$

o) $f(x)=1-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

p) $f(x)=(\sin x+\cos x)^2$

r) $y=\left|\cos^4 x-\sin^4 x\right|$

s) $f(x)=2|\cos x|+\cos x$

t) $y=-\cos\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)\wedge x\in\langle-\pi;2\pi\rangle$

u) $y=\sin^2 x-\cos^2 x\wedge x\in\langle-\pi;\pi\rangle$

w) $f(x)=|\cos|-\cos x\wedge x\in\langle 0;2\pi\rangle$

y) $f(x)=-2\sin x|\cos x|$ dla $x\in\langle-2\pi;2\pi\rangle$

5. Wykazać, że funkcja określona wzorem $f(x)=\frac{|x|\sin x}{x^2+1}$ jest nieparzysta.

6. Uprościć wyrażenie:

a) $\frac{1+\sin 2x}{(\sin x+\cos x)^2}$

b) $\frac{a^3\operatorname{ctg}^2\frac{3}{4}\pi+b^3\cos^2\pi}{a^2\sin^2\frac{\pi}{2}+ab\sin\frac{3}{2}\pi-b^2\cos\pi}$

c) $x=3\sin\frac{20}{6}\pi-3\operatorname{tg}\frac{13\pi}{4}+2\cos\frac{19}{3}\pi$

d) $x=\operatorname{ctg}\alpha+\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

e) $x=\operatorname{ctg}\alpha 15^\circ\operatorname{ctg}16^\circ\ldots\operatorname{ctg}74^\circ\operatorname{ctg}75^\circ$

f) $x=\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}40^\circ+\ldots+\operatorname{tg}160^\circ+\operatorname{tg}180^\circ$

g) $x=\sin 112{,}5^\circ\cdot\cos 112{,}5^\circ$

h) $y=\frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}$ jeżeli $\operatorname{tg}x=2$

7. Określić dziedzinę funkcji:

a) $f(x)=\sqrt{-3\cos x}$

b) $f(x)=\sqrt{\sin x-1}$

c) $f(x)=\frac{1}{\cos x+1}$

d) $f(x)=\log_2\frac{1+2\cos x}{(-\sin x)}\wedge x\in(0;\pi)$

e) $f(x)=\sqrt{5\sin 2x+\sin^2 2x-4\cos 2x}$

f) $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(1-2\sin x)-\log_{\frac{1}{2}}(1-2\cos x)}$

8. Dla jakich wartości parametru m równanie ma rozwiązanie:

a) $\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{m+1}}$

b) $\cos x=\dfrac{1-2m}{m^2}$

c) $\cos^2 x=\dfrac{2m}{m^2+1}$ Odp. $m\in\langle 0;\infty)$

d) wyznaczyć wszystkie wartości parametru m ∈ R+ dla których równanie $\cos x=\dfrac{3m}{4-m^2}$ ma rozwiązanie w przedziale $\left\langle 0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?

9. Sprawdzić tożsamość:

a) $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

b) $\cos\dfrac{\pi}{5}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{1}{4}$

c) $\dfrac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$

10. Rozwiązać układ równań:

a) $\begin{cases}\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} y=2\\ \operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} y=2\end{cases}$

b) $\begin{cases}2^{\sin x+\cos y}=1\\ 16^{\sin^2 x+\cos^2 y}=4\end{cases}$

11. Wyznaczyć zbiór

$$A=\left\{x:\frac{\sin x}{(x-1)^2}\ \rangle\ |\sin x|\wedge x\in(0;2\pi)\right\}$$

12. Rozwiązać układ nierówności $\begin{cases}\sin^3 x+\cos^3 x\langle\sin x+\cos x\\ \log_{\sin x}\cos x\geq 1\end{cases}$

13. Znajdź te wartości parametru $\alpha\in\langle 0;\pi\rangle$ dla których rozwiązaniem układu równań $\begin{cases}x+y=\sin\alpha\\ 2x+3y=1+\sin\alpha\end{cases}$ jest para liczb o jednakowych znakach.

14. Rozwiązać nierówność $4\log_{16}\cos 2x+2\log_4\sin x+\log_2\cos x+3\ \langle\ 0\wedge x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$

15. Dla jakich wartości k równanie 3cos x + cos 2x =k ma rozwiązanie ?

16. Znaleźć takie x i takie a że $2\cos x = \log a + \dfrac{1}{\log a}$

18. Dla jakich a równanie $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \log(a-1) - \log(3-a)$ ma rozwiązanie.

19. Podać liczbę rozwiązań równania $\sin x = \dfrac{1}{m-1}$ w zależności od parametru.

20. Wyznaczyć te wartości $\alpha \in \left\langle 0; \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$, dla których równanie $x^{2}\sin\alpha + x + \cos\alpha = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste.

21. Rozwiązać graficznie nierówność $|\cos x| \le \dfrac{1}{2} \wedge x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

22. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x\sin\alpha - y\cos\alpha = \sin\alpha \\ x\cos\alpha + y\sin\alpha = 1 \end{cases}$ z parametrem α .

Dla jakich wartości α suma $x^{2} + y^{2}$ jest a) najmniejsza b) największa c) równa 1,5

23. Dla jakich wartości $\alpha \in \left\langle 0; \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$ liczby $\sin^{2}\alpha, \cos\alpha, \mathrm{tg}\,\alpha$ tworzą ciąg geometryczny?

24. Dla jakich $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} \right)$ suma wszystkich wyrazów ciągu $\mathrm{tg}\,x, \mathrm{tg}^{3} x, \mathrm{tg}^{5} x \ldots$ jest równa $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$?

25. Udowodnić tożsamość $\cos^{4} x - \sin^{4} x = \cos 2x$.

26. Obliczyć stosunek sinusów kątów ostrych w trójkącie o wierzchołkach A (4:2), B (3;0), C (0;-2)

27. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in (0; 2\pi)$ równanie $\sin 2x = 2\cos\alpha$ ma rozwiązanie?

28. Obliczyć miarę kąta α-β, jeżeli α i β są kątami ostrymi oraz tg α=3 i tg β= $\dfrac{1}{2}$.

29. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \langle 0; \pi \rangle$ równanie $3\,3^{x} = \cos^{2} 2\alpha$ nie ma rozwiązań?

30. Zbadać liczbę pierwiastków równania tg x +ctg x = m w zależności od parametru m

31. Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$ w przedziale $\left\langle 0; \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$

32. Podać wzór na sinus sumy dwóch kątów. Obliczyć bez pomocy tablic sin 105°.

33. Podać definicję funkcji cotangens. Przedstawić w prostszej postaci wyrażenie $\left(\cos^{4} x - \sin^{4} x \right) : (2\sin x \cos x)$, a następnie obliczyć jego wartość dla x = 15°.

34. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \langle 0; 2\pi \rangle$ ciąg o wyrazie ogólnym $an = n\,\mathrm{tg}\,\alpha + 1$ jest ciągiem rosnącym?

35. Dla jakich wartości parametru α równanie $x^{2} + (4\sin\alpha)x + 1 = 0$ ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

36. Podać sposób konstrukcji kąta $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi \right)$ takiego, że $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$

37. Podać najmniejszy pierwiastek równania $\operatorname{tg} 2x = \sin 4x$ w przedziale $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

38. Pokazać, że równanie $2\sin x + \cos x = 3$ nie ma rozwiązań.

39. Pokazać, że równanie $\cos x + \sin x + \cos^2 x = 3$ nie ma rozwiązań.

40. Podać największy ujemny pierwiastek równania $\operatorname{tg} 3x = \sin 6x$.

41. Dla jakich wartości parametru α punkt A (1;-1) należy do wykresu funkcji $f(x) = 2^{x\sin\alpha} - 3 \wedge x \in R$

42. Wykazać, że dla każdego x ∈ R zachodzi nierówność $|\sin x + \cos x| \le \sqrt{2}$.

43. Wyznaczyć x, jeżeli $3^x = \operatorname{tg} x$; $3^{-x} = \operatorname{tg}\beta$; $\alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$

44. Dla jakich wartości parametru α nierówność $x^2 - (3\cos\alpha)x + \cos 2\alpha > 0$ jest prawdziwa dla każdego x ∈ R ?

45. Która z liczb jest większa: $0{,}4(9)$ *czy* $\sin\frac{101\pi}{6}$?

46. Dla jakich wartości parametru α nierówność $x^2 - (2\sin\alpha)x + 2\sin\alpha - \cos^2\alpha \ge 0$ jest spełniona dla każdego $x \in (-\infty;\infty)$?

47. Wiedząc, że funkcja określona na zbiorze liczb rzeczywistych jest różnowartościowa rozwiązać równanie $f\left(2\sin^2 x\right) = f(3\cos x)$

48. Dla jakiej wartości parametru β równanie $3^{-x} = \cos\frac{\beta}{2}$ ma rozwiązanie dodatnie?

49. Dla jakiej wartości parametru α równanie $2^x = \sin 2\alpha$ ma rozwiązania ujemne?

50. Dla jakich wartości parametru m równanie $m\sin^2 x + 2\sin x - 2m = 0$ ma rozwiązanie?

51. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in (0;\pi)$ równanie $x^2 - 2x + \operatorname{ctg}\alpha = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste?

52. Znaleźć miejsca zerowe funkcji $f(x) = \sin(\pi - x) - 2\sin x$ *dla* $x \in \langle 0;2\pi\ )$

53. Podać przedział w którym funkcje $f(x) = |\sin x|$ *i* $g(x) = \sin|x|$ przyjmuje te same wartości.

54. Doprowadzić do najprostszej postaci wyrażenie: $y = \frac{\sin(180° - x)\cdot\cos(x - 270°)}{\sin(180° + x)\cdot\cos(270° + x)}$ gdzie x ∈ (0°;90°)

55. Udowodnić, że równanie $\sin^5 x \cos^5 x = \frac{1}{30}$ jest sprzeczne.

56. Dla jakiej wartości parametru a układ równań $\begin{cases}\sin x \sin y = \frac{1}{4} \\ \cos x \cos y = a\end{cases}$ ma rozwiązanie?

57. Przeprowadzić dyskusję rozwiązania równania sin x = k x w zależności od parametru k .

58. Wykaż, że równanie $\log\sin x = \sin x$ nie ma rozwiązań w zbiorze R .

59. Znaleźć zbiór wartości funkcji $f(x)=1-\cos^2 x+\sin^2 x$

60. Niech $S=\sin\frac{83!}{1992}\pi$ oraz $C=\cos\frac{83!}{1992}\pi$. Wykaż, że S < C .

61. Znaleźć miejsce zerowe funkcji $f(x)=2^{\sin x}-2^{-1}$.

62. Wykazać, że suma nieskończonego ciągu geometrycznego $1-\sin^2 x+\sin^4 x-\sin^6 x+\ldots$ nie może być równa $\frac{1}{2}$.

63. Wykazać, że dla każdego x ∈ R zachodzi nie równość $\sin x\cos x\rangle -0{,}51$.

64. Dla jakich wartości x wykres funkcji $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\cos x$, $x\in R$ przecina oś OX ?

65. Znaleźć zbiór wartości funkcji $f(x)=\cos^2 x+\sin 2x+\sin^2 x$

66. Wyznaczyć takie $\alpha\in\langle 0;2\pi\rangle$, aby prosta o równaniu $4x-2y+3=0$ była styczna do wykresu funkcji $y=-x^2+x+5\cos^2\alpha$

67. Dla jakich wartości parametru a równanie $\cos x-\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{a^2-4}{2}$ ma rozwiązanie?

68. Narysować zbiór (x, y) takich punktów, że $\log_{1+\sin x}(y-\cos x)\geq 0$

69. Znaleźć (bez stosowania pochodnej) największą wartość wyrażenia $w=\sin 2x+2\cos^2 x$ w przedziale $\langle 0;\pi\rangle$

70. Podać rozwiązanie równania $4\sin^3 x+8\sin^2 x-\sin x=2$ należące do przedziału $(3\pi;4\pi)$.

71. Rozwiąż równanie $\mathrm{tg}^2(x+y)+\mathrm{ctg}^2(x+y)=1-2x-x^2$

72. Dla jakich wartości parametru m równanie $\frac{2(1+\cos x)}{\cos 2x}=\frac{m}{1-\cos x}$ posiada rozwiązanie?

73. Rozwiąż równanie $\frac{4\cos x-\sin 2x}{\cos x}=4\cos^2 x$. Dla jakiej wartości parametru m równanie to oraz równanie $\sin 3x=m\sin x+(4-2|m|)\sin^2 x$ mają wspólne rozwiązanie?

74. Znajdź wszystkie pary liczb rzeczywistych x i y, które spełniają równanie $\mathrm{tg}^4 x+\mathrm{tg}^4 y+2\,\mathrm{ctg}^2 x\cdot\mathrm{ctg}^2 y=3+\sin^2(x+y)$.

75. Dla jakich wartości a równanie:
$\sin 2x-\sin^3 2x+\sin^5 2x-\sin^7 2x+\ldots=a+a^2+a^3+\ldots$, gdzie obie strony są sumami szeregów geometrycznych ma rozwiązanie?

ODPOWIEDZI

2.

a) $-\frac{1}{2}$

b) –cos 10°

c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) 1

e) $\cos\frac{\propto}{2}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

f) $-\frac{1}{4}$

g) –1

h) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-p^2}-\sqrt{3}p\right)$

i) $-\frac{1}{2}$

j) $\frac{3}{4}$

k) $\sin 2\alpha=-\frac{24}{25}$

l) 0,98

ł)

m) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

n) $-\frac{27}{14}$

o) $\sin\propto=\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\propto=-\frac{\sqrt{10}}{10}$

p) 13

r) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

s) $-\frac{28}{27}\sqrt{2}$

t) $\frac{3}{2}$

2.

a)($x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \ \vee\ x=\frac{3}{4}\pi+2k\pi$) $\wedge\ k\in C$

b) ($x=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}k\pi \vee x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi$) $\wedge\ k\in C$

c) (x = kπ $\vee\, x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$)$\wedge$ k$\in$ C

d) x = $\frac{1}{2}$ kπ ∧ k∈ C

e) x = $\frac{\pi}{2}$ + kπ ∧ k ∈ C

f) x= kπ ∧ k ∈ C

g) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi$ ∧ k ∈ C

h)($x = \frac{\pi}{8} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi$)∧ k ∈ C

i) (x = 2kπ ∨ $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$) ∧ k ∈ C

j) ($x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee$ $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$) ∧ $k \in C$

k) (x = kπ ∨ $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee$ $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$) ∧ $k \in C$

l) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ ∧ k ∈ C
ł) x = $\frac{\pi}{2}$ +2 kπ ∧ k ∈ C
m) x = $\frac{\pi}{2}$ + kπ ∧ k ∈ C
n) $\left\{\frac{-11\pi}{12}; \frac{-7\pi}{12}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{2}\right\}$
o) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi$ ∧ k ∈ C
p) ($x = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}k\pi$ ∨ $x = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}k\pi$) ∧ k ∈ C
r) x = $\frac{\pi}{2}$ +2 kπ ∨ x = π +2 kπ ∧ k ∈ C
s) $x = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}k\pi$ ∧ k ∈ C
t) $\left(x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \wedge k \in C$
u) x = 0 ∨ x = $\frac{3}{4}\pi$ ∨ x = 2π
w) $x = \frac{k\pi - \sqrt{k^2\pi^2 + 4}}{2} \vee x = \frac{k\pi + \sqrt{k^2\pi^2 + 4}}{2}$

5.

a) x ∈ < -π ; $-\frac{3}{4}k\pi$ > ∪ ($\frac{\pi}{4}; \pi$ >
b) x = $\frac{\pi}{2} + k\pi \wedge k \in C$
c) $x \in R \setminus \{x \in R : x = k\pi \wedge k \in C\}$
d) x ∈ (0 ; $\frac{\pi}{4}$)
e) x ∈ (0 ; $\frac{\pi}{6}$) ∪ ($\frac{5}{6}$π ; π)

f) $x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi; \pi\right) \cup \left(\pi; \frac{7}{6}\pi\right) \cup \left(\frac{11}{6}\pi; 2\pi\right)$

g) $x \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle \wedge k \in C$

h) x = $\log_{3} \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \wedge$ k $\in$ N

i) $x \in \left\langle -\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \right\rangle \wedge k \in C$

j) $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$

k) $x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

l) $x \in \left\langle \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi \right\rangle \wedge k \in C$

ł) $x \in (0; \frac{\pi}{6} > \cup < \frac{5}{6}\pi; \pi) \cup < \frac{7}{6}\pi; \frac{11}{6}\pi >$

m) x $\in$ $(\pi; \frac{3}{2}\pi >$

n) $x \in \left(2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) \cup \left(2k\pi + \frac{5}{6}\pi; \pi + 2k\pi\right) \wedge k \in C$

o) $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{6}\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$

6. -

5.

17.

b) 1 dla $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \wedge k \in C$

b) a + b

c) $x = -\frac{1}{2}$

d) $x = \frac{1}{\sin\alpha}$

e) x = 1

f) x = 0

g) $x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

h) $y = \frac{10}{11}$

18.

a) $x \in \left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \right\rangle \wedge k \in C$

b) $D=\left\{x : x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \wedge k \in C\right\}$

c) $.D=\{x : x \neq \pi+2k\pi\}$

d) $x \in\left(\frac{2}{3}\pi ; \pi\right)$

e) $x \in\left\langle\frac{\pi}{6}+k\pi ; \frac{5}{6}\pi+k\pi\right\rangle \quad i \quad k \in C$

f) $x \in\left(\frac{5}{6}\pi+2k\pi ; \frac{5}{4}\pi+2k\pi\right) \wedge k \in C$

19.

a) $m \geq 0$

b) $m \in\left(-\infty ;-1-\sqrt{2}\right\rangle \cup\left\langle-1+\sqrt{2} ; \infty\right)$

c) $m \in\langle 0 ; \infty)$

d) $m \in(-\infty ;-4\rangle \cup(1 ; 2)$

20. –

21.

a) Odp. $\begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ y=\frac{\pi}{4}+k\pi \end{cases}$

b) Odp. $\begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ y=\frac{2}{3}\pi+2k\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi \\ y=\frac{4}{3}\pi+2k\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi \\ y=\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{11}{6}\pi+2k\pi \\ y=\frac{5}{3}\pi+2k\pi \end{cases}$

22. $A=(0 ; 1) \cup(1 ; 2)$

23. $x \in\left\langle\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right\rangle$

24. $x \in\left(\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}\right) \cup\left(\frac{\pi}{2} ; \frac{5}{6}\pi\right)$

25. $x \in\left(0 ; \frac{\pi}{24}\right) \cup\left(\frac{5\pi}{24} ; \frac{\pi}{4}\right)$

26. $k \in\left\langle-\frac{17}{8} ; 4\right\rangle$

27. $\left(a=\frac{1}{10} \wedge x=\pi+2k\pi\right) \cup(a=10 \wedge x=2k\pi) \wedge k \in C$

19. $a \in\left\langle\frac{103}{101} ; \frac{301}{101}\right\rangle$

19. Dla $m \in(-\infty ; 0) \cup(2 ; \infty)$ równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań, dla $m \in(0 ; 1) \cup(1 ; 2)$ nie ma rozwiązań.

20. $x \in \left(0; \frac{\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{5}{12}\pi; \frac{\pi}{2}\right\rangle$

21. $x \in \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi \right\rangle$

22. a) $\alpha = k\pi \wedge k \in C$ b) $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge k \in C$ c) $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi \wedge k \in C$

23. $\alpha = \frac{\pi}{4}$

24. $x = \frac{\pi}{6}$

25. -

26. $\frac{\sqrt{65}}{5}$

27. $\alpha \in \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi \right\rangle$

28. $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$

29. $\alpha = \frac{\pi}{4} \vee \alpha = \frac{3}{4}\pi$

30. $m \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 2; \infty)$ równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań; dla $m \in (-2;2)$ równanie nie ma rozwiązań.

31. $y_{MAX} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad y_{MIN} = 1$

32. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

33. $\operatorname{ctg} 2x \neq \frac{k\pi}{2}; \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$

34. $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

35. $\alpha \in \left\langle \frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi \right\rangle$

36. -

37. $x = \frac{3\pi}{8}$

38. -

39. -

40. $x = -\frac{\pi}{12}$

41.. $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \wedge k \in C$

42. -

43. x=$\frac{1}{2}$
44. Nie ma takiego α.
45. -
46. $\alpha \in \left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right\rangle \wedge k \in C$
47. $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \wedge k \in C$
48. $\beta \in (-\pi + 4k\pi; \pi + 4k\pi) \wedge k \in C$
49. $\alpha \in \left(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$
50. $\langle -2;2 \rangle$
51. $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}; \pi \right)$
52. $x = 0 \vee x = \pi$
53. $np\langle 0;\pi \rangle$
54. y = 1
55. -
56. $a \in \left\langle -\frac{3}{4}; \frac{3}{4} \right\rangle$
57. Dla k=0 równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań, dla $k \in (0;1)$ równanie ma trzy rozwiązania (rozwiązań graficznie np. dla k=$\frac{1}{2}$), dla pozostałych wartości k jedno rozwiązanie.
58. -
59. $\langle 0;2 \rangle$
60. -
61. $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \wedge k \in C$
62. -
63. -

64. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in C$
65. $\langle 0;2 \rangle$
66. $\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\} \wedge k \in C$
67. $a \in \langle -\sqrt{3} - 1; 1 - \sqrt{3} \rangle \cup \langle \sqrt{3} - 1; \sqrt{3} + 1 \rangle$
68. -
69. $W_{\max} = 1 + \sqrt{2}$
70. $x = \frac{19}{6}\pi \vee x = \frac{23}{6}\pi$

71. $\left(x=-1, y=1+\frac{\pi}{4}+k\pi \vee y=1-\frac{\pi}{4}+\pi \right) \wedge k \in C$

72.. $m \in (-\infty;-2) \cup (0;\infty)$

73. $x=k\pi \vee x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi$; $m \in (0;1) \cup \{4\} \cup (5;\infty)$

76. $\left(x=\frac{\pi}{4}+k\pi \wedge y=\frac{\pi}{4}+k\pi \right) \vee \left(x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \wedge y=-\frac{\pi}{4}+k\pi \right) \wedge k \in C$

77. $a \in \left(-1; \frac{1}{3} \right)$