

# Zbiór zadań sprawdzających z matematyki

dla uczniów liceów  
ogólnokształcących

Klasa IV b, rocznik 1982  
I Liceum Ogólnokształcącego  
im. Bolesława Krzywoustego w Słupsku

Słupsk 2001

**Opiekun i autor pomysłu:**

mgr Piotr Gumienny

**Nadzór:**

Bartosz Kiera

**Redakcja i skład komputerowy:**

Michał Kopera

**Autorzy działów:**

Adrian Apanel

Michał Budrewicz

Karolina Bylica

Leszek Fąfara

Monika Garbacz

Miłosz Hamerski

Kornelia Janiak

Monika Jermak

Joanna Kędziora

Bartosz Kiera

Katarzyna Kojder

Michał Kopera

Paweł Kostrzewski

Katarzyna Krawczykiewicz

Marek Krowieranda

Sebastian Kwapisz

Justyna Lichacy

Agnieszka Lis

Wojciech Możejko

Rafał Pasek

Cecylia Pędzich

Wojtek Ruciński

Dominik Sieciechowicz

Radosław Słomiński

Rafał Słoniewski

Magda Stebelska

Michał Szmigas

Aleksandra Szwabo

Agnieszka Śliwa

Kacper Pochylski

Wydane nakładem: I Liceum Ogólnokształcącego

im. Bolesława Krzywoustego w Słupsku

ul. Szarych Szeregów 15, 76-200 Słupsk

tel. 0 59 842 22 17

---

## Spis treści

ZBIORY LICZBOWE .....	3
FUNKCJE I ICH WŁASNOŚCI, WEKTORY.....	6
TRYGONOMETRIA.....	9
FUNKCJA LINIOWA.....	11
FUNKCJA LINIOWA II.....	13
UKŁADY RÓWNAŃ.....	15
FUNKCJA KWADRATOWA.....	17
WIELOMIANY .....	19
FUNKCJA WYMIERNA .....	21
FUNKCJA LOGARYTMICZNA.....	23
CIĄGI LICZBOWE.....	25
CIĄGI LICZBOWE II.....	28
GRANICA I CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI .....	30
POCHODNA FUNKCJI .....	32
KOMBINATORYKA I RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA.....	34
GEOMETRIA.....	36

**Druga część zbioru zawiera rozwiązania zadań.**

---

# Treści zadań

---

---

## Zbiory liczbowe.

---

### Grupa 1

1. Sprawdź czy dane wyrażenie jest prawem rachunku zdań **2 pkt.**

$$[(p \wedge q) \Rightarrow p] \Rightarrow (p \vee q)$$

2. Wyznacz sumę, różnicę, przekrój i dopełnienia zbiorów jeśli: **2 pkt.**

$$A = \langle -1, 2 \rangle \quad B = (0, +\infty)$$

3. Usuń niewymierność z mianownika. **3 pkt.**

$$\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{7}}$$

4. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość liczbową dla **3 pkt.**

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$\left(1 - \frac{9x - 9x^2}{3x + 1}\right) \left(1 - \frac{2}{1 - 3x}\right) : 2(1 - 9x^2)$$

5. Rozwiąż : **3 pkt.**

$$\begin{cases} |x - 2| + |4 - x| = 4 \\ |3 - 6x| + 2x > 9 \end{cases}$$

6. Rozwiąż: **3 pkt.**

7. Zamień liczbę z systemu dziesiętnego na system

$$25_{10}$$

dwójkowy:

**4 pkt.**

Suma	0-6 pkt.	6-10 pkt.	10-13 pkt.	14-17 pkt.	18-20 pkt.
Ocena	ndst.	dop.	dst.	db.	bdb.

### Grupa 2

1. Sprawdź czy dane wyrażenie jest prawem rachunku zdań **2 pkt.**

$$\sim p \wedge q \Rightarrow [(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \vee p)]$$

2. Wyznacz sumę, różnicę, przekrój i dopełnienia zbiorów jeśli: **2 pkt.**

$$A = \{n \in N; n/8 \cap n \langle 9\}$$

$$B = \{n \in N; 2 \leq n \langle 5\}$$

$$X = \{n \in N; n \langle 10\}$$

3. Usuń niewymierność z mianownika. **3 pkt.**

$$\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

4. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość liczbową dla  $a = \sqrt{3} - 1$

$$\left(\frac{a}{a-2} - \frac{a}{a+2}\right) : \frac{4a}{a^4 - 2a^3 + 8a - 16} + 6a$$

5. Rozwiąż : **3 pkt.**

$$|3x+2| - |2x-3| + 4$$

6. Rozwiąż: **3 pkt.**

$$|2x+1| > x+7$$

7. Zamień liczbę z systemu dwójkowego na system dziesiętny: **4 pkt.**

$$10101011_2$$

Suma	0-6 pkt.	6-10 pkt.	10-13 pkt.	14-17 pkt.	18-20 pkt.
Ocena	ndst.	dop.	dst.	db.	bdb.

---

# Funkcje i ich własności, wektory.

---

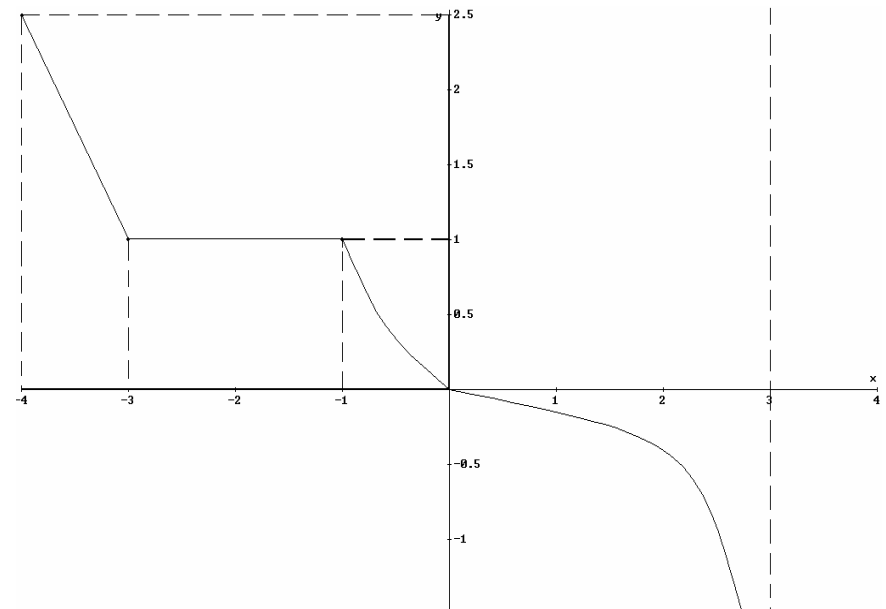
## Grupa 1

1. Dany jest wykres funkcji  $y = f(x)$ . Podaj:

- dziedzinę
- zbiór wartości
- przedziały monotoniczności
- miejsca zerowe

(\*)

- $f(<-1,3))$
- $f^{-1}(<0, \frac{5}{2} >)$





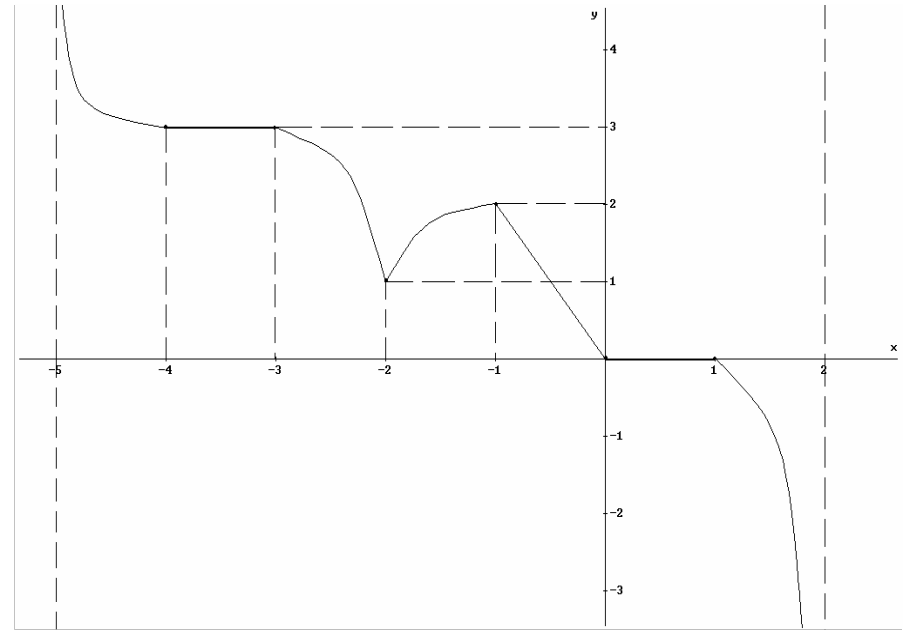
2. Narysuj wykres funkcji  $y = |(x-1)^2 - 3|$
3. Wyznacz dziedzinę funkcji  $y = \sqrt{x+1} + \frac{1}{3x-6}$
4. Wyznacz  $f(f(x))$ , jeśli  $f(x) = 3x - 2$ .
5. Dane są punkty A(2,1) i B(3,3). Wyznacz:
  - długość wektora  $\overrightarrow{AB}$
  - punkt P dzielący wektor  $\overrightarrow{AB}$  w stosunku 2 : 3

Za każde zadanie można otrzymać 3 punkty.

Punkty	<0,6>	(6,8>	(8,11>	(11,14>	(14,15>
Ocena	ndst	dop	dst	db	bdb

## Grupa 2

1. Dany jest wykres funkcji  $y = f(x)$ . Podaj:
  - dziedzinę
  - zbiór wartości
  - przedziały monotoniczności
  - miejsca zerowe
  - (\*)
  - $f(<-3,1>)$
  - $f^{-1}(<3,0>)$



2. Narysuj wykres funkcji  $y = |(x-3)^2 - 1| + 1$
3. Wyznacz dziedzinę funkcji  $y = \frac{1}{\sqrt{x+2} + x}$
4. Wyznacz  $f(f(x))$ , jeśli  $f(x) = \frac{1}{2x+3}$
5. Dany jest wektor  $\vec{AB} = [2, -3]$  i punkt  $A(5, 2)$ . Wyznacz punkt B oraz znajdź punkt P, taki że  $\vec{AP} + \vec{BP} = 4\vec{AB}$ .

Za każde zadanie można otrzymać 3 punkty.

Punkty	<0,6>	(6,8>	(8,11>	(11,14>	(14,15>
Ocena	ndst	dop	dst	db	bdb

---

# Trygonometria

---

## Grupa 1

1. Narysuj wykres funkcji  $f(x) = \sin x + |\sin x|$  **4 pkt.**
2. Przedstaw w postaci iloczynu  $1 - 2\cos x = \cos 2x$  **4 pkt.**
3. Sprawdź czy dane wyrażenie jest tożsamością trygonometryczną
  - a)  $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} \cdot \frac{\cos x}{1 + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  **2.5 pkt.**
  - b)  $\frac{\sin 3x - \sin x}{\cos x - \cos 3x} = \operatorname{ctgx}$  **2.5 pkt.**
4. Rozwiąż
  - a)  $\sin 2x + \cos x \geq 0$  **2.5 pkt.**
  - b)  $2\cos 2x + 3 \leq 4\cos x$  **2.5 pkt.**
5. Rozwiąż
  - a)  $\sin x - \cos x = 1$  **2.5 pkt.**
  - b)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x + \dots = \frac{\sqrt{3}}{2}$  **2.5 pkt.**

Punktacja:

Punkty	<0-8)	<8-12)	<12,16)	<16,21)	<21,23>
Ocena	ndst	dop	dst	db	bdb

## Grupa 2

1. Przedstaw w postaci iloczynu **4 pkt.**  
 $1 - \operatorname{tg}^2 \alpha$
2. Sprawdź, czy dane wyrażenie jest tożsamością trygonometryczną
- a)  
 $\frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = 2 \sin \alpha$  **2,5 pkt.**
- b)  
 $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$  **2,5 pkt.**
3. Rozwiąż **4 pkt.**  
 $4 + 4 \sin x + \cos^2 x \geq 0$
4. Rozwiąż **4 pkt.**  
 $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$
5. Uzależnij  $\sin \alpha$  i  $\cos \alpha$  od  $\operatorname{tg} \alpha$  **4 pkt.**

Punktacja:

Punkty	<0-7)	<7-11)	<11,15)	<15,19)	<20,21>
Ocena	ndst	dop	dst	db	bdb

---

## Funkcja liniowa

---

### Grupa 1

1. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt P (3,-2) oraz :
  - a) nachylonej do osi OX  $\alpha = 120^\circ$
  - b) równoległej do osi OX
  - c) równoległej do prostej  $x+2y-4=0$
  - d) prostopadłej do prostej  $-x+3y=0$
2. Znaleźć odległość między prostą  $3x-2y+6=0$  i  $3x-2y-2=0$ .
3. Dane są proste ,których przecięcia wyznaczają trójkąt ABC .  
Wyznacz:  $x + y - 3 = 0$  ;  $x - y - 3 = 0$  ;  $3x - y - 1 = 0$ 
  - a) wierzchołki tego trójkąta
  - b) obwód
  - c) wysokości ( i ich równania)
  - d) pole trójkąta
4. Zaznacz na płaszczyźnie przekrój zbiorów A i B , jeśli :  
 $A = \{ (x, y) ; y - |x| > 0 \}$   
 $B = \{ (x, y) ; 2x - y - 1 < 0 \}$
5. Rozwiąż metodą wyznaczników :
$$\begin{cases} (y+1)^2 - x(4x+5) = (y+2x)(y-2x) \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

## Grupa 2

1. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt P (5,-1) oraz :
  - a) nachylonej do osi OX  $\alpha = 60^\circ$
  - b) równoległej do osi OY
  - c) równoległej do prostej  $2x+y-3=0$
  - d) prostopadłej do prostej  $-x+y=0$
2. Znaleźć odległość między prostymi:
  - $5x-y+2=0$
  - $5x-y-4=0$
3. Dane są proste ,których przecięcia wyznaczają trójkąt ABC .  
Wyznacz:  
 $x + y - 2 = 0$  ;  $2x - y - 1 = 0$  ;  $2x - y - 1 = 0$ 
  - a) wierzchołki tego trójkąta
  - b) obwód
  - c) wysokości ( i ich równania)
  - d) pole trójkąta
4. Zaznacz na płaszczyźnie przekrój zbiorów A i B , jeśli :  
 $A = \{ (x, y) ; y - |x| < 0 \}$   
 $B = \{ (x, y) ; 3x - y + 3 > 0 \}$
5. Rozwiąż metodą wyznaczników :
$$\begin{cases} (x+1)^2 - x(4x+5) = (y+2x)(y-2x) \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

Za każde zadanie można otrzymać 3 punkty.

Punkty	<0,6>	(6,8>	(8,11>	(11,14>	(14,15>
Ocena	ndst	dop	dst	db	bdb

---

## Funkcja liniowa II

---

### Grupa 1

1. Znajdź wszystkie liczby całkowite spełniające nierówność:

$$\frac{x^2 - x + 4}{3} + \frac{2x - 7}{2} \leq \frac{x^2}{3} + 3x - 1$$

2. Dany jest punkt A o współrzędnych (3,-1) oraz prosta k o równaniu  $x - 3y + 7 = 0$ . Wyznacz równanie prostej prostopadłej do k i przechodzącej przez punkt A. Podaj postać ogólną, kierunkową oraz odcinkową tego równania. Sporządź odpowiedni rysunek.
3. Narysuj wykres funkcji:  $y = 2|x| - |x + 2|$ . Przedyskutuj istnienie i liczbę rozwiązań równania  $m = 2|x| - |x + 2|$
4. Dane są wierzchołki trójkąta i ich współrzędne: A(-1,1), B(2,4), C(4,2). Wyznacz równanie prostej zawierającej środkową boku AB, pole trójkąta i promień okręgu opisanego.
5. Zaznacz na płaszczyźnie przekrój zbiorów A i B jeśli:  
 $A = \{(x, y); y - |x| > 0\}$   
 $B = \{(x, y); 2x - y - 1 < 0\}$

## Grupa 2

1. Znajdź wszystkie liczby całkowite spełniające nierówność:  $(3y - 1)^2 + (4y + 1)^2 \geq (5y + 2)^2$
2. Dane są punkty i ich współrzędne: K(3,2), L(2,-1). Napisz równanie prostej przechodzącej przez te dwa dane punkty oraz równanie prostej do niej równoległej przechodzącej przez punkt R(-1,4). Sporządź rysunek.
3. Narysuj wykres funkcji:  $y = ||x - 2| - 1|$ . Przedyskutuj istnienie i liczbę rozwiązań równania  $a = ||x - 2| - 1|$
4. Dane są proste:  $x + y - 3 = 0$ ;  $x - y - 3 = 0$ ;  $3x - y - 1 = 0$ , których punkty przecięcia wyznaczają trójkąt ABC. Wyznacz: współrzędne wierzchołków trójkąta, obwód trójkąta, promień okręgu wpisanego (wiedząc, iż pole trójkąta wynosi  $8\sqrt{2}$ ).
5. Zaznacz na płaszczyźnie przekrój zbiorów A i B jeśli:  
 $A = \{(x, y); y + |x| - 1 \leq 0\}$   
 $B = \{(x, y); 2 - x < 0\}$

Za każde zadanie można otrzymać 3 punkty.

Punkty	<0,6>	(6,8>	(8,11>	(11,14>	(14,15>
Ocena	ndst	dop	dst	db	bdb



---

# Układy równań

---

## Grupa 1

1. Rozwiąż układy równań:

$$\text{a) } \begin{cases} (x+1)^2 - 2y - 12 = (x-3)(x+3) \\ 3x - y = -4 \end{cases}$$

b) Przy rozwiązywaniu układu skorzystaj z metody wyznaczników

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$$

2. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} (m-1)x + 2y = 1 \\ x + my = 1 \end{cases}$$

w którym  $x, y$  są niewiadomymi, zaś  $m$  jest parametrem. Przeprowadź dyskusję ze względu na parametr  $m$ .

3. Rozwiąż układ równań z trzema niewiadomymi

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = -3 \end{cases}$$

4. Dane są macierze:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

oblicz: a)  $(A+B)^T$       b)  $(A \cdot B)$

## Grupa 2

1. Rozwiąż układy równań

$$\text{a) } \begin{cases} (x-3)^2 - (x-5)(x+5) = 2y + 48 \\ \frac{(x+y)}{2} - \frac{(x-y)}{4} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

b) Przy rozwiązywaniu układu skorzystaj z metody wyznaczników

$$\begin{cases} (y+1)^2 - x(4x+5) = (y+2x)(y-2x) \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

2. Dla jakich  $m$  rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5m - 7 \\ x - 4y = m + 3 \end{cases}$$

jest para liczb różnych znaków?

3. Rozwiąż układ z trzema niewiadomymi

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y + 2 = 5 \\ z + x = 4 \end{cases}$$

4. Dane są macierze:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

oblicz:

a)  $(A-B)^T =$

b)  $A^T \cdot B =$

Za każde zadanie można otrzymać 4 punkty.

Punkty	<0,6>	(6,8>	(8,12>	(12,14>	(14,16>
Ocena	ndst	dop	dst	db	bdb

---

## Funkcja kwadratowa

---

### Grupa 1

1. Rozwiąż:  $x^4 - 3(x^2 - 1) = 7(x^2 - 3)$
2. Narysuj wykres funkcji:  $y = x|x| - 2x + 3$
3. Zbadaj liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru  $m$  sporządź wykres tej zależności.  
 $(m - 1)x^2 - 2mx + m = 0$
4. Dla jakich  $t$  suma kwadratów pierwiastków równania  $x^2 - (t - 5)x + t^2 - 6t + 5 = 0$  jest większa od 7.
5. Dla jakich  $a$  prosta  $y - 2x - a = 0$  jest sieczną okręgu  $x^2 + y^2 - 4 = 0$
6. Zaznacz na płaszczyźnie 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 \leq 0 \\ y > |x| \\ 1 + xy \geq 0 \end{cases}$$

### Grupa 2

1. Rozwiąż:

$$x^4 - 8(x^2 - 1) + 4 = 0$$

2. Narysuj wykres funkcji:

$$y = 2x^2 + x - 3$$

3. Przedyskutuj istnienie i liczbę rozwiązań równania

$$x^2 + mx + m + 3 = 0$$

Sporządź wykres tej zależności.

4. Dla jakich  $m$  rozwiązaniem równania  $x + (3m - 2)x + m + 2 = 0$  są dwa pierwiastki, których suma jest większa od 8.
5. Dla jakiego parametru  $t$  prosta  $3x + 4y + t = 0$  jest styczna do okręgu  $x^2 + y^2 - 4 = 0$ .
6. Zaznacz na płaszczyźnie
- $$\begin{cases} y > |x| \\ x^2 + y^2 \leq 4 \\ xy \geq 1 \end{cases}$$

Za każde zadanie można otrzymać od 0 do 4 punktów.

Punkty	<0,8)	<8,12)	<12,16)	<16,21)	<21,24)
Ocena	ndst	dop	dst	db	bdb

---

# Wielomiany

---

## Grupa 1

1. Dla jakich  $a, b$  wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez  $P(x)$ , jeśli :

$$W(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx + a \quad P(x) = x^2 - 1$$

2. Dla jakich  $k$  wielomian:

$$W(x) = x^4 - kx^3 + 3x^2 - 2kx - 1$$

daje przy dzieleniu przez  $(x - 2)$   
resztę  $R = 3$

3. Rozwiąż:

$$x^3 - 2x^2 + |x - 2| = 0$$

4. Rozwiąż:

$$-x^5 + 4x^4 + 10x > 3x^3 + 6x^2 + 4$$

5. Wiadomo, że liczba 1 jest pierwiastkiem równania

$$x^3 + 2x^2 - x + m = 0$$

Wyznacz najmniejszy pierwiastek tego równania.

6. Wykaż, że dla  $n \in \mathbb{N}$  wielomian

$$W(x) = (x^3 - x + 1)^{2n} + (x^2 - 1)^n - 1$$

jest  $P(x) = (x - 1)(x + 1)$  podzielny przez

## Grupa 2

1. Dla jakich  $a, b$  wielomiany  $W(x)$  i  $P(x)$  są równe, jeśli :

$$W(x) = (x-1)^2 (x^3 + 2x^2 - bx + 2b - 1)$$

2. Dla jakiego  $a$  wielomian  $W(x) = -a^2x^3 - 3ax^2 - 6x - 2a$  przy dzieleniu przez  $P(x) = x^2 + 2x - 3$  daje resztę

3. Rozwiąż:

$$2x^4 - 3x^3 - 13x^2 = |6x + 8|$$

4. Rozwiąż:

$$x^5 + 3x^4 - 8x^2 - 9x \leq 3$$

5. Wiadomo, że liczby 2 i 3 są pierwiastkami wielomianu

$$W(x) = 2x^3 + mx^2 - 13x + n$$

wyznacz  $m$  i  $n$ , oraz oblicz trzeci pierwiastek

6. Wykaż, że dla  $n \in \mathbb{N}$  wielomian

$$W(x) = (x^3 - x + 1)^{2n} + (x^2 - 1)^n - 1$$

jest podzielny przez

$$P(x) = (x-1)(x+1)$$

Za każde zadanie można otrzymać od 0 do 3 punktów.

Punkty	<0,6>	(6,8>	(8,12>	(12,15>	(15,17>	(17,18>
Ocena	ndst	dop	dst	db	bdb	cel

---

# Funkcja wymierna

---

## Grupa 1

1. Narysuj wykres funkcji :

$$y = \left| \frac{1}{x-2} - 1 \right|$$

2. Doprowadź dane wyrażenie do najprostszej postaci i oblicz jego wartość dla podanych argumentów.

$$\frac{a-c}{a^2+ac+c^2} \cdot \frac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2} \cdot \left( 1 + \frac{c}{a-c} - \frac{1+c}{c} \right) : \frac{c(1+c)-a}{bc} =$$

$$\text{dla } a = -1, b = \sqrt{3}, c = -\frac{1}{2}$$

3. Rozwiąż:

$$\frac{x+2}{x-2} = \frac{x+3}{x-3} + \frac{2}{x^2-5x+6}$$

4. Rozwiąż:

$$\frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+1} \leq \frac{3}{x^2-4x+4}$$

5. Przedyskutuj istnienie i liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru.

$$\frac{x}{|x-1|} - m = 0$$

## Grupa 2

1. Narysuj wykres funkcji.

$$y = \left| \frac{2x-1}{x+1} \right|$$

2. Doprowadź dane wyrażenie do najprostszej postaci i oblicz jego wartość dla podanych argumentów.

$$\left( \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} \right) : \left( \frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} \right)$$

$$\text{dla } a = -\sqrt{3}, b = \frac{2}{3}$$

3. Rozwiąż:

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} + x = -1 \\ \frac{x}{x+y} = -2 \end{cases}$$

4. Rozwiąż:

$$1 \leq \frac{2x^2 - 7x - 29}{x^2 - 2x - 15} < 2$$

5. Przedyskutuj istnienie i liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru.

$$\frac{x}{x-a} = \frac{x+1}{x+a}$$

Za każde zadanie można otrzymać od 0 do 3 punktów.

Punkty	<0,6>	(6,8>	(8,11>	(11,13>	(13,15>
Ocena	ndst	dop	dst	db	bdb



---

## Funkcja logarytmiczna

---

### Grupa 1

1. Rozwiąż

$$\frac{2^{x^2}}{2^{5x}} \cdot 2^{10} =$$

**3pkt.**

2. Oblicz

a)  $2^{1+\log_4 12} =$

b)  $\sqrt[3]{2^{\frac{1}{\log_3 2}}} =$

c)  $\log_{\sqrt{2}} 8 \cdot \log_2 \sqrt{2} =$

**3pkt.**

3. Rozwiąż

$$3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 3^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x-2}{3}}$$

**3pkt.**

4. Oblicz

$$\log_{2^3} \cdot \log_{3^4} \cdot \log_{4^5} \cdot \dots \cdot \log_{7^8} =$$

**3pkt.**

5. Rozwiąż

a)  $\log(x-6) - \frac{1}{2} \log 2 = \log_3 + \frac{1}{2} \log(x-10)$

b)  $\log \sqrt{x-5} + \log \sqrt{2x-3} + 1 = \log 30$

c)  $\log_{2^2} x + 3 = 2 \log_2 x^2$

d)  $\log 2 + \log(4^{x-2} + 9) = 1 + \log(2^{x-2} + 1)$

**4pkt.**

6. Rozwiąż

a)  $\log(x+6) > 0$

b)  $\log_{0,1}(3-x) > 1 + \log_{0,1} 20$

c)  $\log_2 x^2 - \log_2 x \geq 2$

3pkt.

Punkty	<0,6>	(6,9>	(9,13>	(13,17>	(17,19>
Ocena	ndst	dop	dst	db	bdb

---

## Ciągi liczbowe

---

### Grupa 1

1. Wyznacz granice ciągów:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n)$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^3 - 2n + 1)}{4}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n-1)(n+2)}{n^2 + 3n}$

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 5n - 1}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2 + n + 2n}}{3(n-1)}$

f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}$

2. Zbadaj czy liczby a, b, c tworzą ciąg arytmetyczny, jeśli:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n}, \quad b = 0,666\dots, \quad c = \sum_{n=1}^8 (-1)^n \frac{n}{9}$$

3. Dla jakiego parametru t granicą ciągu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 4n - 1} + tn}{2(n+3)}$$
 jest liczba 3.

4. Wykaż z definicji, że granicą ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{n+2}{n-1}$$
 jest liczba 1. Podaj interpretację dla  $\varepsilon = 0,02$ .

5. Rozwiąż:  $1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \dots \leq 1+x$

6. W trójkącie równobocznym T1 o boku długości a połączono środki boków otrzymując trójkąt T2. W powstałym trójkącie znowu połączono środki boków otrzymując trójkąt T3 itd. Wyznacz sumę pól wszystkich trójkątów.

## Grupa 2

1. Rozwiąż:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{1 - 2^{n-1}}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 - 1)(n + 1)}{n^3 + n(n - 2)}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{n + 1}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n^2 + 3n - 1}{n^2 + 7}}$

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n-1} - \sqrt{n+3})$

f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2 - 1} - n}{\sqrt{n^2 - 1} + n}$

2. Sprawdź, że ułamek dziesiętny skończony 0,21 i ułamek dziesiętny nieskończony 0,20(9)... przedstawiają tę samą liczbę.

3. Dla jakiego parametru t granicą ciągu

$$a_n = \frac{t(n-1)(tn+2)}{2n^2+3n-1} \text{ jest } 2.$$

4. Rozwiąż:  $1 + \frac{2x}{1+x} + \frac{4x^2}{(1+x)^2} + \dots = 5$

5. Trzy liczby o sumie 15 tworzą ciąg arytmetyczny, środkowa liczba zmniejszona o 2 tworzy z pozostałymi ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.
6. W kwadrat o boku  $a$  wpisano koło. W to koło wpisano kwadrat, w który wpisano znowu koło itd. W ten sposób określony jest ciąg kwadratów. Oblicz sumę pól wszystkich tych kwadratów.

Za każde zadanie można otrzymać 3 punkty.

Punkty	<0,6>	(6,9>	(9,13>	(13,16>	(16,18>
Ocena	ndst	dop	dst	db	bdb

---

## Ciągi liczbowe II

---

### Grupa 1

1. Zbadaj monotoniczność i ograniczenie ciągu. Sporządź jego wykres

$$a_n = \frac{2n+1}{n+1}$$

2. Rozwiąż równanie  $1 + 7 + 13 + 19 + \dots + x = 280$
3. Cztery Liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Suma dwóch pierwszych jest równa 60, a iloczyn dwóch końcowych wyrazów tego ciągu 75. Wyznacz ten ciąg.
4. Między liczby 32 i 500 wstawić dwie tak, aby wszystkie cztery tworzyły ciąg geometryczny.
5. Liczby a, b, c, d tworzą ciąg arytmetyczny, zaś liczby a+5, b+6, c+9, d+15 ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.

### Grupa 2

1. Zbadaj monotoniczność i ograniczenie ciągu:  $a_n = \frac{n+1}{2}$
2. Rozwiąż równanie:  $2x + 4 + \frac{8}{x} + \dots \leq 5x + 3$
3. Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Przeciwprostokątna jest równa 30. Wyznacz długości pozostałych boków. I oblicz pole trójkąta.

4. Między liczby 2 i 56 wstawić dwie tak, aby trzy pierwsze tworzyły ciąg geometryczny, a trzy ostatnie arytmetyczny.
5. Cztery liczby tworzą ciąg geometryczny w którym suma wyrazów skrajnych wynosi 112, a wyrazów środkowych 48. Wyznacz te liczby.

Za każde zadanie można uzyskać 3 pkt.

Punkty	<0,6>	(6,8>	(8,11>	(11,13>	(13,15>
Ocena	ndst	dop	dst	db	bdb

---

# Granica i ciągłość funkcji

---

## Grupa 1

1. Korzystając z definicji wykaż, że:  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 7) = 13$ .
2. Dana jest funkcja. Zbadaj ciągłość tej funkcji w punktach  $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ 1 & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{dla } 1 \leq x < 3 \\ 4 - x & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$$

3. Oblicz:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} =$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} =$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3} =$

e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x} - \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \right) =$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin 4x}{x} =$

f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x^2 + x + 1) =$



## Grupa 2

1. Korzystając z definicji wykaż, że:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{x-1} = 4$ . **3pkt.**

2. Zbadaj ciągłość funkcji. Sporządź rysunek. **3pkt.**

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x+1} & \text{dla } x < -2; \\ (x+1)^2 & \text{dla } -2 \leq x < 0; \\ \sqrt{x} + 1 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

3. Oblicz:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} =$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} =$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} =$

d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} =$

e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x^2} + \sqrt{x} =$

f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - x^3}{x^2 + x} =$

**12pkt**

Punkty	<0,6>	(6,9>	(9,12>	(13,16>	(16,18>
Ocena	ndst	dop	dst	db	bdb

---

# Pochodna funkcji

---

## Grupa 1

1. Wyznacz pochodne funkcji:

$$\text{a) } y = \frac{2x^3 - 4x^2 - x - \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{d) } y = \sqrt{x^2 - 3x}$$

$$\text{b) } y = \frac{x^2 - 2x - 4}{3x + 5}$$

$$\text{e) } y = (2x^3 + \frac{x^2}{3} - 5x + 1)$$

$$\text{c) } y = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\text{f) } y = \frac{\sqrt{x} + x}{\sqrt[3]{x^2}}$$

2. Wyznacz równanie stycznej do krzywej  $y = 2x + 3$  w punkcie  $x_0 = -3$ . Sporządź rysunek.

3. Rozwiąż równanie

$$f^2(x) + f(f(x)) - 2f'(x) + f''(x) = 0 \text{ jeśli}$$

$$f(x) = 2x + 3$$

4. a) Zbadaj monotoniczność funkcji  $f(x) = x^4 + 4x^2 - 3$

b) Wyznacz ekstremum funkcji  $f(x) = \frac{x^2}{(2+x)^2}$

5. Który z prostokątów o obwodzie 8 ma największe pole?

## Grupa 2

1. Wyznacz pochodne funkcji:

a)  $y = 3x^2 - 2x + 1$

d)  $y = \frac{(x^2 + 5x)^2}{\sin x}$

b)  $y = \frac{x^2 + 3x}{2x + 4}$

e)  $y = (x - 1)^3 \cdot (x + 1)^2$

c)  $y = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

f)  $y = x^2(3x - 7)$

2. Wyznacz równanie stycznej do krzywej  $y = \sqrt{x}$  w punkcie  $x_0 = 4$ . Sporządź rysunek.

3. Rozwiąż równanie  $[f'(x)]^2 + f(x) + 1 = 0$  jeśli  $f(x) = \sin x$

4. a) Zbadaj monotoniczność funkcji  $f(x) = \frac{x^3 - 2x}{2}$

b) Wyznacz ekstremum funkcji  $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$

5. Wyznaczyć największą wartość pola prostokąta, którego dwa wierzchołki leżą na paraboli  $y = -x^2 + 9$ , a pozostałe na osi OX.

Za każde pytanie można otrzymać 3 punkty.

Punkty	<0,6>	(6,8>	(8,11>	(11,13>	(13,15>
Ocena	ndst	dop	dst	db	bdb

---

# Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

---

## Grupa 1

1. Ile jest liczb czterocyfrowych zaczynających się cyfrą 6, w których żadna liczba się nie powtarza.
2. Wykaż, że jeśli zdarzenia A i B są niezależne, to zdarzenia  $A'$  i  $B'$  też są niezależne.
3. W kwadrat o boku 4 wpisano koło. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany punkt kwadratu nie będzie należał do koła.
4. Obok CPN-u przejeżdża pięć razy więcej samochodów ciężarowych niż osobowych. Prawdopodobieństwo, że przejeżdżający samochód osobowy zatankuje wynosi 0,01 że ciężarówka 0,05.
  - a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że przejeżdżający samochód będzie tankował.
  - b) Samochód zatankował, jakie jest prawdopodobieństwo, że był to samochód osobowy.
5. Z tali 24 kart losujemy 4 karty po jednej, za każdym razem zwracając wylosowaną kartę do tali. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania :
  - a) dwa razy figury,
  - b) trzy razy pika.

## Grupa 2

1. Numer rejestracyjny samochodu składa się z trzech liter i czterech cyfr. Ile różnych samochodów można zarejestrować; liter – 24 , cyfr – 10.

2. Wykaż, że jeśli zdarzenia A i B są niezależne oraz  $A \cup B = \Omega$  to  $P(A)=1$  lub  $P(B)=1$ .
3. Mamy 2 urny. W pierwszej są 3 białe i 6 czarnych kul, a w drugiej 5 białych i 4 czarne kule. Rzucamy kostką do gry. Jeżeli wypadną mniej niż 3 oczka, losujemy kulę z urny pierwszej, w przeciwnym razie kulę z drugiej urny. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągniemy kulę czarną?
4. Na stu mężczyzn pięciu i na tysiąc kobiet dwie nie rozróżniają kolorów. Z grupy o jednakowej liczbie kobiet i mężczyzn wylosowano jedną osobę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że:
  - a) wylosowana osoba nie rozróżnia kolorów,
  - b) wylosowana osoba jest mężczyzną, jeśli wiadomo, że nie rozróżnia kolorów.
5. W schemacie n prób Bernoulliego prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie jest równe  $1/3$ . Jakie musi być n aby prawdopodobieństwo uzyskania ma co najmniej jednego sukcesu było większe od  $65/85$ .

Za każde zadanie można otrzymać 3 punkty.

Punkty	<0,6>	(6,8>	(8,11>	(11,13>	(13,15>
Ocena	ndst	dop	dst	db	bdb

---

# Geometria

---

## Grupa 1

1. W trójkącie równoramiennym ABC dana jest podstawa  $AB = a$  i wysokość  $CD = h$ . Znaleźć promień okręgu stycznego do prostych AC i BC odpowiednio w punktach A i B.
2. Znaleźć pole trójkąta mając dany jego bok oraz dwa kąty przyległe do tego boku.
3. Dwa kwadraty takie, że jeden powstaje z drugiego poprzez obrót dookoła środka kwadratu o  $45^\circ$ , tworzą szesnastokąt w kształcie gwiazdy. Obliczyć pole tego szesnastokąta wiedząc, że jego obwód równa się  $a$
4. W trapezie równoramiennym jedna z podstaw jest dwa razy większa od drugiej, zaś przekątna trapezu dzieli kąt przy większej podstawie na połowy. Znaleźć boki trapezu wiedząc, że jego pole jest równe  $S$ .
5. W rąbie dane są bok  $a = 10$  i  $\alpha = 60^\circ$ . Oblicz przekątne i pole rombu.

## Grupa 2

1. Dany jest równoległobok ABCD o  $d_1=6$  i  $d_2=8$ , a kąt między nimi  $\alpha=30^\circ$ . Wyznacz:
  - a) długości boków
  - b) kąty wewnętrzne
  - c) pole

2. Stosunek długości przekątnych rombu wynosi 3:4. Oblicz stosunek pola powierzchni rombu do pola powierzchni koła wpisanego w ten romb.
3. W prostokącie połączono środki sąsiednich boków otrzymując romb, którego obwód jest równy 20, a pole 24. Oblicz długość boków prostokąta.
4. Długości boków trójkąta prostokątnego o obwodzie 24 tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego.
5. W trójkąt prostokątny o kącie ostrym miary  $\alpha$  wpisano prostokąt w ten sposób, że dwa jego boki zawierają się w przyprostokątnych trójkąta, a pole prostokąta jest równe połowie pola trójkąta. Jaki jest stosunek długości boków tego prostokąta?

Za każde zadanie można otrzymać 3 punkty.

Punkty	<0,6>	(6,8>	(8,11>	(11,13>	(13,15>
Ocena	ndst	dop	dst	db	bdb