FUNKCJA POTĘGOWA, WYKŁADNICZA I LOGARYTMICZNA.

1. Rozwiązać równanie:

a) $\sqrt{x+1}+x^2+2x-1=0$

b) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$

c) $2^{\sqrt{x}}=\sqrt{16^{\sqrt{x}}}-2$

d) $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=8$

e) $5^{x-1}+5\cdot\ 2^x=5^{x-2}+5\cdot\ 2^{x-2}$

f) $\log_2(x-2)+\log_2 x=0$

g) $2^{2x+1}-4^x=5^x$

h) $\left(\frac{4}{9}\right)^x\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{\log_5 4}{\log_5 8}$

i) $5^x-5^{3-x}=20$

j) $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}+\ldots=\frac{2}{1+2^{x+1}}$

k) $2^{2x+1}-4^x=5^x$

l) $\log^2(10x)+\log x=19$

ł) $\log_4 x=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots$

m) $\frac{1}{\log x}+\frac{1}{\log x^2}+\frac{1}{\log x^4}+\ldots=2$

n) $\log\left(2^x+3\right)=2\log\left(2^x+1\right)$

o) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4x^2}=9^{-2x^3}$

p) $2^{2x+1}+3\cdot 4^x=10$

r) $\log_2(x-1)+\log_2 x=1$

s) $\log(x+11)-\log(x-5)=1-\log 2$

t) $3^x-3^{x-1}+3^{x-2}-3^{x-3}+\ldots=\frac{1}{4}\sqrt{12-3^{x+1}}$

u) $\log 2+\log\left(4^{x-2}+9\right)=1+\log\left(2^{x-2}+1\right)$

w) $x^{\log x}+10\cdot x^{-\log x}=11$

y) $\frac{1}{5+\log_2 x}+\frac{1}{1-\log_2 x}=1$

2. Rozwiązać nierówność:

a) $\log_2 x\cdot\log_3 x<\log_3 16$

b) $2^{\frac{1-x}{|x|}}\le 1$

c) $2^x < \left(\frac{1}{2}\right)^x$

d) $\sqrt{3x-5} > \sqrt{x-4}$

e) $\log_{2x}(3-x) < 0$

f) $3^x - 2^{x+1} < 2^{x-1}$

g) $\log_x 2 + \frac{1}{\log_4 x} < \log_8 x$

h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x^2}{x-1}} \le 1$

i) $(0{,}25)^x < \frac{1}{16}$

j) $\log_{0,3}(x+1) > -1$

k) $2^{x^2} < 5^x$

l) $\log_{0,5}(5-x^2) \ge 1$

ł) x $\log_{\frac{1}{2}} 2 - \log_{\frac{1}{2}}(2^x - 1) + 1 \ge 0$

m) 1-$\log_4^2 2x + \log_4^4 2x - \log_4^6 2x + ... \le \frac{4}{5}$

n) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-3|} \ge \frac{1}{4}$

o) $\log(x+1) < \log 6 - \log x$

p) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2} > \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{x+1}$

r) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-1} > 1$

s) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 2$

t) $\log_x 2 > \log_{16} x$

u) $\log_2 x + \log_x 2 \ge 2$

w) $\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\right) > 0$

3. Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{\log|x+3|}$.

4. Zbadać liczbę pierwiastków równania $x^2 - 4x - \log_2 a = 0$ w zależności od parametru a.

5. Dla jakich wartości x funkcja wykładnicza $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ przyjmuje wartości z przedziału $< 0;4 >$?

6. Ile pierwiastków ma równanie $x^2 - 2x - \log_2|1-x| = 3$? Podaj ilustrację graficzną.

7. Wyznaczyć dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{3 + \log_{\frac{1}{2}}(2-x)}$.

8. Narysować zbiór $A=\{(x;y)\ \ y\le |\log x|\ \wedge\ x^2+y^2-9\le 0\}$.

9. Dla jakich wartości parametru a równanie $(1+\log_2 a)x^2-x-\log_2 a=0$ ma dokładnie jeden pierwiastek?

10. doprowadzić do najprostszej postaci wyrażenie: $\sqrt{a\sqrt{a}}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{4}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{\frac{-3}{2}}\cdot a^{\frac{-3}{4}}$ gdzie $a\in R_+$.

11. Dla jakich wartości parametru a równanie $x^2-2x+1=2x\log a+\log^2 a$ ma dokładnie jedno rozwiązanie?

12. Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x)=\log(x^2-x-6)+\frac{\sqrt{-x}}{x^2-16}$.

13. Suma pierwiastków trójmianu $y=ax^2+bx+c$ jest równa $\log_{a^2}c\cdot\ \log_{c^2}a$. Znaleźć odciętą wierzchołka paraboli.

14. Dla jakich $x\in R$ ma sens liczbowy wyrażenie $\frac{\log_2 x}{\log_3(x^2-8)}$.

15. Naszkicować wykres funkcji:

a) $f(x)=|2^x-1|$

b) $f(x)=|\log_2(x+1)|$

c) $f(x)=2^{\log_{\frac{1}{2}}x}$

16. Liczby 2; 2^x; 2^x+3 tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz x.

17. Porównać liczby $a=75\%\cdot(-0{,}999...)$ oraz $b=\log_{\frac{1}{9}}3\sqrt{3}$.

18. Naszkicować wykres funkcji $y=\log_2\frac{1}{x+1}$.

19. Naszkicować wykres funkcji $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$ dla $x\in<-2;2>$.

20. Dla jakich wartości parametru m równanie $3^x+(m-1)\cdot 3^{-x+1}+3=0$ ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty?

21. Obliczyć $\left(\sqrt[3]{4}\right)^{\frac{3}{2\log_3 2}}$.

22. Rozwiązać graficznie nierówność $\log_{\frac{1}{2}}|x|\ge x^2-1$.

23. Wyznaczyć dziedzinę funkcji:

a) $f(x)=\sqrt{\log(3^x-2^x+1)}$

b) $f(x)=\log(3x-x^2)$

24. Dla jakich wartości parametru m jeden z pierwiastków równania $3x^2-(\log m)x-\frac{4}{3}=0$ jest sinusem, a cosinusem tego samego kąta?

25. W układzie współrzędnych zaznacz zbiór $Z=\{(x;y):2^x\le y\le 2^{-x}\}$.

26. Wyznaczyć wartości x, dla których wyrażenie $\frac{\log|1+x|}{\log\sqrt{x}}$ ma sens liczbowy.

27. Rozwiązać graficznie nierówność $2^x - 1 > \frac{3}{2}x$.

28. Obliczyć:

a) $1000^{\frac{1}{3}\log\sqrt[3]{3}}$

b) $\dfrac{\log_3 16}{\log_{\frac{1}{3}} 8}$

29. Znaleźć składnik wymierny rozwinięcia dwumianu $\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{3}\right)^{10}$.

30. Rozwiązać układ nierówność $\begin{cases} \sqrt{x+6} > x \\ 2 + \log_{\frac{1}{2}}(-x) > 0 \end{cases}$

31. W prostokątnym układzie współrzędnym wyznaczyć zbiór punktów $(x; y)$ spełniających nierówność: $y < 2^{-x}$; $y \geq 1$; $x \geq -1$; $x \leq 0$.

32. Wyznaczyć dziedzinę funkcji $y = \sqrt{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-8}}$.

33. Obliczyć:

a) $16^{-\log_2 \sqrt{2}}$

b) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9}$

34. Dla jakich wartości parametru m równanie $(m+1)\cdot 9^x - 4m \cdot 3^x + m + 1$ ma dwa rozwiązania?

35. Naszkicować wykres funkcji:

a) $f(x) = \log x^2$

b) $f(x) = \left|2^x - 1\right| + 2$

c) $f(x) = 3^{-|x-2|}$

36. Napisać liczbę $\log_3\left|tg\frac{7}{6}\pi\right|$ w prostszej postaci.

37. Rozwiązać nierówność $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{x} \geq \frac{1}{32}$.

38. Rozwiązać równanie: $5^x \cdot 5^{x^2} \cdot 5^{x^3} = \frac{1}{5}$.

39. Rozwiązać nierówność $\log_{\frac{1}{3}}\left(|x| - 1\right) > 2$.

40. Naszkicować wykres funkcji $f(x) = x\log_{x^2}|x|$.

41. Rozwiązać nierówność $\left(\sqrt{2} - 1\right)^{x^3} \geq \left(\sqrt{2} + 1\right)^{-x}$.

42. Rozwiązać nierówność $x^2 \log_{\frac{1}{4}} 2 + 2x < 0$.

43. Rozwiązać nierówność $4\log_2 x \cdot \log_4 x - \log_2 x \geq 1$.

44. Dla jakich m równanie $\left|x^2 - 2\right| = \log_{\frac{1}{2}} m$ ma dokładnie cztery pierwiastki?

45. Rozwiązać równanie $|x-3|^{x^2-4x+3} = 1$.

46. Rozwiązać nierówność $x + 1 \leq \sqrt{3+x}$.

47. Wiedząc, że funkcja f określona na zbiorze liczb rzeczywistych jest malejąca, rozwiązać nierówność $f(\log_x 5) > f(1)$.

48. Obliczyć $\log 6$, jeśli $\log_3 2 = p$ i $\log_3 10 = q$.

49. Rozwiązać nierówność $2^1 \cdot 2^4 \cdot 2^7 \cdot \ldots \cdot 2^{3n-2} \le \left(\sqrt{2}\right)^{8n+30}$.

50. Jaka powinna być wartość parametru k, aby dziedziną funkcji $f(x) = \log_2\left(kx^2 + 2kx + 1\right)$ był zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

51. Rozwiązać równanie $f\left(f(x)\right)\frac{1}{2}$, gdy $f(x) = \log_{0,25}(x-1)$.

52. Wykazać, że funkcja $f(x) = x \cdot \log\frac{1-x}{1+x}$ jest parzysta.

53. Rozwiązać nierówność $\frac{1}{27} < \left(\frac{1}{3}\right)^{3x-1} \le 3$.

54. Wykazać, że $\log_{10} 5$ nie jest liczbą wymierną.

55. Rozwiązać równanie $\log x^2 + \log\frac{1}{x} = \frac{1}{\log x}$.

56. Rozwiązać równanie $2^x \cdot 3^{x-1} + 24 = 6^x$.

57. Rozwiązać równanie $\log(x-1) - 2\log x = \log 0{,}16$.

58. Udowodnić, że $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2$.

59. Rozwiązać układ równa $\begin{cases} 3^{\frac{2}{y}} = x \\ y = 1 + \log_3 x \end{cases}$.

60. Udowodnić, że funkcja $f(x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ określona na zbiorze liczb rzeczywistych jest nieparzysta.

61. Obliczyć:

a) $\left[\left(\sqrt[6]{9}\right)^{\sqrt{3}}\right]^{\sqrt{3}}$

b) $\log_{\frac{1}{a}} b \cdot \frac{1}{\log_a b}$

c) $\log_9 5 \cdot \log_4 81 \cdot \log_{\sqrt{3}} 8 \cdot \log_{25} 27$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_2 3$

62. Dla jakich wartości parametru m równanie $2^x + m \cdot 2^{-x} + 1 = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek.

63. Udowodnić, że nierówność $\log_{\frac{1}{3}}\left(-x^2 + 2x - 3\right) < 0$ nie ma rozwiązań.

64. Udowodnić, że jeżeli $3^x = 12$ to $x - 2 = \log_3 \frac{3}{4}$.

65. Wykazać, że równanie $\sqrt{x^2 - 4} \cdot \log_2(1-x) = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

66. Rozwiązać równanie $3\left(x^2 - 2x + 17\right)^{\frac{1}{2}} - x^2 + 2x = 7$.

67. Rozwiązać równanie $\log_2 x \cdot \log_3 x = \log_3 2$

68. Wykazać, że równanie $\sqrt{9^{2-2\sqrt{x}}} = 3^{2-\sqrt{x}} - 2$ ma rozwiązanie całkowite.

69. Znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą x spełniającą układ $\begin{cases} xy + 2y - x \le 10 \\ \left(\frac{3}{4}\right)^{x-y} - \left(\frac{3}{4}\right)^{y-x} = \frac{7}{12} \end{cases}$

70. Rozwiązać równanie $2^{3x-3} \cdot 7^{x-3} = 4^x$

71. Udowodnić, że jeżeli $\log_7 3 = a$ i $\log_3 5 = b$ to $\log_3 125 \cdot \log_3 49 = \frac{6b}{a}$

72. Rozwiązać równanie $1 - 3 \cdot 2^{\log x} = x^{\log 2}$

73. Udowodnić, że równanie $\log_{0,5}$(x+1)=kx dla każdego k>0 ma zawsze dokładnie jedno rozwiązanie.

74. Udowodnić, że jeżeli a=$\log_7 3$ to $\log_{49} 3 = \frac{1}{2}a$ i $\log_{\frac{1}{3}} 7 = \frac{-1}{a}$

75. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} 5 \cdot 25^x - 6 \cdot 5^x = 95 \\ \log_{(x+1)} 2 + \log_2 (x+1) = 2 \end{cases}$

76. Rozwiązać równanie $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$

77. Dana jest funkcja zmiennej x:f(x)=$a^{x^2 - x - \frac{5}{4}}$ gdzie $a \in (0;1)$. Dobrać tak wartość a, żeby największa wartość tej funkcji była rozwiązaniem równania $\log_2 x + \log_2 (x-2) = 3$

78. Zbadać liczbę rozwiązań równania $mx - (m-3)\sqrt{x} = 1$ w zależności od parametru m∈ R.

79. Określić liczbę rozwiązań równania $p\left(4^x - 2^x\right) = 1 - p$ w zależności od parametru p∈ R.

80. Wyznaczyć zbiór wartości parametru m, dla których równanie $m \cdot 2^x + (m+3) \cdot 2^x = 4$ ma co najmniej jedno rozwiązanie.

81. Rozwiązać równanie $\left(\sqrt{2} - 1\right)^x + 1 = 2\left(\sqrt{2} + 1\right)^x$.

82.Określić liczbę rozwiązań równania $\log|x| + \log x = \log(x + c)$ w zależności od parametru c∈ R.

83.Równanie $\log_x |x - m| = 2$ ma trzy rozwiązania. Jaki zbiór tworzą wartości parametru m?

84. Ile rozwiązań ma równanie $4^x - 3^x = 2 \cdot 3^{\frac{x}{2}} + 1$?

85. Dana jest funkcja f(x)=$\log_{x-m} x$.

a) wykres tej funkcji przechodzi przez punkt (2;2). Jaką liczbą jest m?
b) Dla m=6 funkcja ta ma w pewnym zbiorze wartości mniejsze od 2. określ ten zbiór.
c) Równanie f(x)=2 ma dwa różne rozwiązania. Wyznaczyć zbiór wartości parametru m.

86. Dane są funkcje f(x)=4^x i h(x)=$5 \cdot 6^x + 4 \cdot 9^x$

a) rozwiązać równanie $9 \cdot$ f(x)=h(x)
b) rozwiązać równanie $4 \cdot f(x) = 9\sqrt{f(x)} - 2$
c) dla jakich wartości a równanie f(x-a)=f(x^2+1) ma dwa pierwiastki o różnych znakach?

87. Dana jest funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$

a) rozwiązać równanie f(x)=1
b) rozwiązać nierówność F(x)>0

c) dla jakich wartości k równanie $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+k)$ ma pierwiastki?

88. Znaleźć liczbę, która daje się jednoznacznie przedstawić jako iloczyn innych liczb dodatnich takich, że różnica ich logarytmów o podstawie 2 jest równa ilorazowi tych logarytmów.

89. Rozwiązać graficznie nierówność $\log_x \log_y x > 0$

90. Rozwiązać równania:

a) $x^{\log x} = 100x$

b) $x + \log(1+2^x) = x\log 5 + \log 6$

c) $\log x = \sqrt{-x^2 - 3x - 2}$

91. Przeprowadź dyskusję rozwiązania układu równań $\begin{cases} (ax)^{\log a} = (bx)^{\log b} \\ b^{\log x} = a^{\log y} \end{cases}$

92. Wykazać, że dla n>1 zachodzi równość $\log_{2003!} n = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\log_2 n} + \dfrac{1}{\log_3 n} + \ldots + \dfrac{1}{\log_{2003!} n}}$

93. Narysować zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają nierówność $\log_{(x-y)}(x+y) \le 1$

94. Rozwiązać równanie o niewiadomej x : $\log_2 x + \log_4 x + \frac{1}{2}\log_8 x + \ldots + \frac{1}{n}\log_{2^{n-1}} x = 2n-1$

95.Rozwiązać równanie $\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x + \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x = 6$

96. Rozwiązać układ nierówności $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{2}(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 + \frac{1}{4}(\log_{\frac{1}{2}} x)^3 + \ldots \le 2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}} \ge \dfrac{2}{x-2} \end{cases}$

97. Znajdź wszystkie pary (x;y) liczb całkowitych spełniających układ równań $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2^x + 3^y = 25 \end{cases}$

98. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x^{\log_y z} + z^{\log_y x} = 512 \\ y^{\log_z x} + x^{\log_z y} = 8 \\ z^{\log_x y} + y^{\log_x z} = 2\sqrt{2} \end{cases}$

ODPOWIEDZI

1.

a) x = 1
b) $x \in < 5;10 >$
c) x = 1
d) $x = 2 \vee x = -2$
e) x = 4
f) $1+\sqrt{2}$
g) x = 0
h) x = 2
i) x = 2
j) x = -1
k) x = 0
l) $x = 10^3 \vee x = 10^{-6}$
ł) x = 2
m) x = 10
n) x = 0
o) $x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$
p) $x = \frac{1}{2}$
r) x = 2
s) x = 9
t) x = 0
u) $x = 2 \vee x = 4$
w) $x \in \{ \frac{1}{10}; 1; 10 \}$
y) $x = 2^{-2-\sqrt{3}} \vee x = 2^{-2+\sqrt{3}}$

2.

a) $x \in (\frac{1}{4};4)$
b) $x \geq 1$
c) $x \in (-\infty;0)$
d) $x \geq 4$
e) $x \in (0;\frac{1}{2}) \cup (2;3)$
f) $x < \log_{\frac{3}{2}} \frac{5}{2}$
g) $x \in (\frac{1}{8};1) \cup (8;\infty)$
h) $x \in (1;\infty) \cup \{0\}$
i) $x \in (2;\infty)$
j) $x \in (-1;\frac{7}{3})$
k) $x \in (0;\log_2 5)$
l) $x \in (-\sqrt{5};-\frac{3\sqrt{2}}{2} > \cup < \frac{3\sqrt{2}}{2};\sqrt{5})$
ł) $x \in < 1;\infty)$
m) $x \in (\frac{1}{8};\frac{1}{4} > \cup < 1;2)$
n) $x \in < 1;5 >$
o) $x \in (0;2)$

p) $x \in (-\frac{1}{2};1)$

r) $x \in (-3;-1)$

s) $x \in (-\infty; \log_{\frac{1}{3}} 2)$

t) $x \in (0;\frac{1}{4}) \cup (1;4)$

u) $x \in (1;\infty)$

w) $x \in (-1;-\frac{1}{2})$

3. $x \in (-\infty;-4) \cup (-2;\infty)$

4. Dla $a = \frac{1}{16}$ jeden pierwiastek; dla $a > \frac{1}{16}$ dwa pierwiastki, dla $a \in (0;\frac{1}{16})$ nie ma pierwiastków.

5. x ≥ -2

6. Równanie ma cztery rozwiązania.

7. $x \in < -6;2)$

9. $a = \frac{1}{2} \vee a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 1

11. $a = 1 \vee a = \frac{1}{10}$

12. $x \in (-\infty;-4) \cup (-4;-2)$

13. $x_w = \frac{1}{8}$

14. $x \in (2\sqrt{2};3) \cup (3;\infty)$

15. -

16 $x = \log_2 5$

17. a = b

18. –

19. -

20. $m \in (-\infty;1)$

21. 3

22. -

23. a) D = <0; ∞) b) D = (0; 3)

24. m = $\frac{1}{10} \vee$ m = 10

25. -

26. $x \in (0;1) \cup (1;\infty)$

27. $x \in (-\infty;0) \cup (2;\infty)$

28. a) $\frac{10}{3}$ b) $-\frac{4}{3}$

29. 2520

30 x∈ (-4;0)

31. -

32. x∈ <4;10 >

33. a) $\frac{1}{4}$ b) $-\frac{13}{12}$

34. $m \in (-\infty;-1) \cup (1;\infty)$

35. -

36 $-\frac{1}{2}$

37 $x \in (-\infty;1>$

38. x = -1

39. $x \in (-\frac{10}{9};-1) \cup (1;\frac{10}{9})$

40. -
41. $x \in (-\infty; -1> \cup <0;1>$
42. $x \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$
43. $x \in (0; \frac{\sqrt{2}}{2}> \cup <2; \infty)$
44. $m \in (\frac{1}{4}; 1)$
45. x ∈ {1; 2; 4 }
46. x ∈ <-3; 1 >
47. $x \in (0;1) \cup (5; \infty)$
48. $\log 6 = \frac{p+1}{q}$
49. n ∈ {1, 2, 3, 4, 5 }
50. k ∈ (0; 1)
51. $x = \frac{9}{8}$
52. -
53. $x \in <0; \frac{4}{3})$
54. -
55. x = $\frac{1}{10}$ ∨ x = 10
56. x = 2
57. x = $\frac{5}{4}$ ∨ x = 5
58. -
59. $\begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$
60. -
61. a) 3 b) –1 c) 9 d) 0
62. $m \in (-\infty; 0)$
63. –
64. –
65. -
66. $x = -2 \vee x = 4$
67. $x = 2 \vee x = \frac{1}{2}$
68. -
69. x=-4
70. x=3
71. -
72. $x = \frac{1}{100}$ Wskazówka: $a^{\log b} = b^{\log a}$
73. –
74. -
75. x=1
76. $x = 1 \vee x = 4 \vee x = 0$
Wskazówka: zakładamy, że x>0 i logarytmujemy obie strony przy podstawie 10.
77. $a = \frac{\sqrt[3]{4}}{4}$
78. Dwa różne rozwiązania dla m<0 oraz jedno rozwiązanie dla m≥0.

79. Dwa różne rozwiązania dla $p \in \left(1;\frac{4}{3}\right)$, jedno podwójne rozwiązanie dla $p = \frac{4}{3}$, jedno rozwiązanie dla $p \in \left(0;1\right\rangle$.

80. $m \in \left(-3;1\right\rangle$

81. x=0

82. Dwa róże rozwiązania dla c∈ $-\frac{1}{4}$, jedno rozwiązanie dla $c \in (0;\infty)$

83. $m \in \left(0;\frac{1}{4}\right)$ Wskazówka: zadanie rozwiązać graficznie.

84. x=2

Wskazówka: $4^x = (3^{\frac{x}{2}}+1)^2$, stąd $2^x = 3^{\frac{x}{2}}+1$ i dzieląc przez 2^x mamy $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$.

Funkcja f(x)=$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$ jest funkcją malejąca (jako suma dwóch funkcji malejących) więc równanie musi mieć tylko jedno rozwiązanie.

85. a)D=$(-\infty;2)$; $m = 2-\sqrt{2}$; b) D=$(-\infty;2)\cup(7;\infty)$, x∈ $(6;7)\cup(9;\infty)$;

c)D=$\{x : (0 < x-m < 1 \vee x-m > 1) \wedge x \in R_+\}$, m∈ $\left(-\frac{1}{4};-\frac{15}{16}\right)$

86. a) x=0; b) x∈ (-2;1); c) a∈ $(-\infty;-1)$

87. a) $x = \frac{5-\sqrt{17}}{4} \vee x = \frac{5+\sqrt{17}}{4}$; b) x∈ $(0;1)\cup(1;3)$; c) $k \in (-3;-1)\cup(-1;\infty)$

88. $2^{3-2\sqrt{2}};2^{3+2\sqrt{2}}$

89. -

90. a) $x = \frac{1}{10} \vee x = 100$; b) x=1; c) nie ma rozwiązań

91. Wskazówka: po zlogarytmowaniu obu stron obu równań rozwiązać układ równań, gdzie niewiadomymi są $\log x$ i $\log y$

92. –

93. -

94. $x = 2^n$ Wskazówka: zamienić podstawy logarytmów na 2 i wykorzystaj wzór $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

95. $x = 2 \vee x = -2$

Wskazówka: należy uzasadnić, że równanie można zapisać w postaci $\left(\sqrt{2}-1\right)^x + \left(\sqrt{2}+1\right)^x = 6$ i podstawić nową zmienną t (t>0) za któryś ze składników.

96. $x \in \left\langle\frac{1}{2};1\right)\cup(1;2)\cup\left(\frac{8}{3};3\right)\cup(3;4)$

97. $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

98. $\begin{cases} x_1 = 16 \\ y_1 = 2 \\ z_1 = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = 16 \\ y_2 = \frac{1}{2} \\ z_2 = \frac{1}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x_3 = \frac{1}{16} \\ y_3 = \frac{1}{2} \\ z_3 = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x_4 = \frac{1}{16} \\ y_4 = 2 \\ z_4 = \frac{1}{4} \end{cases}$

Wskazówka: $z^{\log_y x} = \left(y^{\log_y z}\right)^{\log_y x} = \left(y^{\log_y x}\right)^{\log_x z} = x^{\log_y z}$ analogicznie $x^{\log_z y} = y^{\log_z x}$ i $y^{\log_x z} = z^{\log_x y}$