I Liceum Ogólnokształcące
im. Bolesława Krzywoustego
ul. Szarych Szeregów 15

WIELOMIANY

Opracowały :
Ewa Baranowska
Agata Kubea
pod kierownictwem:
mgr Piotra Gumiennego

WIELOMIANY

Suma jednomianów, np. $3xy^2 - z^3 + 2yz + 5$ jest wielomianem zmiennych x, y, z . Wielomian o postaci $ax+b$, ax^2+bx+c , ax^3+bx^2+cx+d , ogólnie $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_{0,}$ $a_1, \ldots, a_n$ ($a_n \neq 0$) są to określone liczby, tzw. współczynniki wielomianu, zaś x oznacza zmienną , jest wielomianem jednej zmiennej i oznacza się go symbolem $W_n(x)$, przy czym n nazywamy stopniem wielomianu . Wielomian W(x) jest funkcją zmiennej x, określaną dla każdej wartości tej zmiennej . Dwa wielomiany nazywamy równymi wtedy i tylko wtedy, jeśli mają jednakowe współczynniki przy odpowiednich potęgach (różnią się co najwyżej kolejnością składników) , np.; $3x^4 + 2x^2 - x + 1$ oraz $2x^2 + 1 + 3x^4 - x$ są to wielomiany równe . Wielomiany można dodawać i odejmować . Wielomiany mnożymy mnożąc każdy składnik mnożnej przez każdy składnik mnożnika , a następnie redukując wyrazy podobne np.;

$$\left(2x^3 + x - 1\right)\left(x^2 + x\right) = 2x^3 x^2 + 2x^3 x + x^2 x + x\,x - 1\,x^2 - 1\,x = 2x^5 + 2x^4 + x^3 - x$$

Dzielenie wielomianów jest to wyznaczenie takiej funkcji wymiernej (niekoniecznie wielomianu), która pomnożona przez wielomian będący dzielnikiem daje wielomian będący dzielną np.;

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2 \text{ , ponieważ } \left(a^2 + ab + b^2\right)\left(a - b\right) = a^3 - b^3$$

Reszta z dzielenia wielomianu W przez dwumian postaci x - c , gdzie a $\in$ R , jest równa liczbie W(c) .

Jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$ jest miejscem zerowym wielomianu $W(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, gdzie ($a_n \neq 0$) to q jest dzielnikiem współczynnika a_n zaś p. dzielnikiem współczynnika a_0 .

Temat : Wielomian jednej zmiennej.

Def.

Wielomian stopnia n nazywamy funkcją W: R→R daną wzorem $W(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} +\ldots+ a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, gdzie a_n, a_{n-1}, ... , $a_2, a_1, a_0 \in R$, $a_n \neq 0$, n∈N. Wyrażenia $a_{0,}$ $a_1,\ldots,a_n$ nazywamy współczynnikami a stopień wielomianu oznaczamy W(x) = n .

Przykład :

W(x) = $x^2 - 5x + 6$

stopień wielomianu W(x) = 2

$a_0 = 6$

$a_1 = -5$

$a_2 = 1$

Def.

Wielomianem zerowym nazywamy wielomian stale równy zeru i zapisujemy W(x) ≡ 0 .

Def.

Dwa wielomiany W(x) i P.(x) są równe wtedy i tylko wtedy gdy :

- są tego samego stopnia
- mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach

W(x) = P.(x)

$W(x)=a_n x^n +\ldots+ a_0$

P.(x) = $b_m x^m +\ldots+ b_0$

W(x) = P.(x) ⇔ (n = m.) ∧ ($a_n = b_m$ ∧...∧ $a_0 = b_0$)

Przykłady:

Dla jakich a,b wielomiany W(x) = $x^3 + \left(a+1\right) x^2 - x + b^2$, P.(x) = $x^3 - 2x^2 - x + 4$ są równe .

- W(x) = P.(x) (są tego samego stopnia 3) . Aby były równe muszą mieć równe odpowiednie współczynniki

$$\begin{cases} a + 1 = -2 \\ b^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$$

Odp. Wielomiany są równe jeśli a = -3 i b = -2 lub a = -3 i b = 2 .

Temat : Dzielenie wielomianów

I. **Def.**

Wielomian P.(x) nazywamy dzielnikiem wielomianu (W(x) $\neq$ 0) , W(x) jeśli istnieje wielomian Q(x) taki, że W(x) = P.(x) Q(x) .

Przykład :

Dzielenie liczb	Dzielenie wielomianu
965 : 5 = 193 -5 46 -45 15 15 = = 965 = 5 * 193	$(x^2-5x+6):(x-2)=x-3$ $-(x^2-2x)$ $(-3x+6)$ $-(-3x+6)$ = = $(x^2-5x+6)=(x-2)(x-3)$

II. Dzielenie z resztą

Dzielenie liczb	Dzielenie wielomianu
753 : 2 = 376,5 -6 15 -14 13 -12 1 R = 1 753 = 2 * 376 + 1	$(x^3+2x^2-5x+1):(x+2)=x^2-5$ $-(x^3+2x^2)$ $-5x+1$ $-(-5x-10)$ 11 R = 11 $(x^3+2x^2-5x+1)=(x+2)(x^2-5)+11$

Tw.

Dla dowolnych wielomianów W(x) i P(x) $\neq$ istnieją wielomiany Q(x) i R(x) takie, że W(x)=P(x) * Q(x) + R(x) przy czym stopień R(x) musi być mniejszy od stopnia wielomianu P(x) .
R(x) < P(x) dla R(x) $\equiv$ 0

Temat : Dzielenie wielomianu przez dwumian . Schemat Hornera.

Metoda Hornera jest to dzielenie wielomianu $W(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ przez dwumian $(x-c)$ przy użyciu tzw. schematu Hornera .

Przykład : $(x^3-2x^2+3x-1):(x-1)$

<table>
<tr><th>Dzielenie tradycyjne</th><th>Schemat Hornera</th></tr>
<tr>
<td>
$(x^3-2x^2+3x-1):(x-1)=x^2-x+2$
$-(x^3-x^2)$
$-x^2+3x$
$-(-x^2+x)$
$2x-1$
$-(2x-2)$
1
$(x^3-2x^2+3x-1)=(x-1)(x^2-x+2)+1$
W(x) = P(x) * Q(x) + R(x)
</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>1</td><td>-2</td><td>3</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>-1</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">współczynnik ilorazu Q(x)</td><td>reszta R(x)</td></tr>
</table>
a. należy przepisać pierwszy wyraz
b. 1 * 1 + (-2) = -1
c. 1 * (-1) + 3 = 2
d. 1 * 2 + (-1) = 1 R =1
$(x^3-2x^2+3x-1)=(x-1)(x^2-x+2)+1$
</td>
</tr>
</table>

Przykład

Wykonaj dzielenie:

$(x^3+x-5):(x-3)=$

	1	0	1	–5
3	1	3	10	25

$(x^2+3x+10)(x-3)+25=(x^3+x-5)$

Zadanie

Wykonaj dzielenie wielomianu W(x) P(x) (x–a), a następnie wyznacz wartość wielomianu w punkcie A.

$(x^7 – 2x^5 + x^3 – 5x + 1) : (x – 1) =$

	1	0	–2	0	1	0	–5	1
1	1	1	–1	–1	0	0	–5	–4

$W(x) = (x – 1)(x^6 + x^5 – x^4 – x^3 – 5) – 4$

a=1 $W(1) = 1^7 – 2 \cdot 1^5 + 1^3 – 5 \cdot 1 + 1 = 4$

Wniosek

W(A)=R

Wartość wielomianu w punkcie A jest równa reszcie z dzielenia.

Temat: Pierwiastki wielomianu.

<u>Def:</u>

Liczbę a nazywamy pierwiastkiem wielomianu W(x) jeśli wartość wielomianu w punkcie A jest równa 0.

W(a)=0

Przykład

Wykonaj dzielenie wielomianu W(x) przez dwumian (x–a), a następnie oblicz wartość wielomianu w punkcie A.

$W(x) = x^3 – x^2 – 5x – 3$

P(x)= x–3

a=3

a) podstawiamy za x wartość wyrazu a

$W(a) = 3^3 – 3^2 – 5 \cdot 3 – 3 = 0$

W(3)=0

a=3 jest pierwiastkiem wielomianu W(x)

b) wykonujemy dzielenie.

	1	–1	–5	–3
3	1	2	1	0

R=0

$(x^2+2x+1)\cdot(x-3)=x^3-x^2-5x-3$

Wielomian W(x) jest podzielny przez dwumian P(x). Reszta z dzielenia wynosi 0.

Twierdzenie Bezout (matematyk francuski)

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu W(x) wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian W(x) jest podzielny przez dwumian (x–a)

$$W(x) \wedge P(x) \qquad\qquad Q(x) \wedge R(x)$$

$$W(x) = P(x)\cdot Q(x)+R(x)$$

Na mocy twierdzenia Bezout dla dowolnych wielomianów $W(x) \wedge P(x)$ istnieją wielomiany $Q(x) \wedge R(x)$ takie, że $W(x) = P(x)\cdot Q(x)+R(x)$.

Jeśli $P(x)=(x-a)$, to $W(x)=(x-a)\cdot Q(x)+R$ (R to liczba) zachodzi to dla wszystkich x (albo dowolnych x) w tym również dla x=a

$W(a)=(a-a)\cdot Q(a)+R$

* $W(a)=0$

$(p\Leftrightarrow q)\Leftrightarrow(p\Rightarrow q \wedge q\Rightarrow p)$

Jeśli liczba a jest pierwiastkiem wielomianu W(x) to z definicji zachodzi W(a)=0 stąd R=0, co oznacza, że wielomian W(x) jest podzielny przez dwumian (x–a)

Jeśli wielomian jest podzielny przez dwumian (x–a) i R=0 z * W(a)=R to zatem

$W(a)=0$

(oznacza to, że liczba a jest pierwiastkiem wielomianu W(x))

$0=W(a)=(a-a)Q(a)+R$

Tw.

Wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków

Def:

Liczbę a nazywamy pierwiastkiem k–krotnym wielomianu W(x), jeśli wielomian W(x) jest podzielny przez $(x-a)^k$ i nie jest podzielny przez $(x-a)^{k+1}$

Przykład

1. Rozwiąż dzielenie wielomianu W(x) wiedząc, że:

   $W(x)=x^2–4x+4$

   a=2

   P(x)=(x–2)

   W(x) możemy zapisać jako $(x–2)^2$ zatem

   $W(x) : (x–2)^2 = 1$

   Oznacza to, że liczba a=2 jest pierwiastkiem dwukrotnym wielomianu W(x)

2. Rozwiąż $W(x)=x^3–x^2+x–1$

   a=1

   P(x)=x–1

   k=1 $(x^3–x^2+x–1) : (x–1)=x^2+1$

   $–(x^3–x^2)$

   x–1

   –(x–1)

   = =

   R=0 x^2+1

   Liczba 1 jest pierwiastkiem jednokrotnym

   $P^2(x)$ $(x^3 – x^2 + x – 1) : (x^2–1^2)=x–1$

   $–(x^3 – x)$

   $–x^2+x+x$

   $–x^2 + 2x$

   $–(–x^2 + 1)$

   2x–1–1 R=2x–2

   2x – 2

   $(x–1)^1 \cdot (x–1)^2$

   $W(x) : (x–1)^1$ k=1 R=0

   $W(x) : (x–1)^2$ k=2 R≠0

Tw.

Jeżeli wielomian W(x) jest podzielny przez każdy z dwumianów $(x-a_1)$, $(x-a_2)$, … , $(x-a_n)$ to jest podzielny przez ich iloczyn.

Temat: Rozkład wielomianu na czynniki.

Rozłożyć wielomian na czynniki to znaczy przedstawić go w postaci iloczynu.

Przykład

1. $W(x)=3x^3-6x=3x(x^2-2)=3x(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2})$
2. $W(x)=x^6+x^4-2x^2=x^2(x^4+x^2-2)=^* x^2(x^4+x^2-2)=x^2(x^2-1)(x^2+2)$

* $x^4+x^2-2=0$

$t=x^2$

$t^2+t-2=0$

$\Delta=9$

$t_1=1 \quad \vee \quad t_2=-2$

$x^2=1 \quad \vee \quad x^2=-2$

$(x^2-1) \quad \vee \quad x^2+2$

Tw.

Każdy wielomian stopnia n (n>2) można rozłożyć na czynniki stopnia co najwyżej drugiego. (Nie oznacza to, że dokonanie takiego rozkładu jest łatwe), np.:

$W(x)=x^{2222}+5x^{1998}-1$

Temat: Wielomian o współczynnikach całkowitych.

Def:

Wielomian, którego współczynniki są liczbami całkowitymi nazywamy wielomianem o współczynnikach całkowitych.

Przykład

Rozłóż wielomian W(x) na czynniki. Wyznacz jego pierwiastki.

$W(x)=x^3–x^2–4x+4=x^2(x–1)–4(x–1)=(x–1)(x^2–4)=(x–1)(x+2)(x–2)$

Tw.

Jeżeli wielomian W(x) o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek wymierny w postaci nieskracalnego ułamka $\frac{p}{q}$, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0, a q dzielnikiem wyrazu przy najwyższej potędze a_n.

Dowód:

Założenie:

Niech W(x) będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Niech liczba $\frac{p}{q}$ będzie wymiernym pierwiastkiem tego wielomiany przy czym NWD(p, q)=1.

Teza:

$\bigvee_{k} a_0=p\cdot k$

Istnieje taka liczba k, która się mnoży przez p dając a_0.

$\bigvee_{l} a_n=q\cdot l$

$W(\frac{p}{q})=0$

$W(\frac{p}{q})=a_n\,(\frac{p}{q})^n + a_{n\cdot n}\cdot(\frac{p}{q})^{n-1} + \ldots + a_1(\frac{p}{q})+a=0$

$a_n\,(\frac{p}{q})^n + a_{n-1}(\frac{p}{q})^{n-1} + \ldots + a_1(\frac{p}{q})+a=0$

$a_n(\frac{p^n}{q^n} +a_{n-1}\cdot\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} +\ldots+ a_1(\frac{p}{q})+a=0 \quad /\cdot q^n$

$a^n\cdot p^n+a_{n-1}\cdot p^{n-1}\cdot q+\ldots+a_1\cdot p\cdot q^{n-1}+a_0\cdot q^n=0$

$a_n\cdot p^n=–a_{n-1}\cdot p^{n-1}\cdot q–\ldots–a_1p\cdot q^{n-1}–a_0\cdot q^n$

$a_n\cdot p^n=q\cdot(–a_{n-1}\cdot p^{n-1}–\ldots–a_1p\cdot q^{n-2}–a_0q^{n-1})$

Wyrażenia z obu stron są równe. Jeśli prawa strona jest podzielna przez q, to lewa strona też musi być podzielna przez q. Ponieważ NWD (p,q)=1 stąd przez q musi być podzielny wyraz a_n.

$a_0\cdot q^n=–anp^n–a_{n-1}p^{n-1}\cdot q–\ldots–a_1pq^{n-1}$

$a_0\cdot q^n=p\cdot(–a_np^{n-1}–a_{n-1}p^{n-2}\cdot q–\ldots–a_1\cdot q^{n-1})$

Wyrazy z obu stron są równe. Jeśli prawa strona jest podzielna przez p, to lewa strona też musi być podzielna przez p. Ponieważ NWD (p,q)=1 stąd przez p musi być podzielny wyraz a_0.

Przykład

Rozłóż na czynniki

$W(x)=2x^3-x^2-5x+3$

Korzystając z twierdzenia konsultujemy ewentualne pierwiastki wielomianu W(x)

$a_0=3$ p:1, –1, 3, –3

$a_n=2$ q:1,–1,2,–2

$\frac{p}{q}=\frac{1}{1},\frac{-1}{1},\frac{-3}{1},\frac{3}{1},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2}$

$\frac{p}{q}=1,-1,3,-3,\ \frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2}$

Sprawdzamy która z liczb jest pierwiastkiem

$W(1)=-1\neq 0$

$W(-1)=5\neq 0$

$W(3)=33\neq 0$

$W(-3)=45\neq 0$

$W(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\neq 0$

$W(-\frac{1}{2})=5\neq 0$

$W(\frac{3}{2})=0=0$

Liczba $\frac{3}{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu W(x) na mocy twierdzenia Bezout wielomian W(x) musi być podzielny przez $x=\frac{3}{2}$.

Korzystając z schematu Hornera

	2	–1	–5	3
$\frac{3}{2}$	2	2	–2	0

$W(x)=(x-\frac{3}{2})\cdot(2x^2+2x-2)$

$W(x)=2(x-\frac{3}{2})\ (x^2+x-1)$

$\Delta=1+5=5$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{5}$

$x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$W(x)=2(x-\frac{3}{2})(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2})(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$

Odp: Wyraz ten można rozłożyć na pierwiastek wymierny $\frac{3}{2}$ i dwa pierwiastki niewymierne $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ i $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Temat: Równanie stopnia n.

Def:

Równaniem algebraicznym stopnia n nazywamy równanie postaci W(x)=0

Aby rozwiązać równanie należy wielomian W(x) rozłożyć na czynniki.

Przykład

Rozwiąż równanie.

$x^6-x^4-2x^2=0$

$x^2(x^4-x^2-2)=0$

$* \ x^4-x^2-2$

$t=x^2$

$\Delta=9$

$t_1=-1 \ \vee \ t_2=2$

$x^2=-1 \ \vee \ x^2=2$

$x^2+1=0 \ \vee \ x^2-2=0$

$x^2(x^2+1)(x^2-2)=0$

$x^2(x^2+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$

$x^2=0 \vee x^2+1=0 \vee x-\sqrt{2}=0 \ \vee \ x+\sqrt{2}=0$

$x=0 \vee x=\sqrt{2} \ \vee x=-\sqrt{2}$

Odp.: Rozwiązaniem są 4 pierwiastki; $x=-\sqrt{2}$, $x=0$, $x=\sqrt{2}$. Zero jest pierwiastkiem dwukrotnym $(x \cdot x=x^2)$

Temat: Równanie zwrotne czwartego stopnia

Def:

Równanie postaci:

$ax^4+bx^3+bx^2+bx+a=0$

nazywamy równaniem zwrotnym.

Równanie zwrotne rozwiązuje się wykonując dzielenie przez x^2 i podstawienie $(x\neq0)$ $x+\frac{1}{x}$. Łatwo sprawdzić, że x=0 nie jest rozwiązaniem równania.

Przykład

$x^4-2x^3-x^2-2x+1=0 \ \ / : x^2$

$x^2-2x-1-\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}=0$

$x^2-2x-1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$x^2+2-2+\frac{1}{x^2}-2x-2\cdot\frac{1}{x}-1=0$

$(x+\frac{1}{x})^2-2(x+\frac{1}{x})-3=0$

$t=x+\frac{1}{x}$

$t^2-2t-3=0$

$\Delta=4+12=16$

$\sqrt{\Delta}=4$

$t_1=-1 \quad \vee \quad t_2=3$

$x+\frac{1}{x}=-1 \ / \cdot x$

$x^2+1=-x$

$x^2+x+1=0$

$\Delta<0$

$x+\frac{1}{x}=3 \ / \cdot x$

$x^2+1=3x$

$x^2-3x+1=0$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{5}$

$x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Temat: Nierówności stopnia n.

Def:

Niech W(x) będzie wielomianem stopnia n. Nierówność postaci $W(x)>0$, $W(x)\geq 0$, $W(x)<0$,$W(x)\leq 0$ nazywamy nierównościami algebraicznymi stopnia n (wielomianowe).

Nierówności stopnia n rozwiązujemy rozkładając wielomian W(x) na czynniki wyznaczając jego pierwiastki, a następnie tzw. siatkę znaków.

Przykład

Rozwiąż nierówność:

$x^4+x^2+11x+4\geq 5x^3$

$x^4-5x^3+x^2+11x+4\geq 0$

$a_0=4$ $\quad$ p=1, –1, 2, –2, 4, –4

$a_n=1$ $\quad$ q=1, –1

$\frac{p}{q}$=1, –1, 2, –2, 4, –4

	1	–5	1	11	4
1	1	–4	–3	8	12
–1	1	–6	7	4	0

Na mocy twierdzenia Bezout wielomian W(x) musi być podzielony przez dwumian (x+1).

$(x+1)(x^3-6x^2+7x+4)\geq 0$

$a_0=4$ $\quad$ p=1,–1,2,–2,4,–4

$a_n=1$ $\quad$ q=1,–1

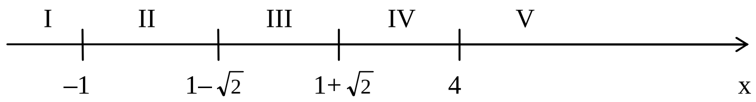
$\frac{p}{q}$=4,–4,2,–2,–1,1

	1	–6	7	4
4	1	–2	–1	0

Na mocy twierdzenia Bezout wielomian W(x) musi być podzielony przez dwumian (x–4).

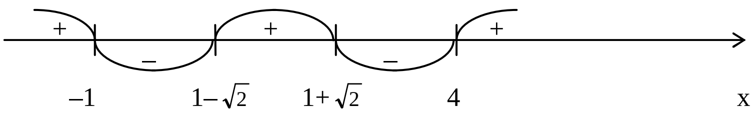
$(x+1)(x-4)[x-(1-\sqrt{2})][x-(1+\sqrt{2})]\geq 0$

$x=-1$ $\quad x=4$ $\quad x=1+\sqrt{2}$ $\quad x=1-\sqrt{2}$



	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1-\sqrt{2})$	$(1-\sqrt{2})$	$(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$	$(1+\sqrt{2})$	$(1+\sqrt{2},4)$	4

x+1	–	0	+	+	+		+	
x–4	–		–	–	–		–	0
$x-(1-\sqrt{2})$	–		–	0	–		+	
$x-(1+\sqrt{2})$	–		–	–	+	0		
W(x)	+	0	–	0	+	0	–	0



Odp.: $x\in(-\infty,-1\rangle \vee \langle 1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\rangle \vee \langle 4,+\infty)$

Wniosek

Siatkę znaków można zastąpić następującą regułą.

1. Jeśli współczynnik przy najwyższej potędze jest dodatni, to wykres znaków wielomianu rysujemy znad prawej strony osi.
2. Jeśli krotność pierwiastka jest nieparzysta, to wykres znaku przechodzi z jednej strony osi nad drugą. Jeśli krotność pierwiastka jest parzysta, to wykres znaku „odbija się” i powstaje z tej samej osi.

Temat: Wielomian dwóch (lub wielu) zmiennych.

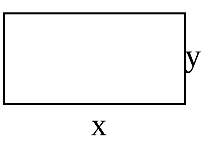
I. **<u>Def:</u>**

Niech D będzie dowolnym podzbiorem iloczynu kartezjańskiego RxR. Jednoznaczne odwzorowanie f przyporządkowuje każdemu elementowi zbioru D dokładnie jeden element zbioru R nazywamy funkcją dwóch zmiennych i zapisujemy f: $D\to R$.

Przykład

Weźmy pod uwagę wszystkie prostokąty o bokach x i y.

$$\left.\begin{array}{l} x\in R_+ \\ y\in R_+ \end{array}\right\} \Longrightarrow (x,y)\in R_+ \text{ x } R_+$$



Każdemu prostokątowi przyporządkowujemy jego pole (liczbę). Skonstruowaliśmy funkcję dwóch zmiennych, które dwóm zmiennym bokom prostokąta przyporządkowuje dokładnie jedną liczbę (pole).

$f: R_+ \times R_+ \to R$

$f(x,y)=x \cdot y$

II. Wielomian dwóch (wielu zmiennych).

Def:

Jednomianem dwóch zmiennych nazywamy funkcję $W: R \times R \to R$ daną wzorem $W(x,y)=ax^n y^m$, gdzie $a \neq 0$ i $n,m \in N$,

np.: $W(x,y)=3x^4y^2$

Def:

Dwa wielomiany nazywamy podobnymi, jeśli różnią się co najwyżej współczynnikiem, np.:

$W(x,y)=2x^6y^{12}$ $P(x,y)= -4x^6(-2y)^{12}$ są podobne

$W(x,y)=x^3y$ $P(x,y)=xy^2$ nie są podobne

Def:

Stopniem jednomianu nazywamy sumę jego stopni ze względu na każdą ze zmiennych, np.:

$W(x,y)=2x^3y^5$

st. $W=3+5=8$

Def:

Wielomianem dwóch zmiennych nazywamy sumę jednomianów. Analogicznie określa się wielomian wielu zmiennych, np.:

$W(x,y)=x^2+y^2-4$

$W(x,y)=2xy$

$W(x,y)=xy-x^2y^2+1$

Wielomiany wielu zmiennych tworzą zbiór, w którym można określić działania.

Def:

Wielomian $W(x,y)$ nazywamy symetrycznym, jeśli wstawiając wszędzie w miejsce $x-y$, $y-x$ otrzymamy ten sam wielomian, tj. Gdy zachodzi warunek: $W(x,y)=W(y,x)$, np.:

$$\left.\begin{array}{l} W(x,y)=x^2+y^2+1 \\ W(y,x)=y^2+x^2+1 \end{array}\right\} \quad W(x,y)=W(y,x)$$

Def:

Wielomian nazywamy jednorodnym, jeśli wszystkie jego jednomiany są tego samego stopnia, np.:

$W(x,y)=xy+x^2+y^2$

Def:

Niech W(x,y) i P(x,y) będą wielomianami. Układ:

$$\begin{cases} W(x,y)=0 \\ P(x,y)=0 \end{cases}$$

nazywamy układem równań z dwiema niewiadomymi. Każdą parę (a,b) spełniającą układ nazywamy rozwiązaniem układu.

Przykład

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=62 \\ x^2-y^2+x-y=50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+2x=112 \\ x^2-y^2+x-y=50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2+2x-112=0 \quad \big| \div 2 \\ x^2-y^2+x-y=50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+x-56=0 \\ x^2-y^2+x-y=50 \end{cases}$$

obliczam Δ

$$x^2+x-56=0$$

$$\Delta=1^2-4\cdot(-56)\cdot 1=0$$

$$\Delta=225$$

$\sqrt{\Delta}=15$

$x_1=\frac{-1-15}{2} \quad \vee \quad x_2=\frac{-1+15}{2}$

$x_1=-8 \quad \vee \quad x_2=7$

Podstawiamy wyrazy za $x_1 \vee x_2$

$\begin{cases} 64+y^2-8+y=62 \\ y^2+y-6=0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 49+y^2+7+y=62 \\ y^2+y-6=0 \end{cases}$

$\Delta=1-4\cdot(-6)\cdot 1=25$

$\sqrt{\Delta}=5$

$y_1=\frac{-1-5}{2} \quad \vee \quad y_2=\frac{-1+5}{2}$

$y_1=-3 \quad \vee \quad y_2=2$

Rozwiązaniem równania są pary liczb

$\begin{cases} x=-8 \\ y=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-8 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=7 \\ y=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=7 \\ y=2 \end{cases}$

Zadania

Zadanie 1

Dla jakich a,b równanie $x^3+ax+b=0$ ma trzy pierwiastki x_1, x_2, x_3 takie, że $x_1=x_2=x_3+1$

Rozwiązanie

Jeśli liczby x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami wielomianu, to można przedstawić go w postaci iloczynowej:

$x^3+ax+b=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$

Jeśli $x_1=x_2$ i $x_3=x_1-1$, to:

$(x-x_1)(x-x_1)[x-(x_1-1)]=0$

$(x^2-2xx_1-x_1^2)(x-x_1+1)=0$

$x^3-x^2x_1-x^2-2x^2+x_1+2xx_1^2-2xx_1+x_1^2x-x_1^3-x_2^2=0$

$x^3+x^2(-3x_1+1)+x(2x_1^2-2x_1+x_1^2)-x_1^3+x_1^2=0$

$x^3+x^2(-3x_1+1)+x(3x_1^2-2x_1)-x_1^3-x_1^2=0$

Zauważmy, że w wielomianie wyjściowym, nie występuje wyrażenie $2x^2$, stąd musi zachodzić:

$-3x_1+1=0$

$x_1=\frac{1}{3}$

Po podstawieniu otrzymamy:

$x^3+(-\frac{1}{3}-2\frac{1}{3}+1)+x(2(\frac{1}{3})^2-2\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2)-(\frac{1}{3})^3+(\frac{1}{3})^2=0$

$x^3+x(\frac{1}{3}-\frac{2}{3})-\frac{1}{27}+\frac{1}{9}=x^3+ax+b$

$-\frac{1}{3}x+\frac{2}{27}=ax+b$

$a=-\frac{1}{3}$

$b=\frac{2}{27}$

Odp.: Dla $a=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{27}$ równanie $x^3+ax+b=0$ ma trzy pierwiastki.

Zadanie 2

Dane są wielomiany $f(x)=x^4+ax^3+bx^2-8x+4$ i $g(x)=x^2+cx+d$. Wyznacz a,b,c,d tak, aby: $f(x)=[g(x)]^2$

Rozwiązanie

Podstawiamy za f(x) i g(x) i otrzymujemy:

$(x^2+cx+d)^2=x^4+ax^3+bx^2-8x+4$

$(x^2+cx+d)(x^2+cx+d)=x^4+ax^3+bx^2-8x+4$

$x^4+cx^3+dx^2+c^2x^2+cx^3+cdx+dx^2+dcx+d^2= x^4+ax^3+bx^2-8x+4$

$2cx^3+x^2(2d+c^2)+2dcx+d^2=ax^3+bx^2-8x+4$

*

$$\begin{cases} 2c = a \\ 2d + c^2 = b \\ 2cd = -8 \\ d^2 = 4 \end{cases}$$

* Aby wielomiany były równe, to współczynniki przy x muszą być równe.

$$\begin{cases} d = 2 \\ c = -2 \\ b = 8 \\ a = -4 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} d = -2 \\ c = 2 \\ b = 0 \\ a = 4 \end{cases}$$

Odp.: Rozwiązaniem równania są

$$\begin{cases} d = 2 \\ c = -2 \\ b = 8 \\ a = -4 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} d = -2 \\ c = 2 \\ b = 0 \\ a = 4 \end{cases}$$

Zadanie 3

Dany jest wielomian $W(x)2x^3 + mx^2 - 13x + n$, którego pierwiastkiem są liczby p i q . Oblicz : m i n oraz wyznacz Trzeci pierwiastek wielomianu , jeżeli p i q są liczbami całkowitymi spełniającymi układ równań :

$$\begin{cases} 2p - 3q = 13 \\ 3p - q = 3 \end{cases}$$

założenie że q < 0	założenie że q ≥ 0
$\begin{cases} 2p - 3q = 13 \\ 3p - q = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} 2p + 3q = 13 \\ 3p - q = 3 \end{cases}$
$W = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 9 = 7$	$W = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 9 = -11$
$W_p = \begin{vmatrix} 13 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -13 + 3 \times 3 = -4$	$W_p = \begin{vmatrix} 13 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -13 - 3 \times 3 = -22$
$p = \frac{W_p}{W} = \frac{-4}{7} \notin C$	$p = \frac{W_p}{W} = \frac{-22}{-11} = 2$
	$q = \frac{W_p}{W} = \frac{-33}{-11} = 3$
	$\begin{cases} p = 2 \\ q = 3 \end{cases}$

Jeśli p i q są pierwiastkami równania to zachodzi :

W(p) = 0

W(q) = 0

$$\begin{cases} 2 \cdot 2^3 + m \cdot 2^2 - 13 \cdot 2 + n = 0 \\ 2 \cdot 3^3 + m \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16 + 4 \cdot m - 26 + n = 0 \\ 54 + 9 \cdot m - 39 + n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \cdot m + n = 10 \\ 9 \cdot m + n = -15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 10 - 4 \cdot m \\ 9 \cdot m + 10 - 4 \cdot m = -15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4n = 10 - 4 \cdot n \\ 5m = -25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = -5 \\ n = 30 \end{cases}$$

Podstawiając za m = -5 i n = 30 , otrzymamy : $W(x) = 2x^3 - 5x^2 - 13x + 30$

Jeśli 2 i 3 są pierwiastkami równania , to korzystając ze schematu Hornera otrzymamy :

	2	-5	-13	30
2	2	-1	-15	0
3	2	5	0	

$W(x) = (2x + 5)(x - 2)(x - 3)$

$2x + 5 = 0$

$x_3 = -\frac{5}{2}$

Odp. Trzeci pierwiastek równania $x_3 = -\frac{5}{2}$.

Rozwiąż zadania

1. Rozwiąż :

$\left|x^4 - 2x^3\right| + \left|4x^2 - |6x + 3|\right| = 0$

Odp. Równanie nie ma pierwiastków wymiernych .

2. Rozwiąż nierówność

$x^4 + x^3 - x^7 + ax + b \geq 0$

jeśli wiadomo , że liczby -1 , -3 są pierwiastkami równania .

Odp. $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$.

3. Rozwiąż

$-x^4 (x^4 - 1)(x^2 - 5x + 6)(x + \sqrt{2})^3 \leq 0$

Odp. $x \in \langle -\sqrt{2}, -1 \rangle \cup \langle 1, 2 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle \cup \{0\}$.

4. Znajdź pierwiastki wielomianu i rozłóż go na czynniki

$W(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x - 1$

Odp. $W(x) = 2(x-1)(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)$

5. Jakie musi być α , aby wielomian

$W(x) = 2x^3 \sin\alpha + x^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - x - \cos^2 \alpha$

był podzielny przez x -1 , jeśli α jest miarą kąta trójkąta .

Odp. Dla $\alpha = \frac{\pi}{4} \cup \alpha = \pi - arctg 2$ wielomian W(x) jest podzielny przez x-1.

Spis treści

Literatura :

„Mały Słownik Matematyczny” - A.B.Empacher , W.Zakowski

„Matura Zbiór Zadań” - A.Cewe , H.Nahorska

Wykład „Wielomiany” - mgr P.Gummiennego