Spis treści

I. WIADOMOŚCI WSTĘPNE

Liczby zespolone wprowadzono w XVI w. Początkowo operowano nimi - podobnie jak liczbami rzeczywistymi - bez uzasadnienia praw nimi rządzących. Liczby zespolone pojawiły się w związku z badaniami sposobów rozwiązań równań algebraicznych trzeciego i czwartego stopnia. Otrzymano mianowicie wzory wyrażające pierwiastki równań tych stopni za pomocą działań $\sqrt{}$ i $\sqrt[3]{}$ na współczynnikach równań. Okazało się, że można rozwiązać tymi wzorami równanie trzeciego stopnia, mające trzy różne pierwiastki rzeczywiste, tylko wtedy, gdy umie się obliczyć $\sqrt{-1}$. Oczywiście, w zakresie liczby do tego okresu znanych, pierwiastek kwadratowy z (-1) nie istniał. Niemniej, niektórzy z matematyków założyli jego istnienie i nazwali go ,,liczbą urojoną'', a poprzednio znane liczby nazwali liczbami ,,rzeczywistymi''
. Oznaczając $\sqrt{-1}$ przez i, a zatem przyjmując, że $i^2 = -1$, utworzono nowe ,,liczby'' $a+bi$, które nazywano liczbami zespolonymi i określano często formalnie cztery działania arytmetyczne na ,,liczbach''. Arytmetyka liczb zespolonych nie doprowadziła do żadnych sprzeczności. L. Euler (1707-1783) wprowadził je do analizy matematycznej, powodując tym jej istotny postęp. Okazało się wówczas, że liczby zespolone, mimo że brak im było uzasadnienia logicznego, są ważnym narzędziem matematycznym dla badania i opisu zjawisk fizycznych.

Początek wieku XIX przyniósł ścisłe uzasadnienia istnienia liczb zespolonych.
szczegółową teorię liczb zespolonych stworzyli C.F. Gauss (1777-1855) i W.R. Hamilton (1805-1863). Pierwszy zinterpretował liczby zespolone jako punkt płaszczyzny, w której wprowadzono pewne działania, zwane dodawaniem i mnożeniem punktów ,czyli liczb zespolonych. Drugi wprowadził liczby zespolone jako pary liczb rzeczywistych i określił w pewien sposób mnożenie i dodawanie tych par. Oba uzasadnienia są równoważne, bowiem punkt płaszczyzny jest wyznaczony przez parę liczb rzeczywistych (współrzędnych).

Obecnie liczby zespolone na równi z liczbami rzeczywistymi , które można traktować jako liczby zespolone szczególnego rodzaju, są niezbędnym narzędziem matematyka, fizyka i inżyniera w jego codziennej pracy.

II. POJĘCIA OGÓLNE WRAZ Z TWIERDZENIAMI

1.Jednostka urojona

Formalnie określa się jednostką urojoną i ([1]) jako liczbę, której kwadrat równa się -1. Wprowadzenie jednostki urojonej prowadzi do uogólnienia pojęcia liczby, mianowicie do liczby zespolonej.

2.Liczba zespolona

Postać ogólna liczby zespolonej: $z= a+bi$, gdzie a i b może przybrać dowolne wartości rzeczywiste. Liczbę a nazywamy częścią rzeczywistą, a liczbę b - częścią urojoną liczby zespolonej a. Oznaczenia

$$a= re\ z, \quad b= im\ z$$ ([2])

Gdy $b= 0$, wtedy $a= z$ (liczba rzeczywista jest szczególnym przypadkiem liczby zespolonej): gdy $a= 0$, wtedy $z= bi$ (liczba urojona, szczególny przypadek liczby zespolonej).

Definicja 1. Ciałem liczb zespolonych nazywamy każde ciało K spełniające następujące trzy warunki:

1. K zawiera ciało liczb rzeczywistych,
2. równanie $z^2 = -1$ ma w ciele K rozwiązanie,
3. K jest najmniejszym ciałem o własnościach 1 i 2

Liczbą zespoloną nazywamy dowolny element ciała K

Definicja 2. Ciałem względem działań $+$ i $\circ$, zwanych odpowiednio dodawaniem i mnożeniem, lub krótko -ciałem, nazywamy każdy zbiór K zawierają co najmniej dwa elementy, w którym określone są te działania; działania te mają następujące <u>właściwości wraz z dowodami:</u>

Dla dowolnych dwóch elementów $z_1, z_2 \in K$ zachodzi

1.
$z_1 + z_2 = (a+c, b+d) = (c+a, b+d) = z_2 + z_1$,

2.
$z_1 \circ z_2 = (ac - bd, bc + ad) = (ca - db, cb + da) = z_2 \circ z_1$,

3.

$$(z_1+z_2)+z_3=(a+c,b+d)+(e,f)=(a+c+e,b+d+f)=$$
$$=(a,b)+(c+e,d+f)=z_1+(z_2+z_3)$$,

4.

$$(z_1\circ z_2)\circ z_3=(ac-bd,bc+da)\circ(e,f)=$$
$$=(ace-bde-bcf,bce+ade+acf-bdf$$
$$z_1\circ(z_2\circ z_3)=(a,b)\circ(ce-df,de+cf)=$$
$$=(ace-adf-bde-bcf,bce-bdf+ade+acf)$$

wobec czego $(z_1\circ z_2)\circ z_{3=}=z_1\circ(z_2\circ z_3)$

5.

$$(z_1+z_2)\circ z_3=a+c,b+d)\circ(e,f)=$$
$$=((a+c)e-(b+d)f,(b+d)e+(a+c)f)=$$
$$=(ae+ce-bf-df,be+de+af+cf)=$$
$$=(ae-bf,be+af)+(ce-df,de+cf)=$$
$$=(z_1\circ z_3)+(z_2\circ z_3)$$

6.Niech

(3) $$z_1+z=z_2$$

gdzie z = (x, y). Zatem

$$(a+x,b+y)=(c,d)$$

więc

$$a+x=c,\qquad b+y=d$$

Stąd

$$x=c-a\,,\qquad y=d-b$$

Równanie (3) ma więc co najmniej jedno rozwiązanie

(4) $$z=(c-a,d-b)$$

Ponieważ (4) jest-jak łatwo stwierdzić - rozwiązaniem równania (3), więc równanie 3 ma dokładnie jedno rozwiązanie. Oznaczamy je przez z_2-z_1 i nazywamy różnicą liczb zespolonych z_2 i z_1.

Z (4) otrzymujemy

$$(c,d)-(a,b)=(c-a,d-b)\,.$$

7.Liczba zespolona $\theta = (0,0)$ jest jedynym rozwiązaniem równania

$$z + \theta = z$$

dla dowolnej liczby zespolonej *z*.

8.Niech

(5) $$z_2 \circ z = z_1$$

gdzie

(6) $$z_2 \neq \theta$$

Warunek (6) oznacza, że obydwie liczby *c*, *d* nie są jednocześnie zerami, więc $c^2 + d^2 \rangle 0$. Zatem $c \neq 0$ lub $d \neq 0$.

Z (5) otrzymujemy

$$cx - dy = a\,, \qquad dx + cy = b$$

mnożąc pierwsze z tych równań przez *c*, a drugie przez *d* i dodając stronami otrzymujemy

$$(c^2 + d^2)x = ac + bd\ .$$

skąd wobec (6)

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}$$

Analogicznie otrzymujemy

$$y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

Równanie (5) ma zatem dokładnie jedno rozwiązanie

(7) $$z = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

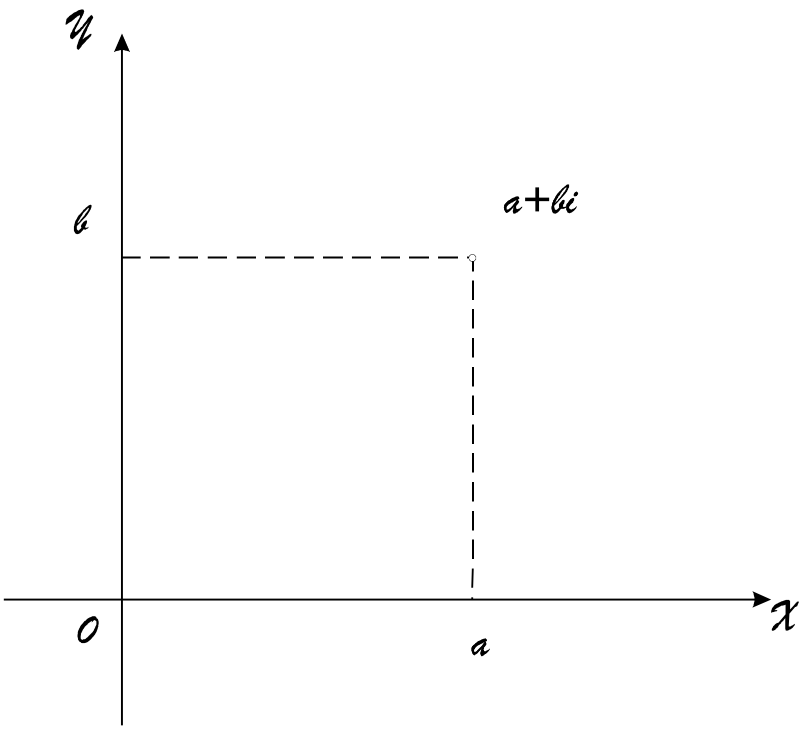
Oznaczamy je przez $\frac{z_1}{z_2}$ i nazywamy ilorazem liczby z_1 i z_2. Udowodniliśmy zatem, że zbiór Z jest ciałem.

Wniosek. Dla każdej liczby zespolonej $z = (a,b)$ różnej od (0,0)

$$\frac{z}{z} = (1,0)$$

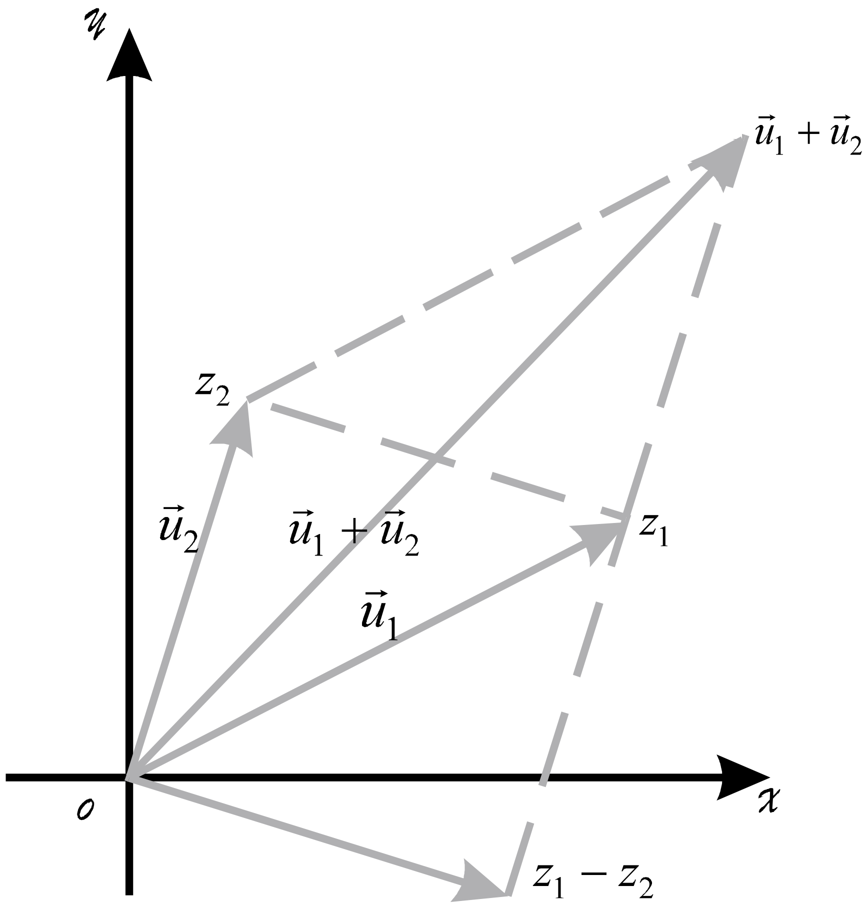
3.Interpretacja geometryczna

Niech dany będzie na płaszczyźnie prostokątny układ osi współrzędnych. Między punktami tej płaszczyzny a liczbami zespolonymi zachodzi odpowiedniość, na mocy której dowolnemu punktowi M. o współrzędnych a, b (M.(a, b)) odpowiada liczba zespolona $a+bi$ i liczbie $a+bi$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi, odpowiada punktu o współrzędnych a, b. Płaszczyznę, której punktom przyporządkowane zostały liczby zespolone, nazywamy płaszczyzną liczbową w zbiorze T punktów płaszczyzny liczbowej określamy dodawanie i mnożenie. Jeżeli M.=M.(a ,b) i N=N(c, d) to M.+N=P., M.*N=Q, gdzie P.=P.(a+c, b+d), Q=Q'(ac-bd, ad+bc)



Punktom osi odciętych odpowiadają liczby rzeczywiste, a punktom osi rzędnych -liczby urojone; osie te nazywamy odpowiednio osią rzeczywistą i osią urojoną.
...Zauważmy, że liczbie zespolonej $z=a+bi$ odpowiada na płaszczyźnie liczbowej pewien wektor, o początku w punkcie (0,0) i końcu w punkcie z i na odwrót, wektorowi o początku w punkcie (0,0) i końcu z odpowiada liczba zespolona z. Jeżeli wektory $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ mają współrzędne odpowiednio równe a_1, b_1 i a_2,b_2 to wektor $\vec{u}=\vec{u}_1+\vec{u}_2$ ma współrzędne a_1+a_2,b_1+b_2. Wektor odpowiadający punktowi z_1+z_2 (tzn. wektor o początku w punkcie (0,0) i końcu w punkcie z_1+z_2) jest sumą wektorów odpowiadających punktom z_1,

z_2. Podobnie wektor odpowiadający różnicy punktów jest różnicą wektorów odpowiadających tym punktom.



4.Moduł liczby zespolonej

Definicja 3. Modułem lub wartością bezwzględną liczby zespolonej $a+bi$ nazywamy liczbę rzeczywistą nie ujemną określoną wzorem

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Wniosek Moduł liczby z równa się odległości punktu z od początku układu współrzędnych, tzn. długości wektora $\vec{O}z$.

<u>Przykład.</u>
Oblicz moduł z liczby $\sqrt{3} - 1$

$$|z| = \left|\sqrt{3} + i\right| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

5.*Liczba sprzężona*

Definicja 4. Liczbę sprzężoną do liczby zespolonej $z=a+bi$ nazywamy liczbę $\overline{z}=a-bi$.

Definicja 5. Dwie liczby zespolone nazywamy sprzężonymi, jeżeli mają części rzeczywiste równe a części urojone różnią się znakiem.

Wniosek. Punkty z *i* $\overline{z}$ są symetryczne względem osi OX (rzeczywistej)

6.*Równość liczb zespolonych*

Definicja 6. Dwie pary *(a, b)* i *(c, d)* nazywamy równymi i piszemy

$$(a, b)=(c, d)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a=c \text{ i } b=d$$

Definicja 7.Równość $z_1 z_2 = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $z_1 = 0$ lub $z_2 = 0$.

Dowód. Jeżeli $z_1 \neq 0$ wówczas z równości $z_1 z_2 = 0$ otrzymujemy $z_2 = \frac{0}{z_1}$. Ze wzoru (7) otrzymamy wówczas $z_2 = 0$.

7.*Postacie liczby zespolonej*

1) Postać trygonometryczna.

Twierdzenie 1. Każda liczba zespolona z można przedstawić w postaci trygonometrycznej i zapisać:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Definicja 8. Argumentem liczby zespolonej $z=a+bi$, $z \neq 0$ nazywamy każdą liczbę rzeczywistą φ określoną równaniami

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|}$$

Argument liczby z oznaczamy przez $\arg z$ Jest on miarą kąta, jaki tworzy wektor $\vec{O}z$ z osią rzeczywistą

$$\arg z = \varphi + 2k\pi$$

Spośród argumentów tej samej liczby dokładnie jeden spełnia warunek nazywamy go argumentem głównym tej liczby i oznaczamy przez Gra z

Przykład.

Znajdź argument liczby $1-\sqrt{3}i$

$$\sin\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2}$$

$$\arg(1-\sqrt{3}i) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Przykład.

Zapisz liczbę $z=i+1$ w postaci trygonometrycznej.

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} i)$$

2) Postać wykładnicza.

Często stosuje się następującą postać zapisu liczby zespolonej z o module q i argumencie $\varphi : a = qe^{\varphi i}$ jest to tzw. postać wykładnicza liczby zespolonej

Przykład.

Przedstaw w postaci wykładniczej $1+i\sqrt{3}$.

$$2e^{(\frac{1}{3})\pi i}$$

III. DZIAŁANIA ALGEBRAICZNE NA LICZBACH ZESPOLONYCH

1.Dodawanie i odejmowanie.

Dodawanie i odejmowanie dwóch liczb określa się wzorami

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$
$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_{2)i}$$

2.Mnożenie i dzielenie.

Mnożenie dwóch liczb określa się wzorem

$$(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$$

W postaci trygonometrycznej:

$$\left[q_1(\cos\varphi_1 + i\sin_1)\right]\left[q_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\right] =$$
$$= q_1 q_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$$

Dzielenie dwóch liczb zespolonych określa się jako działanie odwrotne do mnożenia. W postaci algebraicznej

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

Postać trygonometryczna

$$\frac{q_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{q_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{q_1}{q_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$$

3.Potęgowanie i pierwiastkowanie.

Potęgowanie liczby zespolonej do potęgi n wykonuje się według wzoru *de Moivre'a*

$$\left[q(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = q^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

tzw. podnosi się moduł do potęgi *n*, a argument mnoży się przez *n*.

Wzór de Moivre'a stosować można przy *n* całkowitym lub ułamkowym, dodatnim lub ujemnym. Przy *n* ułamkowym należy uwzględnić wieloznaczność wyniku.

W szczególności mamy $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$ i ogólnie: $i^{4n+k} = i^k$.

<u>Pierwiastkowanie</u> to wyciągani pierwiastka stopnia *n*, jako działanie odwrotne do potęgowania, wykonuje się według wzoru Moivre'a dla ułamkowego wykładnika potęgi, tzn. jeżeli $a = q(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ oraz *n* jest liczbą naturalną to

(*) $$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{q}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n})$$

UWAGA! Dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie liczb zespolonych oraz podnoszenie liczb zespolonych do potęgi o wykładniku całkowitym są działaniami jednoznacznymi, natomiast wyciąganie pierwiastka stopnia *n*, gdzie *n* jest liczbą naturalną, daje zawsze *n* różnych wartości. Jeżeli bowiem we wzorze (*) podstawiać będziemy $k = 0,1,2,...n-1$, to $\arg\sqrt[n]{a}$ przybierać będzie wartości

$$\frac{\varphi}{n}, \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \frac{\varphi + 4\pi}{n}, ..., \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}$$

różniące się o $\frac{2\pi}{n}$; przy dalszych wartościach *k* wartość $\arg\sqrt[n]{a}$ będą się okresowo powtarzały.

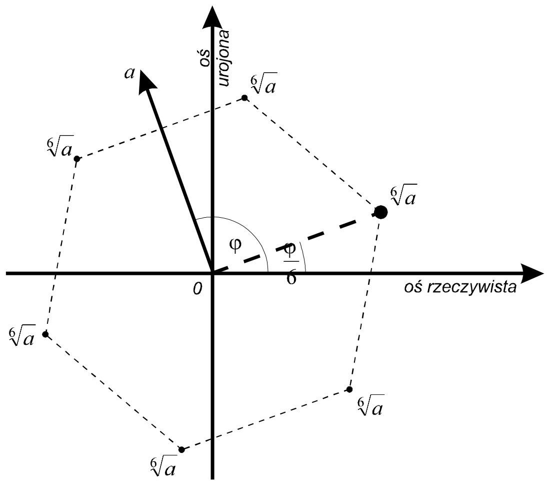
W interpretacji geometrycznej punkty przedstawiające $\sqrt[n]{a}$ są wierzchołkami *n*- kąta foremnego środek w biegunie (na rys. pokazano sześć wartości $\sqrt[6]{a}$).

<u>Pierwiastek n- tego stopnia z jedynki.</u>

Ponieważ liczba jeden może być przedstawiona w formie trygonometrycznej jako: $1 = \cos 0^\circ + i\sin 0^\circ$, pierwiastek n- tego stopnia może być otrzymany na podstawie wzoru $\sqrt[n]{z}$ przez przyjęcie $r = 1, \vartheta = 0.$

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2\pi}{n}\cdot k + \sin\frac{2\pi}{n}\cdot k$$

gdzie k=0,1,2,3...n-1


oś urojona
a
$\sqrt[6]{a}$
$\sqrt[6]{a}$
$\sqrt[6]{a}$
φ
$\frac{\varphi}{6}$
0
oś rzeczywista
$\sqrt[6]{a}$
$\sqrt[6]{a}$
$\sqrt[6]{a}$

IV. ZADANIA Z LICZB ZESPOLONYCH

1)Oblicz

a.

b. $(1+i)^{10}$

c. $(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})^{-3}$.

d. $\sqrt[3]{i}$

e. $\sqrt{-4}$

2)Wykaż prawdziwość tożsamości:

$$(\frac{1+i\cdot tg\varphi^{n}}{1-i\cdot tg\varphi})=\frac{1+i\cdot tgn\varphi}{1-i\cdot tgn\varphi}$$

3)Rozwiąż równanie

a. $x^2+2ix+3=0$

b. $x^2-4x+13=0$.

ODPOWIEDZI

1)

a. $(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^{20}$

Liczbę zespoloną $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ przedstawiamy w postaci trygonometrycznej

$$z=\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}.$$

A więc

$$z^{20}=(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3})^{20}=\cos\frac{20}{3}\pi+i\sin\frac{20}{3}\pi=$$

$$=\cos(6\pi+\frac{2}{3}\pi)+i\sin(6\pi+\frac{2}{3}\pi)=-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=$$

$$=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b.

$$(1+i)^{10}=[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})]^{10}=2^5(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=32i.$$

c.

$$(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})^{-3}=[\cos(-\frac{2}{3}\pi)+i\sin(-\frac{2}{3}\pi)]^{-3}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$$

d.

Moduł liczby i równa się 1, a jednym z jej argumentów jest liczba $\varphi=\frac{\pi}{2}$. W myśl wzoru $w_k=\sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi+2\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi}{n}),k=0,1,2,...,n-1,$gdzie $\sqrt[n]{|z|}$ oznacza pierwiastek arytmetyczny, mamy zatem

$$w_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2},$$

$$w_1=\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2},$$

$$w_2=\cos\frac{9}{6}\pi+i\sin\frac{9}{6}\pi=-i$$

e.

Ponieważ $|-4|=4$ jedynym argumentem -4 jest π, więc

$$w_0 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2i,$$

$$w_1 = (\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi) = -2i.$$

2)

$$(\frac{1+i\cdot tg\varphi^n}{1-i\cdot tg\varphi}) = \frac{1+i\cdot tgn\varphi}{1-i\cdot tgn\varphi}$$

Ponieważ

$$\frac{1+itg\varphi}{1-itg\varphi} = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi}$$

więc na mocy wzoru de Moivre'a

$$(\frac{1+itg\varphi}{1-itg\varphi})^n = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi} = \frac{1+itgn\varphi}{1-itgn\varphi}$$

3)

a.

$$x^2 + 2ix + 3 = 0$$

$$\Delta = -16$$

$$\sqrt{\Delta} = 4i$$

$$x_1 = -3i, x_2 = i$$

b.

$$x^2 + 4x + 13 = 0$$

$$\Delta = -36$$

$$\sqrt{\Delta} = 6i$$

$$x_1 = 2 - 3i, x_2 = 2 + 3i,$$

Bibliografia

1. R. Leitner, W. Żakowski “Matematyka - kurs przygotowawczy na wyższe uczelnie techniczne.” Wydawnictwo Naukowo - Techniczne Warszawa 1968.
2. W. Janowski, J. Kaczmarski “Liczby i zmienne zespolone.” Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne Warszawa 1986.
3. J.N.Bronsztejn, K.A. Siemiendiajew “Matematyka - Podręcznik Encyklopedyczny” Państwowe Wydawnictwo Naukowe Warszawa 1968.