FUNKCJA KWADRATOWA

1. Wyznaczyć najmniejszą wartość trójmianu $y = x^2 + 4x + 1$ i podać zbiór wartości tej funkcji.
2. W którym punkcie styczna do paraboli $y = 2x^2 + 3x + 5$ jest równoległa do prostej $x + y + 5 = 0$?
3. Dla jakich wartości $m \in R$ równanie $mx^2 - x - 3 = 0$ ma dwa pierwiastki spełniające warunek $x_1^2 + x_2^2 = 7$?
4. Wykazać, że funkcja $y=2x^2$ jest malejąca w przedziale $(-\infty;0)$.
5. Wyznaczyć dziedzinę i zbiór wartości funkcji $y=\sqrt{x - x^2}$.
6. Wykazać, że dla każdej wartości parametru m parabola $y=x^2-(m-2)x-1$ ma dwa punkty wspólne z osią OX.
7. Rozwiązać nierówność $|x^2-1|>1-x$.
8. Na płaszczyźnie OXY naszkicować zbiory $A, B, A \cup B$ jeżeli:
   $A=\{(x,y): |y| \le x+3\}$ $B=\{(x;y): y-x^2-1 \ge 0\}$
9. Wyznaczyć wartości parametru a, dla których układ równań: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ ay^2 - x = 3 \end{cases}$
   ma dokładnie jedno rozwiązanie.
10. Dla jakich wartości c prosta $y=2x+c$ jest styczna do hiperboli $x^2 - y^2 = 1$?
11. Dla jakich wartości parametru $m \in R$ równanie $x^2-2mx+4m-3=0$ ma dwa pierwiastki różnych znaków?
12. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x)= \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$
    w przedziale $<-2;2>$
13. Dla jakich wartości parametru $m \in R$ parabola $y=mx^2+2x+m$ zawarta jest w półpłaszczyźnie $y \ge 0$?
14. Parabolę $y=x^2$ przesunięto o wektor $[-2;3]$. Naszkicować otrzymaną figurę i podać jej równanie.
15. Rozwiązać równanie $f(x-1)=4$ jeżeli $f(x)=x^2+x-2$ dla $x \in R$.
16. Rozwiązać algebraicznie i graficznie równanie $x^2-5|x|+4=0$.
17. Napisać równanie stycznej do paraboli $y=\frac{1}{4}x^2$ tworzącej z osią OX kąt 45°.
18. Dla jakiej wartości parametru a równanie $x^2+ax+a-1=0$ ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty?
19. Niech f(m) oznacza liczbę pierwiastków równania $|4x^2-4x-1|=m$. Narysować wykres funkcji $y=f(m)$
20. Naszkicować wykres funkcji: a) $f(x)=\sqrt{x^4 - 2x^3 + x^2}$ b) $f(x)= \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}$.
21. Dla jakich wartości parametru p suma pierwiastków równania $x^2+4px+3p+1=0$ jest najmniejsza?
22. Dla jakich wartości parametru p suma kwadratów pierwiastków równania $x^2+(k-3)x+k=0$ jest najmniejsza?
23. Wykazać, że $\exists_{x \in R}\ x<x^2+\frac{1}{2}$.
24. Trójmian $f(x)=ax^2+bx+c$ ma pierwiastki -1 i 3. Obliczyć $\dfrac{f(2)}{f(1)}$.
25. Przez punkt P(2;3) przechodzą dwie różne proste, z których każda ma dokładnie jeden punkt wspólny z parabolą $y=x^2$. Napisać równania tych prostych.

26. Dla jakich wartości parametru m nierówność $(m-4)x^2-2mx+2m<0$ jest spełniona dla każdego x?
27. Wyznaczyć wartość najmniejszą i wartość największą funkcji $y=\sqrt{x^2+1}$ w przedziale $<-1;2>$.
28. Rozwiązać nierówność: $\sqrt{2x^2+9} \geq 2x+3$.
29. Narysować na płaszczyźnie zbiór punktów, których współrzędne spełniają nierówność: $y^2+xy-2x^2<0$.
30. Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór $A=\{(x;y): y \geq x^2 \wedge y \leq x+1 \wedge y \leq 1-x\}$.
31. Dla jakich wartości parametru k równanie $(k-1)x^2+kx+1=0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie?
32. Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór $A=\{(x;y\}: x^2 \leq y+4<5\}$.
33. Dla jakich wartości parametru k liczba 1 jest pierwiastkiem równania $(k^2-1)x^2+2x+2k=0$?
34. Dla jakiej całkowitej liczby a równania: $x^2+ax+8=0$ i $x^2+x-6=0$ mają wspólny pierwiastek?
35. Dla jakiej wartości parametru c równanie $8x^2-6x+9c=0$ ma dwa pierwiastki, z których jeden jest równy kwadratowi drugiego?
36. Dla jakich wartości parametru t wyrażenie $\frac{x}{\sqrt{x^2-8x+|t|}}$ jest określone dla każdego $x \in R$?
37. Dla jakich wartości parametru m funkcja $y=(m-1)x^2+(m-1)x+m$ jest ujemna dla wszystkich wartości zmiennej x?
38. Dla jakich wartości parametru k równanie $x^2-(k-1)x+k+3=0$ ma rozwiązania tych samych znaków?
39. Dla jakich wartości parametru k pierwiastki równania $x^2+kx+(k+2)=0$ spełniają warunek $x_1^2+x_2^2=k$?
40. Dla jakiej wartości parametru m rozwiązania równania $(m-1)x^2+(m+2)x+m=0$ spełniają warunek $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=m+2$?
41. Znaleźć równanie stycznej do krzywej $y=x^2-1$ i prostopadłej do prostej $x+2y-4=0$.
42. Funkcję kwadratową $y=(x+3)(1-x)$ przedstawić w postaci kanonicznej i narysować jej wykres.
43. Dla jakich wartości parametru a dziedziną funkcji $y=\sqrt{ax^2+x+a}$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych?
44. Rozwiązać nierówność:
    a) $|1-x^2|>x+1$
    b) $x^2-|x-2|>0$
    c) $|x^2-1|<3$
45. Określ liczbę rozwiązań równania $mx^2-(m+1)x+m-1=0$ w zależności od wartości parametru m.
46. Parabola $y = x^2-2x-2$ ma jeden punkt wspólny z prosta równoległą do osi OX. Znaleźć równanie tej prostej.
47. Rozwiąż równanie $x|x|-|x|-1=0$.
48. Rozwiązaniem nierówności $x^2+bx+c<0$ jest przedział $(1;2)$. Wyznaczyć b i c.
49. Wiedząc, że pierwiastkiem równania $ax^2+bx+c=0$ jest $x_1=-\frac{b}{a}$ wyznaczyć c.
50. Wyznaczyć największą wartość funkcji $f(x)=-2x^2+8x+2$ w przedziale $<0;1>$.
51. Znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą m, dla której równanie

$x^2+2(2-m)x+m^2-8m+28=0$ ma dwa różne pierwiastki.

52. Jakie warunki muszą spełniać parametry a, b, c jeśli wiadomo, że zbiorem rozwiązań nierówności $ax^2+bx+c>0$ jest przedział (-3;3).
53. Udowodnić, że funkcja spełniająca warunki f(-1)=1; f(0)=1 i f(1)=9 ma dokładnie jedno miejsce zerowe.
54. Wyznaczyć miejsca zerowe funkcji $f(x)=||x-3|-1|+|x^2-6x+8|$.
55. Zbadać liczbę rozwiązań równania $x^2-2|x|+b=0$. w zależności od parametru b
56. Rozwiązać nierówność $|x+1|+|x-1|\geq x^2$.
57. Równania $x^2+ax+b=0$ i $x^2-ax+b=0$ mają te same dwa różne pierwiastki. Udowodnić, że a = 0.
58. Funkcja kwadratowa ma postać $f(x)=x^2+x+c$. Wiadomo, że f(3)=4. Obliczyć f(n-1).
59. Znaleźć taką dodatnią liczbę a, aby proste styczne do paraboli o równaniu $y=-x^2+a$, poprowadzone w punktach przecięcia paraboli z osią OX, były prostopadłe.
60. Sporządzić wykres funkcji $y=1+2|x^2-|x||$. Na podstawie wykresu odczytać ekstrema funkcji.
61. Dla jakich wartości parametru m liczba 2 leży między pierwiastkami równania $x^2+4mx+3m^2=0$.
62. Wykazać, że dwie styczne do wykresu paraboli $y=x^2$ poprowadzone z dowolnego punktu prostej $y=-\frac{1}{4}$ są do siebie prostopadłe.
63. Narysować wykres funkcji $y=|x^2-|x-1|-1|$ i na tej podstawie podać jej ekstrema.
64. Dla jakich wartości parametru m największa wartość funkcji $f(x)=(3m-5)x^2-(2m-1)x+\frac{1}{4}(3m-5)$ jest liczbą dodatnią?
65. Wyznaczyć pole trójkąta ograniczonego styczną do wykresu funkcji $f(x)=9-x^2$ w punkcie x=2 oraz osiami układu współrzędnych.
66. Znaleźć ekstrema funkcji $y=|x^2-x-2|+1$.
67. Dla jakich wartości parametru k pierwiastki równania $kx^2+4x+3=0$ spełniają warunek $|x_1-x_2|=2$?
68. Dla jakich wartości parametru m kwadraty pierwiastków równania $2x^2+mx+m-1=0$ są równe?
69. Znaleźć ekstrema funkcji $f(x)=-|x^2+x-2|$.
70. Rozwiązać nierówność $f(f(x))-(f(x))^2<6x$.
71. Trójmian kwadratowy $f(x)=x^2+px+q$ ma pierwiastki x_1 i x_2. Znaleźć trójmian $f(x)=x^2+bx+c$, którego pierwiastki są równe x_1+1 i x_2+1.
72. Napisać równanie prostej zawierającej tę cięciwę okręgu $x^2-4x+y^2+2y+1=0$, którą punkt $A(1;-\frac{1}{2})$ dzieli na dwie równe części.
73. O funkcji f określonej na zbiorze liczb rzeczywistych wiadomo, że jest ona okresowa, o okresie podstawowym T=2 oraz $f(x)=x^2-2x$ dla $x\in\langle 0;2\rangle$. Naszkicować wykres funkcji f i rozwiązać nierówność $f(x)\leq -\frac{3}{4}$.
74. Sporządzić wykres funkcji $f(x)=1+2|x^2-|x||$ i na tej podstawie podać jej ekstrema.
75. Jakie warunki spełniają parametry równania okręgu (współrzędne środka i długości promienia) jeśli wiadomo, że środek okręgu należy do osi y i okrąg ten ma z parabolą $y=x^2$ dokładnie dwa punkty wspólne?
76. Dla jakich wartości m równanie $m|x|=(x-1)^2$ ma cztery pierwiastki rzeczywiste?
77. Narysować zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają układ równań: $\begin{cases} x^4-y^4=|x^2-y^2| \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$
78. Zbadać dla jakich wartości parametru m punkty S(2;m) B(m-2;1) leżą po różnych stronach okręgu $x^2+y^2=9$.

79. Styczna do wykresu funkcji $f(x)=x^2-2x+5$ jest prostopadła do prostej o równaniu $y+\frac{1}{2}x=0$. Znaleźć współrzędne punktu styczności.
80. Pierwiastki równania $x^2-3ax+a^2=0$ spełniają zależność $x_1^2+x_2^2=63$. Wyznaczyć parametr a.
81. Niech Y oznacza zbiór wartości funkcji określonej wzorem $f(x)=kx^2-(2k-1)x+2k-1$. Wyznaczyć wszystkie wartości k, dla których $Y\subset R_+$.
82. Zaznaczyć na osi liczbowej zbiory $A=\{x: x\in R \wedge \underset{t\in R}{\exists}\, t^2+xt+t>0\}$

$B=\{x: x\in R \wedge \underset{s\in R}{\exists}\, xs^2+s+1\geq 0\}$ oraz B-A.

83. Zaznaczyć na osi liczbowej zbiory A,B oraz B-A, gdzie
$A=\{x: x\in R \wedge \underset{u\in R}{\forall}\, u^2+xu+1<0\}$ $B=\{x: x\in R \wedge \underset{w\in R}{\forall}\, w^2+w+x\leq 0\}$.
84. Dla jakiej wartości parametru k równanie $x^2+(m+1)x+m^2+k=0$ dla każdej liczby rzeczywistej m, nie ma pierwiastków rzeczywistych.
85. Drut o długości 20cm podzielono na dwie części. Jedną z nich zagięto w kwadrat, a drugą w trójkąt równoboczny. Przy jakim podziale drutu suma pól kwadratu i trójkąta jest najmniejsza?
86. Sformułować prawa de Morgana i sprawdzić ich słuszność dla zbiorów
$A=\{x: x\in R \wedge x^2\leq x\}$ i $B=\{x: x\in R \wedge |x+1|\leq 1\}$.
87. Wyznaczyć zbiór $A\cap B$ jeżeli $A=\{x: x\in R \wedge |x^2-x|-2<0\}$
$B=\{x: x\in R \wedge \underset{p\in R}{\forall}\, p2+(x+1)p+1\leq 0\}$.
88. Dla jakich wartości parametru $p\in R$ zbiory: $A=\{(x,y)\ x\in R \wedge y\in R \wedge y\geq x^2+px-p^2\}$ i $B=\{(x,y)\ x\in R \wedge y\in R \wedge x+y\leq -1\}$ są rozłączne?
89. Niech k oznacza liczbę pierwiastków równania $x-x^2=m$, gdzie m jest parametrem należącym do <-1;1>. Sporządzić wykres funkcji k=f(m).
90. Rozwiązać układ równań: $\begin{cases} x^2=13-y^2 \\ x(1+y)=11-y \end{cases}$
91. Rozwiązać układ równań: $\begin{cases} y^2=8-x^2 \\ \frac{1}{y}=1-\frac{1}{x} \end{cases}$
92. Obliczyć a z równania $\sqrt{3-a^2}-ax+\sqrt{3}=0$. Dla jakich wartości $x\in R$ istnieje rozwiązanie tego równania?
93. W prostokątnym układzie współrzędnych narysować zbiór $A\cap B$, gdzie
$A=\{(x,y)\ x\in R \wedge y\in R \wedge y\geq \sqrt{|x-1|}\}$ $B=\{(x,y)\ x\in R \wedge y\in R \wedge x^2+y^2-2x-5<0\}$.
Wskazać na rysunku punkt w zbiorze $A\cap B$, który leży najdalej od osi OY i wyznaczyć jego współrzędne.

Wskazówka: $y=\sqrt{|x-1|}=\begin{cases} \sqrt{x-1} & dla\ x\geq 1 \\ \sqrt{1-x} & dla\ x<1 \end{cases}$

94. Rozwiązać układ równań: $\begin{cases} y^2-2x=0 \\ x^2-x-2=0 \end{cases}$
95. Uzasadnić, że funkcja $f(x)=-(x-c)^2+c$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty;0)$.
96. Dana jest funkcja $f(x)=\begin{cases} x^2-x & dla\ x>0 \\ 2x+a & dla\ x\leq 0 \end{cases}$. Uzasadnić, że istnieje $a\in R$ dla którego równanie $f(x)=-\frac{1}{4}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

97. Dana jest funkcja f(x)= $\begin{cases} 5x+b & dla\ x \geq 0 \\ -x^2-x & dla\ x<0 \end{cases}$.Wiadomo, że równanie f(x)=$\frac{1}{8}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Jaki warunek spełnia parametr b?

98. Niech A_m={(x,y) x$\in$ R $\wedge$ y$\in$ R $\wedge$ $(x-m)^2+y^2 \leq 1$ $\wedge$ y≤x} gdzie m$\in$ R. Jaki powinien być parametr m aby pole figury A_m było równe $\frac{1}{2}$ Π ?

99. Niech A będzie zbiorem takich punktów płaszczyzny, że y-1≥$\sqrt{x^2+y^2-1}$. Udowodnić, że zbiór A jest nie pusty.
Wskazówka: Przy założeniu y≥1 podnosimy obie strony nierówności do kwadratu.

100. Rozwiązać równanie x+$\sqrt{x}$ =(x+$\sqrt{x}$ $)^2$.
Wskazówka: Podstawić x+$\sqrt{x}$ =t $\wedge$ x≥0.

101. Dana jest funkcja f(x)=$\sqrt{4-x^2}$. Rozwiązać równanie f(x)=x $\sqrt{3}$.

102. Wzór funkcji f ma postać f(x)=x2+bx+3. Wiedząc, że wartość bezwzględna różnicy miejsc zerowych jest równa 2, wyznaczyć b.

103. Funkcja kwadratowa f ma dwa różne miejsca zerowe. Każda z prostych $y=2(m-1)x-m^2$, gdzie m$\in$ R jest styczna do wykresu tej funkcji. Wyznacz zbiór wartości funkcji f.
Wskazówka: Dla m=1 styczna ma postać y=-1.

104. Wykaż, że jeśli a$\neq$0 $\wedge$ b$\neq$0 to co najmniej jedno z równań $ax^2+ax+b=0$; $bx^2+bx-\frac{1}{2}a=0$ ma rozwiązanie.

ODPOWIEDZI

1. $y_w=-3$; $D^{-1}=\langle -3;\infty)$
2. $(-1;4)$
3. $m=1$
4. -
5. $x\in \langle 0;1\rangle$; $f(x)\in \langle 0;\frac{1}{2}\rangle$
6. -
7. $x\in(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;\infty)$
8. -
9. $a=0 \vee a=\frac{1}{6}$
10. $c=\sqrt{3} \vee c=-\sqrt{3}$
11. $m\in(-\infty;\frac{3}{4})$
12. -
13. $m\in\langle 1;\infty)$
14. $y=(x+2)^2+3$
15. $x=-2 \vee x=3$
16. $x=4 \vee x=1 \vee x=-4 \vee x=-1$
17. $y=x-1$
18. $a\in R$
19. -
20. -
21. Taka liczba p nie istnieje.
22. $k=1$
23. -
24. $\frac{3}{4}$
25. $x=2$; $y=4x-4$
26. $m\in(-\infty;0)$
27. $y_{min}=1$; $y_{max}=\sqrt{5}$
28. $x\in(-\infty;0)$
29. -
30. -
31. $k=1 \vee k=2$
32. -
33. $k=-1$
34. $a=-6$
35. $c=\frac{1}{9}$
36. $x\in(-\infty;-16)\cup(16;\infty)$
37. $m\in(-\infty;-\frac{1}{3})$
38. $k\in(-3;3-2\sqrt{5})\cup(3+2\sqrt{5};\infty)$
39. Nie ma takiej liczby k.
40. Nie ma takiej liczby m.
41. $y=2x-2$
42. $y=-(x+1)^2+4$
43. $a\in\langle\frac{1}{2};\infty)$
44. a) $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(2;\infty)$

b) $x\in(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$
c) $x\in(-2;2)$

45. Nie ma rozwiązań dla $m\in(-\infty;\frac{3-2\sqrt{3}}{2})\cup(\frac{3+2\sqrt{3}}{2};\infty)$
 Jedno rozwiązanie dla $m=\frac{3-2\sqrt{3}}{2} \vee m=0 \vee m=\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$
 Dwa rozwiązania dla $m\in(\frac{3-2\sqrt{3}}{2};0)\cup(0;\frac{3+2\sqrt{3}}{2})$
46. $y=-3$
47. $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
48. $b=-3$ $c=2$
49. $c=0$
50. $y_{max}=8$
51. $m=7$
52. $a<0$ $b=0$ $c=-9a$
53. -
54. $x=2 \vee x=4$
55. $f(x)=x^2-2|x|+b$ jest funkcją parzystą, jeśli ma ono jedno rozwiązanie, to jest to $x=0$. Ale wtedy też $b=0$. Dla $b=0$ równanie ma 3 rozwiązania $x=0 \vee x=2 \vee x=-2$. Równanie można zapisać w postaci $(|x|-1)^2=1-b$ i dalej dyskutować.
56. $x\in\langle -2;2\rangle$
57. -
58. $f(n-1) = n^2-n-8$
59. $a=\frac{1}{4}$
60. $y_{min}=y(-1)=y(1)=1$; $y_{max}= y(-\frac{1}{2}) = y(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$
61. $m\in(-2;-\frac{2}{3})$
62. -
63. $y_{min} = y(-2) = y(1)=0$; $y_{max} = y(-\frac{1}{2})=\frac{9}{4}$
64. $m\in(4;\infty)$
65. $P=\frac{169}{8}$
66. $y_{min}= y(-1) =y(2)=1$; $y_{max} = y(\frac{1}{2}) =3\frac{1}{4}$
67. $k=-4 \vee k=1$
68. $m=4-2\sqrt{2} \vee m=4+2\sqrt{2} \vee m=0$
69. $f_{min}= f(-\frac{1}{2}) =-2\frac{1}{4}$; $f_{max}=f(-2) = f(1)=0$
70. $x\in(0;1)$
71. $f(x)=x^2+(p-2)x+q-p+1$
72. $y=2x-\frac{5}{2}$
73. $x\in\langle \frac{1}{2}+2k;\frac{3}{2}+2k\rangle$
74. $y_{min}= y(-1) = y(0) = y(1) =1$; $y_{max}= y(-\frac{1}{2}) = y(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$
75. $b=r^2+\frac{1}{4}$, gdzie $r\in(\frac{1}{2};\infty)$ lub $|b|<r$, gdzie $r\in R$; b jest rzędną środka okręgu, r długością promienia.
76. $m>4$
77. -

78. m$\in$ (-$\sqrt{5}$;2-2$\sqrt{2}$)$\cup$($\sqrt{5}$;2+2$\sqrt{2}$)
79. P(2;5)
80. a=3 $\vee$ a=-3
81. k$\in$ ($\frac{1}{2}$;∞)
82. A={x: x$\in$ (-2;2)} B={x: x$\in$ <$\frac{1}{4}$;∞)} B-A={x: x$\in$ <2;∞)}
83. A=(-∞;-2)$\cup$(2;∞) B=(-∞;$\frac{1}{4}$) B-A=<-2;$\frac{1}{4}$>
84. k$\in$ <$\frac{1}{3}$;∞)
85. Długość tych części to $\frac{80(3\sqrt{3}-4)}{11}$ i $\frac{60(9-4\sqrt{3})}{11}$.
86. -
87. A$\cap$B=<1;2)
88. p$\in$ (-1;$\frac{3}{5}$)
89. –
90. Wskazówka: Zapisujemy układ w postaci $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x+y=11-xy \end{cases}$

Podnosimy do kwadratu drugie równanie i odejmujemy od niego pierwsze. Następnie podstawiamy xy=u. $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

91. $\begin{cases} x=1-\sqrt{3} \\ y=1+\sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x=1+\sqrt{3} \\ y=1-\sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

92. a=0 $\wedge$ x$\in$ R lub a=$\frac{2\sqrt{3}x}{x^2+1}$ dla x$\in$ (1; ∞)
93. Współrzędne szukanego punktu otrzymujemy rozwiązując układ równań: $\begin{cases} x^2+y^2-2x-5=0 \\ y=\sqrt{x-1} \end{cases}$ $dla\ x \geq 1$ i otrzymujemy Q(3;$\sqrt{2}$).
94. (2;2) ; (2;-2)
95. -
96. -
97. b>$\frac{1}{8}$
98. m=0
99. -
100. x=0 $\vee$ x=$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$
101. x=1
102. b$\in$ {-4;4}
103. <-1; ∞)
104. -