UKŁADY RÓWNAŃ

1.UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

Układ:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

nazywamy układem równań liniowych.

Rozwiązaniem układu jest każda para liczb spełniająca każde z równań.

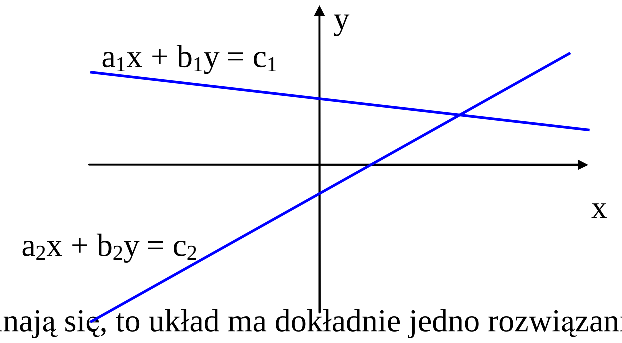
Przy rozwiązywaniu układów równań korzystamy z twierdzeń o równaniach równoważnych.

METODY ROZWIĄZYWANIA

I. Graficznie.

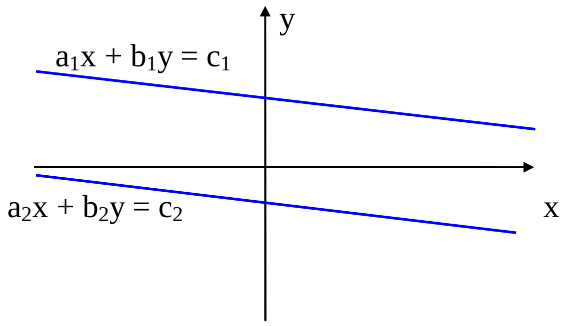
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Każde z równań układu przedstawia prostą. Metoda graficzna polega na wykreśleniu obu prostych i wyznaczeniu punktu ich przecięcia, który jest szukanym rozwiązaniem.



Jeżeli proste przecinają się, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Jeżeli proste nie mają punktów wspólnych (są równoległe), to układ nie ma rozwiązania.



Jeżeli proste pokrywają się, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

II. Metoda podstawiania.

Można ją zastosować do takich układów równań, w których pewne z równań pozwala wyrazić jedną niewiadomą w zależności od pozostałych niewiadomych.

Przykład

W układzie równań:

$$\begin{cases} x + 6y = 7 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

wygodnie jest obliczyć x z pierwszego równania $x = 7 - 6y$ i podstawić do równania drugiego.

$$\begin{cases} x = 7 - 6y \\ 3(7 - 6y) + 2y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 - 6y \\ 21 - 18y + 2y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 - 6 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 - 6y \\ -16y = -16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Odp. Jedynym rozwiązaniem danego układu równań jest para liczb (1,1).

III. Metoda przeciwnych współczynników.

Polega ona na mnożeniu poszczególnych równań przez tak dobrane liczby, by po dodaniu pomnożonych równań otrzymać równanie zależne od mniejszej liczby niewiadomych.

Przykład

W układzie równań:

$$\begin{cases} 2x - 5y = -19 \\ -5x + 3y = 19 \end{cases}$$

mnożąc pierwsze równanie przez 5, a drugie przez 2, otrzymujemy:

$$\begin{cases} 2x - 5y = -19 \;/ * 5 \\ -5x + 3y = 19 \;/ * 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x - 25y = -95 \\ -10x + 6y = 38 \end{cases}$$

Dodając oba otrzymane równania do siebie, mamy:

$$10x - 25y -10x + 6y = -95 + 38$$
$$-19y = -57$$
$$y = 3$$

Podstawiając y = 3 do jednego z równań danego układu, otrzymamy:

$$2x - 5 * 3 = -19$$
$$2x = -4$$
$$x = -2$$

Odp. Rozwiązaniem układu równań jest para liczb (-2, 3).

IV. Metoda wyznaczników.

Niech dany będzie układ równań liniowych:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Rozpatrzmy dwa przypadki:

$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \;/ * b_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 \;/ * (-b_1) \end{cases}$	$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \;/ * (-a_2) \\ a_2x + b_2y = c_2 \;/ * a_1) \end{cases}$
$\begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \\ -a_2b_1x - b_1b_2y = -c_2b_1 \end{cases} \Big\vert +$	$\begin{cases} -a_1a_2x - b_1a_2y = -c_1a_2 \\ a_2a_1x + a_1b_2y = c_2a_1 \end{cases} \Big\vert +$
$a_1b_2x - a_2b_1x = c_1b_2 - c_2b_1$	$-a_2 b_1y + a_1b_2y = -c_1a_2 + c_2a_1$
$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1$	$(a_1b_2 - a_2b_1)y = c_2a_1 - c_1a_2$

Definicja

Wyrażenie $a_1b_2 - a_2b_1$ nazywamy wyznacznikiem układu i zapisujemy:

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Definicja

Wyrażenie $c_1b_2 - c_2b_1$ nazywamy wyznacznikiem ze względu na x i zapisujemy:

$$W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

Definicja

Wyrażenie $c_2a_1 - c_1a_2$ nazywamy wyznacznikiem ze względu na y i zapisujemy:

$$W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = c_2a_1 - c_1a_2$$

Rozwiązując podany wyżej układ równań liniowych otrzymaliśmy:

$\underbrace{(a_1b_2 - a_2b_1)}_{W} * \underbrace{x}_{x} = \underbrace{c_1b_2 - c_2b_1}_{W_x}$	$\underbrace{(a_1b_2 - a_2b_1)}_{W} * \underbrace{y}_{y} = \underbrace{c_2a_1 - c_1a_2}_{W_y}$

Wówczas:

1. Jeżeli $W \neq 0$, to układ ma jedno rozwiązanie postaci:

$$\begin{cases} x = \dfrac{W_x}{W} \\ y = \dfrac{W_y}{W} \end{cases}$$

Układ taki nazywamy wówczas układem równań oznaczonych lub układem równań niezależnych. Geometryczną interpretacją układu są dwie proste przecinające się w punkcie (x, y).

2. Jeżeli $W = W_x = W_y = 0$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań i nazywamy układem równań nieoznaczonych lub układem równań zależnych. Geometryczną interpretacją takiego układu są dwie proste pokrywające się.
3. Jeżeli $(W = 0 \text{ i } W_x \neq 0) \vee (W = 0 \text{ i } W_y \neq 0)$, to układ nie ma rozwiązań i nazywamy układem równań sprzecznych. Geometryczną interpretacją układu są dwie różne proste równoległe.

Przykład

Rozwiąż układ równań metodą wyznaczników.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ -4x + 3y = -2 \end{cases}$$

Obliczamy wyznacznik danego układu równań liniowych.

$$W = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 3 * 3 - (2 * (-4)) = 9 + 8 = 17$$

Obliczmy wyznacznik układu ze względu na x

$$W_x = \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 9 * 3 - (2 * (-2)) = 27 + 4 = 31$$

Obliczamy wyznacznik układu ze względu na y

$$W_y = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 3 * (-2) - (9 * (-4)) = -6 + 36 = 30$$

Zatem układ ma jedno rozwiązanie postaci:

$$\begin{cases} x = \dfrac{W_x}{W} \\ y = \dfrac{W_y}{W} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{31}{17} \\ y = \dfrac{30}{17} \end{cases}$$

Odp.: Rozwiązaniem jest para liczb ($\frac{31}{17}$, $\frac{30}{17}$).

Zadanie 1

Rozwiąż układ równań metodą wyznaczników.

$$\begin{cases} 18x - 2 = 21y \\ 15y + 7 = 24x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18x - 21y = 2 \\ 24x - 15y = 7 \end{cases}$$

Obliczamy wyznacznik układu równań.

$$W = \begin{vmatrix} 18 & -21 \\ 24 & -15 \end{vmatrix} = 18 * (-15) - (24 * (-21)) = -270 + 504 = 234$$

Obliczamy wyznacznik układu ze względu na x.

$$W_x = \begin{vmatrix} 2 & -21 \\ 7 & -15 \end{vmatrix} = 2 * (-15) - (7 * (-21)) = -30 + 147 = 117$$

Obliczamy wyznacznik układu ze względu na y.

$$W_y = \begin{vmatrix} 18 & 2 \\ 24 & 7 \end{vmatrix} = 18 * 7 - (24 * 2) = 126 - 48 = 78$$

Zatem podstawiając do wzoru otrzymamy:

$$\begin{cases} x = \dfrac{W_x}{W} \\ y = \dfrac{W_y}{W} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{117}{234} \\ y = \dfrac{78}{234} \end{cases}$$

Odp.: Rozwiązaniem układu jest para liczb ($\frac{117}{234}$, $\frac{78}{234}$).

Zadanie 2

Rozwiąż dany układ równań stosując metodę przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{1}{5}(x + 2) = 1,1 \\ x - 2y + \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{4}\left[2x + 3\left(y - \dfrac{1}{2}\right)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{5}x - \dfrac{2}{5} = \dfrac{11}{10} \\ x - 2y + \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{4}\left[2x + 3y - \dfrac{3}{2}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{5}x - \dfrac{2}{5} = \dfrac{11}{10} \quad / * 20 \\ x - 2y + \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4}y - \dfrac{3}{8} \quad / * 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10y + 5x - 4x - 8 = 22 \\ 8x - 16y + 1 = 4x + 6y - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 10y = 30 \quad / * 2 \\ 4x - 22y = -4 \quad / \div 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 20y = 60 \\ 2x - 11y = -2 \end{cases} \Bigg| -$$

Odejmując drugie równanie od pierwszego, mamy:

$$2x + 20y - (2x - 11y) = 60 - (-2)$$
$$2x + 20y - 2x + 11y = 60 + 2$$
$$31y = 62 \quad / \div 31$$
$$y = 2$$

Wstawiając otrzymane y = 2 do dowolnego z równań układu możemy obliczyć x.

$$x + 10y = 30$$
$$x + 10 * 2 = 30$$
$$x = 30 - 20$$
$$x = 10$$

Odp.: Rozwiązaniem układu równań jest para liczb (10, 2).

Zadanie 3

Suma cyfr liczby dwucyfrowej wynosi 13. Gdy zmienimy porządek cyfr, otrzymamy nową liczbę, która jest o 27 większa od liczby poprzedniej.

Oznaczmy przez x cyfrę dziesiątek szukanej liczby dwucyfrowej, za y natomiast cyfrę jedności tejże liczby. Szukana liczba ma więc postać 10x + y ; a nowa liczba, otrzymana po zmianie porządku cyfr liczby pierwszej, ma postać 10y + x.

Z treści zadania wynika, że suma cyfr szukanej liczby wynosi trzynaście.

$$x + y = 13$$

Liczba druga natomiast jest od niej większa o 27.

$$10x + y + 27 = 10y + x$$

Konstruujemy układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ 10x + y + 27 = 10y + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ 9x - 9y = -27 \quad / \div 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ x - y = -3 \end{cases} \Bigg| -$$

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ x + y - (x - y) = 13 + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ 2y = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 8 = 13 \\ y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 8 \end{cases}$$

Sprawdzamy, czy rozwiązanie układu równań jest prawidłowe. W tym celu wstawiamy otrzymane cyfry do z równań układu.

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ 10x + y + 27 = 10y + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 + 8 = 13 \\ 10 * 5 + 8 + 27 = 10 * 8 + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13 = 13 \\ 85 = 85 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L = P \\ L = P \end{cases}$$

Odp.: Szukaną liczbą jest 58.

Zadania do rozwiązania

1. Jeżeli pewną liczbę podwoimy i od otrzymanego wyniku odejmiemy 20, następnie otrzymaną w ten sposób nową liczbę znów podwoimy i znów odejmiemy 20, to otrzymamy 0. Co to za liczba?

2. Zmieszano dwa rodzaje syropu, syrop zawierający 70% czystego cukru z syropem zawierającym 20% czystego cukru. po zmieszaniu otrzymano 10 kg syropu zawierającego 50% czystego cukru. Oblicz masę każdego rodzaju syropu.

3. Na początku roku szkolnego w liceum było o 20 harcerzy więcej niż w sąsiednim technikum. Do końca roku szkolnego liczba harcerzy wzrosła w liceum o 25%, a w technikum o $\frac{2}{3}$ stanu na początku roku szkolnego i wtedy liczba harcerzy w obu rodzajach szkół była jednakowa. Ilu harcerzy było na początku roku szkolnego w każdej z tych szkół?

4. Dwa okręgi są styczne zewnętrznie. Odległość środków tych okręgów wynosi 21 cm, a stosunek długości promieni 4 : 3. Oblicz długość promienia każdego z okręgów.

5. Dwie fabryki według planu powinny wykonać łącznie 550 tokarek. Pierwsza fabryka przekroczyła plan o 10%, a druga o 8% i wówczas obie fabryki razem wykonały ponad plan 50 tokarek. Ile tokarek wykonała pierwsza fabryka, a ile druga?

2. UKŁAD RÓWNAŃ Z WARTOŚCIĄ BEZWZGLĘDNĄ

Definicja

Wartością bezwzględną z liczby x nazywamy:
- liczbę x , jeśli jest ona większa lub równa 0.
- liczbę przeciwną do liczby x , jeśli jest ona mniejsza od 0.

$$|x| = \begin{cases} x \text{ dla } x \geq 0 \\ -x \text{ dla } x < 0 \end{cases}$$

Przykład

Rozwiąż dany układ równań.

$$\begin{cases} |x| + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Rozbijamy wartość bezwzględną na dwa przypadki, korzystając z definicji wartości bezwzględnej.

$x \geq 0$	$x < 0$
Ponieważ $x \geq 0$ nie zmieniamy znaku wyrazu pod wartością bezwzględną. $\left.\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}\right\vert +$ $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$	Ponieważ $x < 0$ zmieniamy znak wyrazu pod wartością bezwzględną. $\left.\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}\right\vert +$ $\begin{cases} -x + y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} -3 + y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 5 \\ x = 3 \end{cases}$ $x = 3$ nie spełnia warunku $x < 0$.

Odp.: Rozwiązaniem układu jest para liczb (1, 1).

Zadanie 1

Rozwiąż układ równań z wartością bezwzględną.

$$\begin{cases} 2x + 3|y| = 13 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

$y \geq 0$	$y < 0$
$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - y = 3 \quad / * 3 \end{cases}$ $\left.\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 9x - 3y = 9 \end{cases}\right\vert +$ $2x + 3y + 9x - 3y = 13 + 9$ $11x = 22$ $x = 2$ Podstawiając $x = 2$ do jednego z równań mamy: $3x - y = 3$ $6 - y = 3$ $y = 3$	$\begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 3x - y = 3 \quad / * 3 \end{cases}$ $\left.\begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 9x - 3y = 9 \end{cases}\right\vert -$ $2x - 3y - 9x + 3y = 13 - 9$ $-7x = 4$ $x = -\frac{4}{7}$ Podstawiając otrzymane x do jednego z równań mamy : $3x - y = 3$ $-\frac{12}{7} - y = \frac{21}{7}$

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$	$y = -\frac{33}{7}$ $\begin{cases} x = -\frac{4}{7} \\ y = -\frac{33}{7} \end{cases}$

Odp.: Rozwiązaniem układu równań są dwie pary liczb (2, 3) i ($-\frac{4}{7}$, $-\frac{33}{7}$).

Zadanie 2

Rozwiąż układ równań.

$$\begin{cases} \vert x \vert + \vert y \vert = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$
$\left.\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = -2 \end{cases}\right\vert -$ $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$	$\left.\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = -2 \end{cases}\right\vert -$ $\begin{cases} x - y = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$ y=3 nie spełnia warunku $y < 0$	$\left.\begin{cases} -x + y = 1 \\ x - 2y = -2 \end{cases}\right\vert +$ $\begin{cases} -x + y = 1 \\ -y = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ x=0 nie spełnia warunku $x < 0$	$\left.\begin{cases} -x - y = 1 \\ x - 2y = -2 \end{cases}\right\vert +$ $\begin{cases} -x - y = 1 \\ -3y = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ $y=\frac{1}{3}$ nie spełnia warunku $y < 0$

Odp.: Rozwiązaniem danego układu jest para liczb (0, 1).

Zadanie 3

Rozwiąż układ równań.

$$\begin{cases} 7\vert x \vert + 2y = 3x + y \\ \vert 2x + 3y \vert = 3x \end{cases}$$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x + 3y \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -\frac{2}{3}x \end{cases}$	$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x + 3y < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ y < -\frac{2}{3}x \end{cases}$	$\begin{cases} x < 0 \\ 2x + 3y \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0 \\ y \geq -\frac{2}{3}x \end{cases}$	$\begin{cases} x < 0 \\ 2x + 3y < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0 \\ y < -\frac{2}{3}x \end{cases}$
$\begin{cases} 7x + 2y = 3x + 2 \\ 2x + 3y = 3x \end{cases}$ $\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ -x + 3y = 0 \quad / * 4 \end{cases}$ $\left.\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ -4x + 12y = 0 \end{cases}\right\vert +$	$\begin{cases} 7x + 2y = 3x + 2 \\ -2x - 3y = 3x \end{cases}$ $\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ -5x - 3y = 0 \end{cases}$ $W = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -2$	$\begin{cases} -7x + 2y = 3x + 2 \\ 2x + 3y = 3x \end{cases}$ $\begin{cases} -10x + 2y = 2 \\ -x + 3y = 0 \quad / * 10 \end{cases}$ $\left.\begin{cases} -10x + 2y = 2 \\ -10x + 30y = 0 \end{cases}\right\vert -$	$\begin{cases} -7x + 2y = 3x + 2 \\ -2x - 3y = 3x \end{cases}$ $\begin{cases} -10x + 2y = 2 \\ -5x - 3y = 0 \quad / * 2 \end{cases}$ $\left.\begin{cases} -10x + 2y = 2 \\ -10x - 6y = 0 \end{cases}\right\vert -$

$\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 14y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x + 2 * \frac{1}{7} = 2 \\ y = \frac{1}{7} \end{cases}$ $\begin{cases} 4x + \frac{2}{7} = 2 \\ y = \frac{1}{7} \end{cases}$ $\begin{cases} 4x = \frac{12}{7} \quad / \div 4 \\ y = \frac{1}{7} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = \frac{1}{7} \end{cases}$	$W_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6$ $W_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 10$ $\begin{cases} x = \frac{W_x}{W} \\ y = \frac{W_y}{W} \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \end{cases}$	$\begin{cases} -x + 3y = 0 \\ -28y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -x + 3y = 0 \\ y = -\frac{1}{14} \end{cases}$ $\begin{cases} -x + 3(-\frac{1}{14}) = 0 \\ y = -\frac{1}{14} \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{3}{14} \\ y = -\frac{1}{14} \end{cases}$ $y = -\frac{1}{14}$ nie spełnia warunku $y \geq -\frac{2}{3}x$.	$\begin{cases} -10x + 2y = 2 \\ 8y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -10x + 2y = 2 \\ 8y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -10x + \frac{2}{4} = 2 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{3}{20} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$ $y = \frac{1}{4}$ nie spełnia warunku $y < -\frac{2}{3}x$.

Odp.: Rozwiązaniem są dwie pary liczb ($\frac{3}{7}, \frac{1}{7}$) lub (3, -5).

Zadania do rozwiązania

1. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} y + x - 1 = 0 \\ \lvert y \rvert - x - 1 = 0 \end{cases}$$

2. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x + 3\lvert y \rvert = 1 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases}$$

3. Rozwiąż:

$$\begin{cases} y + 2x = -1 \\ y - \lvert x \rvert - 1 = 0 \end{cases}$$

4. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 7x + 5y = 2 \\ \lvert x \rvert + 2\lvert y \rvert = 3 \end{cases}$$

5. Rozwiąż:

$$\begin{cases} \lvert x + y \rvert = 1 \\ \lvert x \rvert + \lvert y \rvert = 1 \end{cases}$$

3. UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH Z PARAMETREM

Definicja

Parametrem nazywamy wielkość literową, która w danym zadaniu zastępuje liczbę.

Uwaga !

Parametry oznaczamy zazwyczaj pierwszymi literami alfabetu (a, b, c, d), a zmienne ostatnimi literami alfabetu (x, y, z).

Układy równań z parametrem rozwiązujemy traktując parametr jako wiadomą.

Przykład

Dla jakiego parametru m rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} mx - y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

jest para liczb (1, 2).

Powyższy układ równań najłatwiej rozwiązać można na dwa sposoby.

a) Sposób pierwszy.

Rozwiązujemy układ równań stosując metodę przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} mx - y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \Big| +$$

Dodając do siebie oba równania układu otrzymujemy:

$$mx + x = 5$$

$$x(m + 1) = 5 \;\; / : (m + 1) \;\; ; \text{założenie: } m \neq -1$$

$$x = \frac{5}{m + 1}$$

Podstawiając otrzymane x do drugiego równania danego układu otrzymujemy:

$$x + y = 3$$

$$y = 3 - x$$

$$y = 3 - \frac{5}{m + 1}$$

$$y = \frac{3 (m + 1)}{m + 1} - \frac{5}{m + 1}$$

$$y = \frac{3m + 3 - 5}{m + 1}$$

$$y = \frac{3m - 2}{m + 1}$$

Z treści zadania wynika, że rozwiązaniem układu ma być para liczb (1, 2). Podstawiając otrzymamy:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{5}{m + 1} & \Big| * (m + 1) \\ 2 = \dfrac{3m - 2}{m + 1} & \Big| * (m + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m + 1 = 5 \\ 2m + 2 = 3m - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 4 \\ m = 4 \end{cases} \Rightarrow m = 4$$

Odp.: Dla parametru m = 4 rozwiązaniem układu równań jest para liczb (1, 2).

b) Sposób drugi.

$$\begin{cases} mx - y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Jeśli rozwiązaniem układu ma być para liczb (1, 2), to musi ona spełniać każde z jego równań. Podstawiając otrzymujemy:

$$\begin{cases} m - 2 = 2 \\ 1 + 2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 4 \\ 3 = 3 \end{cases}$$

Odp.: Dla parametru m = 4 rozwiązaniem układu równań jest para liczb (1, 2).

Zadanie 1

Dla jakiego parametru a proste

$$x + y = a \qquad \text{i} \qquad x + ay = 1$$

przecinają się w III ćwiartce układu współrzędnych.

$$\begin{cases} x + y = a \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

Obliczamy wyznacznik układu równań:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1 \qquad ; a \neq 1$$

Obliczamy wyznacznik układu ze względu na x:

$$W_x = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1$$

Obliczamy wyznacznik układu ze względu na y:

$$W_y = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a$$

Zatem układ ma rozwiązanie postaci:

$$\begin{cases} x = \dfrac{W_x}{W} \\ y = \dfrac{W_y}{W} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{a^2 - 1}{a - 1} \\ y = \dfrac{1 - a}{a - 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{(a - 1)(a + 1)}{(a - 1)} \\ y = \dfrac{-(a - 1)}{(a - 1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a + 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Aby proste przecinały się w III ćwiartce układu współrzędnych, to rozwiązaniem musi być para liczb ujemnych.

$$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 1 < 0 \\ -1 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < -1 \\ -1 < 0 \end{cases}$$

Odp.: Dla parametru $a < -1$ proste te przecinają się w III ćwiartce układu współrzędnych.

Zadanie 2

Dla jakiego parametru t, rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} tx + \lvert y \rvert = 1 \\ \lvert x \rvert + ty = 0 \end{cases}$$

jest para liczb o przeciwnych znakach.

<table>
<tr><td>$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ponieważ rozwiązaniem ma być para liczb o przeciwnych znakach powyższe dwa układy równań nie spełniają warunków zadania.</td><td>$\begin{cases} tx - y = 1 \\ x + ty = 0 \end{cases}$
$W = \begin{vmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 + 1$
$W_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & t \end{vmatrix} = t$
$W_y = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$
$\begin{cases} x = \dfrac{t}{t^2 + 1} \\ y = \dfrac{-1}{t^2 + 1} \end{cases}$
$t > 0$</td><td>$\begin{cases} tx + y = 1 \\ -x + ty = 0 \end{cases}$
$W = \begin{vmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{vmatrix} = t^2 + 1$
$W_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & t \end{vmatrix} = t$
$W_y = \begin{vmatrix} t & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$
$\begin{cases} x = \dfrac{t}{t^2 + 1} \\ y = \dfrac{1}{t^2 + 1} \end{cases}$
$t < 0$</td></tr>
</table>

Odp.: Rozwiązaniem układu jest para liczb o przeciwnych znakach dla $t \notin R$; z wyjątkiem 0.

Zadanie 3

Przeprowadź dyskusję istnienia i liczbę rozwiązań układu w zależności od parametru.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + my = 2m \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & m \end{vmatrix} = 2m + 12$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2m & m \end{vmatrix} = -2m$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2m \end{vmatrix} = 4m - 16$$

układ oznaczony	układ nieoznaczony	układ sprzeczny
$W \neq 0$ $2m - 12 \neq 0$ $2m \neq 12$	$W = W_x = W_y = 0$	$\begin{cases} W = 0 \\ W_x \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} W = 0 \\ W_y \neq 0 \end{cases}$

$m \neq 6$ Układ ma rozwiązanie postaci: $\begin{cases} x = \dfrac{W_x}{W} \\ y = \dfrac{W_y}{W} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{-2m}{2m - 12} \\ y = \dfrac{4m - 16}{2m - 12} \end{cases}$	$\begin{cases} W = 0 \\ W_x = 0 \\ W_y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2m - 12 = 0 \\ -2m = 0 \\ 4m - 16 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2m = 12 \\ m = 0 \\ 4m = 16 \end{cases}$ $\begin{cases} m = 6 \\ m = 0 \\ m = 4 \end{cases}$ Ponieważ jest to układ sprzeczny, przypadek nie zachodzi.	$\begin{cases} 2m - 12 = 0 \\ -2m \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2m - 12 = 0 \\ 4m - 16 \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2m = 12 \\ m \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2m = 12 \\ 4m \neq 0 \end{cases}$ $\underbrace{\begin{cases} m = 6 \\ m \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m = 6 \\ m \neq 0 \end{cases}}_{m = 6}$

Odp.: Dla parametru $m \neq 6$ układ jest oznaczony i ma rozwiązanie postaci $\left(\dfrac{-2m}{2m - 12}, \dfrac{4m - 16}{2m - 12} \right)$,

dla parametru $m = 6$ układ jest sprzeczny.

Zadania do rozwiązania

1. Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x + my = 2m \end{cases}$$

jest para liczb dodatnich?

2. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 7 \\ mx - y = 2 \end{cases}$$

Dla jakich wartości parametru m liczby x, y spełniające ten układ są ujemne?

3. Dla jakich wartości parametru k rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} x - y = k - 1 \\ 2x - y = -3 - k \end{cases}$$

a) jest para liczb ujemnych?
b) jest para liczb dodatnich?
c) jest para liczb o przeciwnych znakach?

4. Para liczb (x, y), jest rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} x - y = -1 - m \\ 2x - y = 2m \end{cases}$$

Dla jakich wartości parametru m punkt $P = (x, y)$ należy do koła o promieniu $r = \sqrt{5}$ i środku w początku układu współrzędnych?

5. Zbadaj dla jakich wartości parametru m układ równań:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 7 \\ mx - y = 2 \end{cases}$$

jest układem równań niezależnych, zależnych, sprzecznych.

4. UKŁAD TRZECH I WIĘCEJ RÓWNAŃ LINIOWYCH.

METODY ROZWIĄZYWANIA

I. Metoda Sarrusa (wyznaczników).

Niech dany będzie układ:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

wtedy:

$$W = \left|\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$$

$$W_x = \left|\begin{array}{ccc} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{array} = d_1b_2c_3 + b_1c_2d_3 + c_1d_2b_3 - c_1b_2d_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$$

$$W_y = \left|\begin{array}{ccc} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{array} = a_1d_2c_3 + d_1c_2a_3 + c_1a_2d_3 - c_1d_2a_3 - a_1c_2d_3 - d_1a_2c_3$$

$$W_z = \left|\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array} = a_1b_2d_3 + b_1d_2a_3 + d_1a_2b_3 - d_1b_2a_3 - a_1d_2b_3 - b_1a_2d_3$$

i rozwiązaniem układu (o ile istnieje) jest trójka liczb:

$$\begin{cases} x = \dfrac{W_x}{W} \\ y = \dfrac{W_y}{W} \\ z = \dfrac{W_z}{W} \end{cases}$$

Przykład

Rozwiąż układ równań metodą wyznaczników.

$$\begin{cases} 3x + y + z = -2 \\ 2x + 2y + 3z = 8 \\ x + 3y + 2z = 6 \end{cases}$$

Obliczamy wyznacznik układu trzech równań:

$$W = \left|\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{array} = 3 * 2 * 2 + 1 * 3 * 1 + 1 * 2 * 3 - 1 * 2 * 1 - 3 * 3 * 3 - 1 * 2 * 2 = 12 + 3 + 6 - 2 - 27 - 4 = -12$$

Obliczamy wyznacznik układu ze względu na x:

$$W_x = \left|\begin{array}{ccc} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{cc} -2 & 1 \\ 8 & 2 \\ 6 & 3 \end{array} = -2 * 2 * 2 + 1 * 3 * 6 + 1 * 8 * 3 - 1 * 2 * 6 - (-2) * 3 * 3 - 1 * 8 * 2 = -8 + 18 + 24 - 12 + 18 - 16 = 24$$

Obliczam wyznacznik układu ze względu na y:

$$W_y = \left|\begin{matrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & -2 \\ 2 & 8 \\ 1 & 6 \end{matrix} = 3*8*2 + (-2)*3*1 + 1*2*6 - 1*8*1 - 3*3*6 - (-2)*2*2 = 48 - 6 + 12 - 8 - 54 + 8 = 0$$

Obliczam wyznacznik układu ze względu na z:

$$W_z = \left|\begin{matrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 6 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix} = 3*2*6 + 1*8*1 + (-2)*2*3 - (-2)*2*1 - 3*8*3 - 1*2*6 = 36 + 8 - 12 + 4 - 72 - 12 = -48$$

Podstawiając otrzymujemy:

$$\begin{cases} x = \dfrac{W_x}{W} \\ y = \dfrac{W_y}{W} \\ z = \dfrac{W_z}{W} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{24}{-12} \\ y = \dfrac{0}{-12} \\ z = \dfrac{-48}{-12} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$$

Odp.: Rozwiązaniem jest trójka liczb (-2, 0, 4).

II. Metoda przeciwnych współczynników.

Układ trzech i więcej równań liniowych rozwiązuje się tą metodą tak samo jak układ równań liniowych.

Przykład

Rozwiąż metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ z + y = 5 \\ x + z = 4 \end{cases} \Bigg| \; r_1 - r_2$$

Od równania pierwszego odejmujemy równanie drugie, otrzymując:

$$\begin{cases} x - z = -2 \\ x + z = 4 \\ x + y = 3 \end{cases} \Bigg| \; r_1 + r_2$$

Dodajemy do równania pierwszego równanie drugie, otrzymując w ten sposób x.

$$\begin{cases} 2x = 2 \\ x + z = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ 1 + z = 4 \\ 1 + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Odp.: Rozwiązaniem jest trójka liczb (1, 2, 3).

III. Metoda podstawiania.

Układ trzech i więcej równań liniowych rozwiązuje się tą metodą tak samo jak układ równań liniowych.

Przykład

Rozwiąż metodą podstawiania:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 13 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 13 \\ x = 6 - y - z \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(6 - y - z) + y + 3z = 13 \\ 3(6 - y - z) + y + z = 8 \\ x = 6 - y - z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12 - 2y - 2z + y + 3z = 13 \\ 18 - 3y - 3z + y + z = 8 \\ x = 6 - y - z \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y + z = 1 \\ -2y - 2z = -10 \quad / \div (-2) \\ x = 6 - y - z \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y + z = 1 \\ y + z = 5 \\ x = 6 - y - z \end{cases} \quad \Bigg| \; r_1 - r_2$$

Odejmując od pierwszego równania drugie otrzymujemy y.

$$\begin{cases} -2y = -4 \\ z = 5 - y \\ x = 6 - y - z \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Odp.: Rozwiązaniem układu jest trójka liczb (1, 2, 3).

Zadanie 1

Rozwiąż metodą Sarrusa:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 10 \\ 3x - 2y = 8 \\ 2x - 3z = -11 \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{matrix} = 12 + 0 + 0 + 4 - 0 - 27 = -11$$

$$W_x = \left|\begin{matrix} 10 & -3 & 1 \\ 8 & -2 & 0 \\ -11 & 0 & -3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 10 & -3 \\ 8 & -2 \\ -11 & 0 \end{matrix} = 60 + 0 + 0 - 22 - 0 - 72 = -34$$

$$W_y = \left|\begin{matrix} 2 & 10 & 1 \\ 3 & 8 & 0 \\ 2 & -11 & -3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 10 \\ 3 & 8 \\ 2 & -11 \end{matrix} = -48 + 0 - 33 - 16 - 0 + 90 = -7$$

$$W_z = \left|\begin{matrix} 2 & -3 & 10 \\ 3 & -2 & 8 \\ 2 & 0 & -11 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{matrix} = 44 - 48 + 0 + 40 - 0 - 99 = -63$$

Podstawiając otrzymujemy:

$$\begin{cases} x = \dfrac{W_x}{W} \\ y = \dfrac{W_y}{W} \\ z = \dfrac{W_z}{W} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{-34}{-11} \\ y = \dfrac{-7}{-11} \\ z = \dfrac{-63}{-11} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{34}{11} \\ y = \dfrac{7}{11} \\ z = \dfrac{63}{11} \end{cases}$$

Odp.: Rozwiązaniem jest ($\frac{34}{11}, \frac{7}{11}, \frac{63}{11}$).

Zadanie 2

Rozwiąż dowolną metodą.

$$\begin{cases} 2m + 3n = 12 \\ 3m + 2k = 11 \\ 3n + 4k = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3n + 4k = 10 \\ 2m + 3n = 12 & / * 3 \\ 3m + 2k = 11 & / * 2 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{matrix} 3n + 4k = 10 \\ 6m + 9n = 36 \\ 6m + 4k = 22 \end{matrix}\right| \quad r_2 - r_3$$

$$\left\{\begin{matrix} 3n + 4k = 10 \\ 9n - 4k = 14 \\ 2m + 3n = 12 \end{matrix}\right| \quad r_1 + r_2$$

$$\begin{cases} 3n + 4k = 10 \\ 12n = 24 \\ 2m + 3n = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 * 2 + 4k = 10 \\ n = 2 \\ 2m + 3 * 2 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = 1 \\ n = 2 \\ m = 3 \end{cases}$$

Odp.: Rozwiązaniem są liczby k = 1, n = 2, m = 3.

Zadanie 3

Rozwiąż:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 4 \\ -x + y + 3z = 1 \\ 2x + 3y - 2z = 6 \end{cases}$$

$$W = \left| \begin{array}{ccc} 3 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{array} \right| \begin{array}{cc} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{array} = -6 + 12 + 15 + 10 - 27 - 4 = 0$$

Ponieważ W = 0 dany układ nie ma rozwiązania.

Odp.: Brak rozwiązania.

Zadania do rozwiązania

1. Oblicz:

$$\begin{cases} 3(x - 1) + 2(y - 2) + (z - 7) = -8 \\ x + 2y + 7z = 10 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

2. Oblicz:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + 4y = 2 + 2z \\ 3(x + 1) - 2\left(y + \frac{1}{2}\right) + 4z = 6 \end{cases}$$

3. Oblicz:

$$\begin{cases} 5x + y - 7z = 0 \\ 5x - 2z = 3 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ 3x + 2y - 10z = -3 \end{cases}$$

4. Wyznacz x, y, z.

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 2x + 4y + z = 1 \\ 4x + 6y - z = 1 \\ 3x + 7y + 3z = 2 \end{cases}$$

5. Oblicz:

$$\begin{cases} x + 3y - 3z = 1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

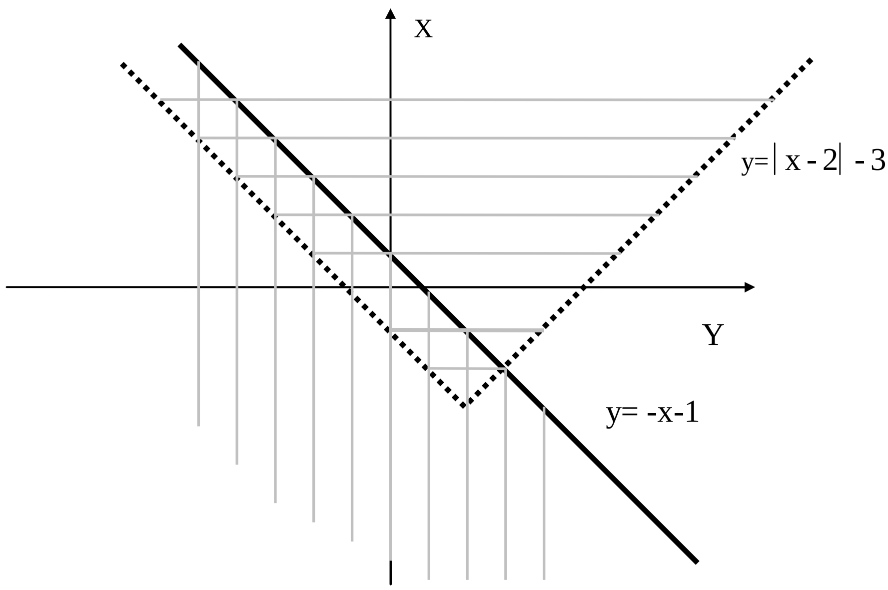
5. UKŁADY NIERÓWNOŚCI LINIOWYCH.

Układy nierówności liniowych rozwiązujemy graficznie.

Przykład

Przedstaw w układzie współrzędnych zbiór rozwiązań tego układu.

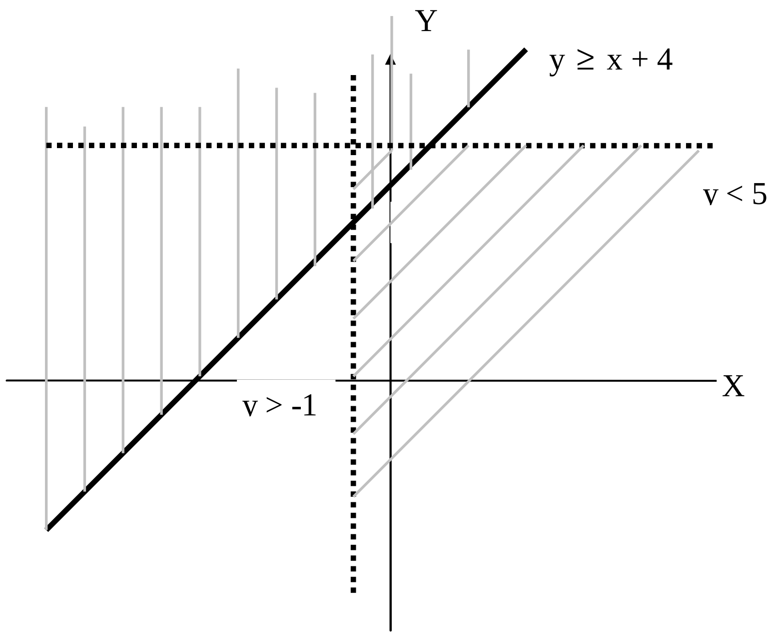
$$\begin{cases} y \le -x + 1 \\ y > |x - 2| - 3 \end{cases}$$



Zadanie 1

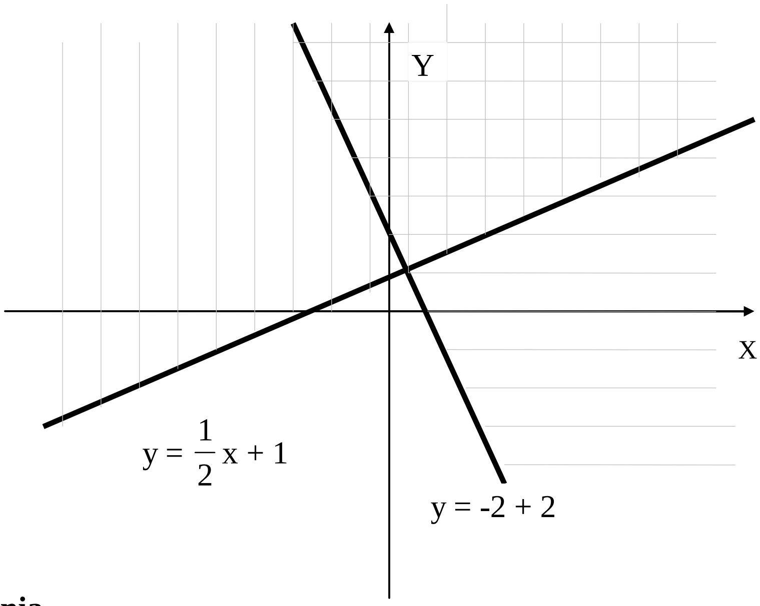
Wyznacz $A \cap B$, jeśli:

$$A = \{(x, y);\ y \ge x + 4\}$$
$$B = \{(x, y);\ x > -1 \wedge y < 5\}$$



Zadanie 2
W prostokątnym układzie współrzędnych XOY na płaszczyźnie wyznaczyć punkty, których współrzędne spełniają układ nierówności:

$$\begin{cases} 2x + y - 2 \geq 0 \\ x - 2y + 2 \leq 0 \end{cases}$$



Zadania do rozwiązania
1.Przedstaw na płaszczyźnie współrzędnych zbiór rozwiązań układu:

$$\begin{cases} y - 2x < 2 \\ 2x + 3y - 6 < 0 \end{cases}$$

2.Zilustruj na płaszczyźnie współrzędnych zbiór rozwiązań układu:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 6 < 0 \\ 2x - y < 2 \end{cases}$$

3.Przedstaw ilustrację graficzną zbioru rozwiązań układu:

$$\begin{cases} 3y + 2 \leq 2x \\ 2y + 5x \geq 10 \\ 5x - 2y - 10 \leq 0 \end{cases}$$

4.Przedstaw ilustrację graficzną zbioru rozwiązań układu:

$$\begin{cases} x - y \leq 1 \\ x + y \leq 2 \\ y \leq 2 \end{cases}$$

5. Przedstaw na płaszczyźnie współrzędnych zbiór rozwiązań układu:

$$\begin{cases} |x| + |y| \geq 1 \\ |x| + 2|y| \leq 4 \end{cases}$$

Odpowiedzi do zadań

1.1.15.

1.2. Syropu 70% było 6 kg, a syropu 20% było 4 kg .

1.3. Liczba harcerzy w Liceum - 80, w technikum - 60.

1.4. 12 cm i 9 cm .

1.5. 330 i 270.

2.1. x = 0, y = 1.

2.2. x = -5, y = 2 lub x = -2, y = -1.

2.3. x = 2, y = 3.

2.4. x = 1 , y = -1 lub $x = -\frac{11}{19}$, $y = \frac{23}{19}$.

2.5. Rozwiązaniem są takie punkty na prostej $x + y = 1$, że $x \geq 0$ i $y \geq 0$ oraz na prostej $x + y = -1$, takie że $x \leq 0$ i $y \leq 0$.

3.1. Rozwiązaniem jest para liczb dodatnich, gdy $m \in (0, 4)$.

3.2. Rozwiązaniem układu równań jest para liczb ujemnych dla $m > \frac{4}{3}$.

3.3. Rozwiązaniem układu jest:

a) $k > -\frac{1}{3}$,

b) $k < -1$,

c) $k \in (-1, -\frac{1}{3})$.

3.4. $m \in \left\langle -\frac{22}{25}, 0 \right\rangle$.

3.5. Dla $m = \frac{4}{3}$ układ równań sprzecznych,

dla pozostałych m układ równań niezależnych.

4.1. x = 1, y = 1, z = 1.

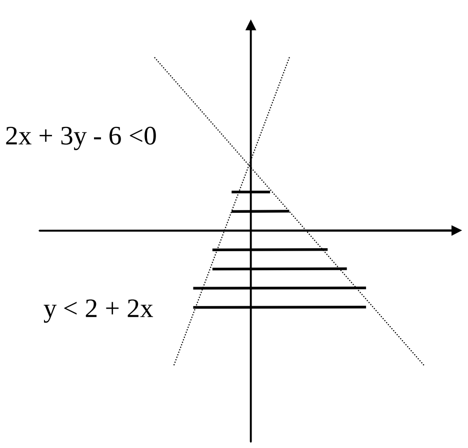
4.2. x = 1, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}$.

4.3. x = 1, y = 2, z = 1.

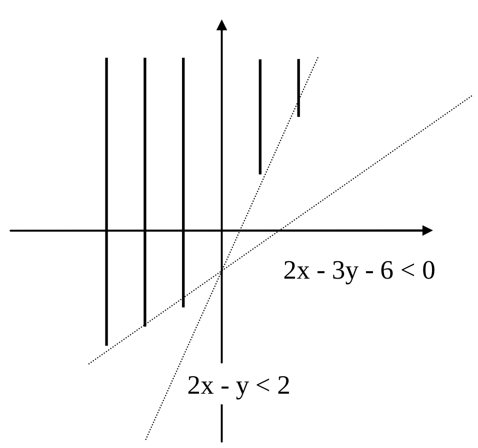
4.4. Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

4.5. Układ nie ma rozwiązań

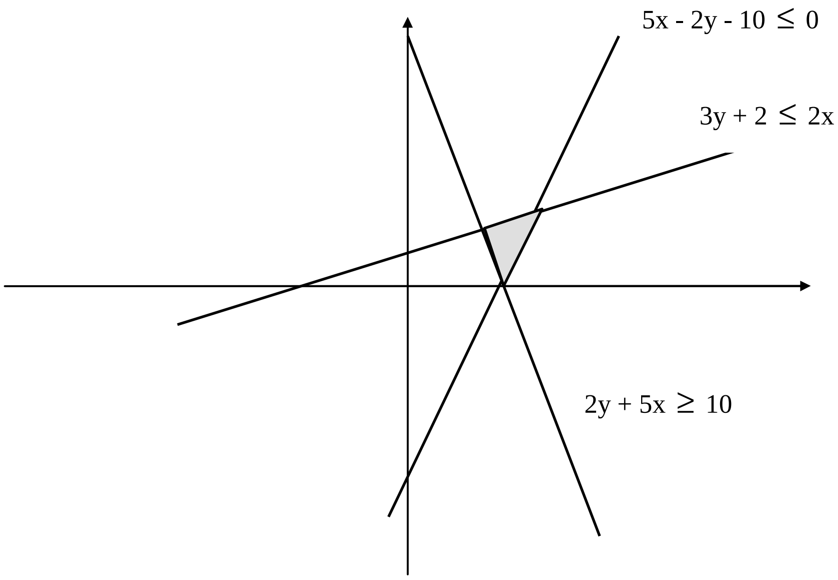
5.1.



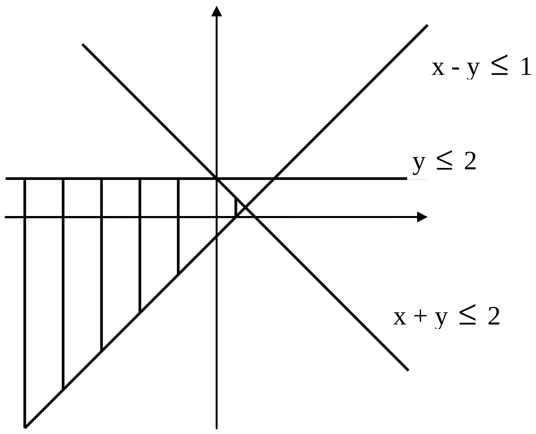
5.2.



5.3



5.4.



5.5.