Aleksandra Kościewicz

STEREOMETRIA

Stereometria jest geometrią przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej.

PROSTE I PŁASZCZYZNY

Elementami konstrukcyjnymi geometrii przestrzennej są ***punkty*** *,* ***proste*** *i* ***płaszczyzny****. Konstrukcje budowane są w przestrzeni , która sama nie jest elementem konstrukcyjnym.*

Punkt – jedno z podstawowych pojęć geometrii; element zbioru rozważanego łącznie ze strukturą, wraz z którą zbiór ten tworzy przestrzeń P. Punkt jest pojęciem pierwotnym.

Prosta– jedno z najważniejszych pojęć geometrii; pierwowzorem matematycznie rozumianej prostej są: linia, która w każdym swoim miejscu wygląda jak naprężona struna w stanie spoczynku, tor swobodnie spadającego przedmiotu, promień światła, itp. Pojęcie prostej jest pojęciem pierwotnym.

Płaszczyzna– jedno z najważniejszych pojęć geometrii; pierwowzorem matematycznie pojmowanej płaszczyzny jest: powierzchnia rozłożonej na stole kartki papieru, powierzchnia tablicy, itp. Płaszczyznę traktuje się jako pojecie pierwotne, albo jako podzbiór przestrzeni.

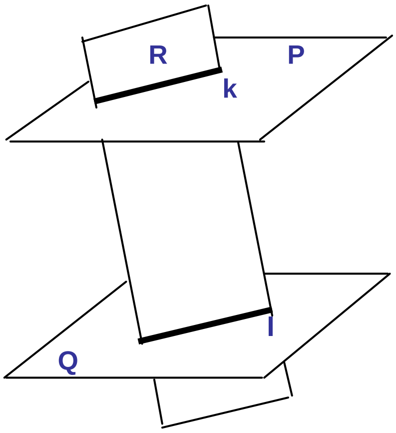
1. Pojęcia podstawowe:

Płaszczyzna jest wyznaczona w przestrzeni:
a) trzema punktami nie położonymi na jednej prostej
b) prostą i punktem nie położonym na niej
c) dwiema przecinającymi się lub równoległymi prostymi
Dwie różne płaszczyzny mogą być położone względem siebie w przestrzeni dwojako:
a) przecinają się według prostej , którą nazywamy *krawędzią przecięcia*.
b) nie maja punktów wspólnych i wówczas płaszczyzny takie określamy jako równoległe.
Rozważając położenie prostej w przestrzeni względem danej płaszczyzny widzimy, że zachodzą tu trzy przypadki:
a) prosta ma z daną płaszczyzną dwa punkty wspólne, a więc tym samym wszystkie pozostałe i wobec tego jest położona na niej.
b) prosta ma z daną płaszczyzną jeden punkt wspólny, a więc *przebija* płaszczyznę.
c) prosta nie ma z płaszczyzną żadnego punktu wspólnego i wówczas określamy ją jako prostą równoległą.
Rozpatrzmy w przestrzeni dwie proste równoległe, które nie przecinają się i nie są równoległe. Wynika z tego , że proste nie wyznaczają żadnej płaszczyzny – albo inaczej- nie można przez nie poprowadzić żadnej płaszczyzny. Dwie proste tak wzajemnie położone nazywamy *prostymi skośnymi*.

2. Płaszczyzny równoległe.

TWIERDZENIE

Jeżeli dwie płaszczyzny równoległe są przecięte płaszczyzna, to krawędzie przecięcia są równoległe. Na rysunku mamy $P \ \ Q$. Z twierdzenia wynika ,że wówczas $l \ \ k$. Jako bezpośredni wniosek z tego twierdzenia wynika, że przez dany punkt A nie położony na danej płaszczyźnie P można poprowadzić tylko jedną płaszczyznę Q równoległą do danej płaszczyzny P, tj. $Q \ \ P$.
Drugi wniosek to to, że dwie płaszczyzny równoległe do trzeciej są do siebie równoległe.

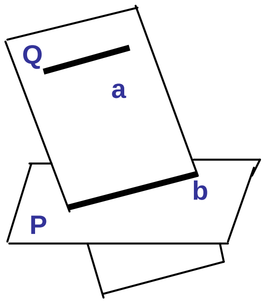


3. Proste równoległe.

Rozpatrując położenie prostych równoległych w przestrzeni możemy wygłosić następujące :

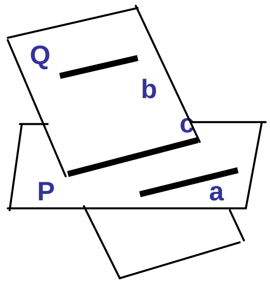
TWIERDZENIE

Jeżeli płaszczyzna przechodząca przez prostą równoległą do danej płaszczyzny przecina daną płaszczyznę, to krawędź przecięcia tych płaszczyzn jest równoległa do danej prostej.
Na rysunku mamy $a \ \ P$ oraz Q przechodzi przez a i przecina P wzdłuż b. Wówczas $b \ \ a$.



TWIERDZENIE

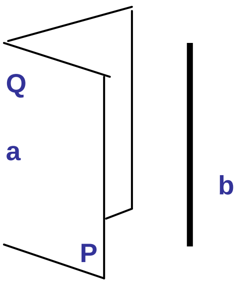
Jeżeli płaszczyzna poprowadzona przez prostą równoległą do danej prostej na danej płaszczyźnie przecina daną płaszczyznę, to krawędź przecięcia tych płaszczyzn jest równoległa do danej prostej. Na rysunku prostą daną jest a na płaszczyźnie P. Oprócz tego $a \ \ b$ i Q przechodzi przez b i przecina P. Krawędź przecięcia Q i P- prosta $c \ \ a$.



TWIERDZENIE

Jeżeli z dwóch prostych każda jest równoległa do trzeciej prostej w przestrzeni, to proste te są równoległe.

TWIERDZENIE



Prosta równoległa do każdej z dwóch przecinających płaszczyzn jest równoległa do ich krawędzi przecięcia.
Na rysunku jest $b \ \ P$ i $b \ \ Q$, P i Q przecinają się wzdłuż a. Wówczas musi być $a \ \ b$.

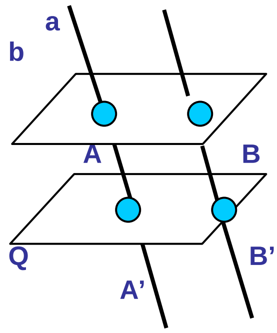
TWIERDZENIE

Jeżeli dwa kąty mają ramiona odpowiednio równoległe i zgodnie skierowane, to kąty te są równe a ich płaszczyzny są równoległe.

TWIERDZENIE

Odcinki prostych równoległych wyznaczone na tych prostych przez płaszczyzny równoległe są sobie równe.

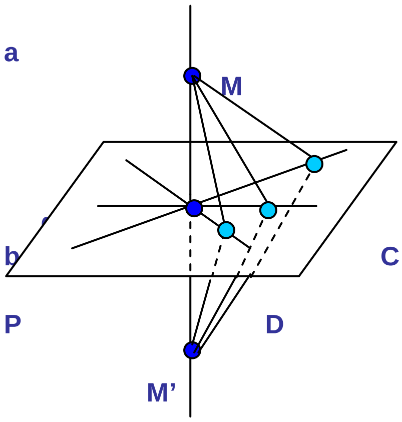
Na rysunku jest *a* *b* i *P* *Q* oraz *P* i *Q* przecinają *a* i *b*. Wówczas *AA’=BB’*.



4. Proste i płaszczyzny prostopadłe.

TWIERDZENIE

Jeżeli prosta jest prostopadła do dwóch różnych prostych na płaszczyźnie przechodzących przez punkt przecięcia prostej z płaszczyzną, to jest prostopadła do każdej prostej na płaszczyźnie przechodzącej przez punkt przecięcia prostej z płaszczyzną.



Mamy dowieść, że gdy *a* *b* i *a* *c*, wówczas również *a* *d*, gdzie *d* jest dowolna prostą na płaszczyźnie *P* przechodzącą przez punkt *A*.

Na prostej a odkładamy *AM=AM’*. Następnie proste *b*, *c* i *d* przecinamy prostą *l* i otrzymujemy punkty *B*, *C* i *D*. Łącząc punkt *B*, *C* i *D* z punktami *M* i *M’* otrzymujemy równe sobie trójkąty:

ABM≡ ABM’, ponieważ *AB=AB*, *AM=AM’* i *BAM= BAM’=90*

ACM≡ ACM’, ponieważ *AC=AC*, *AM=AM’* i *CAM= CAM’=90*

Z równości tych trójkątów wynika, że *BM=BM’* oraz *CM=CM’*, a stąd

BCM= BCM’

ponieważ *BC=BC*, czyli wszystkie boki są równe.

Dowodząc na tej podstawie równości odcinków *DM* i *DM’*, widzimy, że trójkąt *MDM’* jest trójkątem równoramiennym, w którym *AD* jest z założenia środkową, a wobec dowiedzionej równoramienności – jest wysokością, czyli

DAM =   DAM’ = 90   , a więc *a*   *d*

Prostą i płaszczyznę nazywamy *prostopadłymi*, jeżeli prosta jest prostopadła do każdej prostej na płaszczyźnie przechodzącej przez punkt przecięcia danej prostej z płaszczyzną.

Jak wynika z dowiedzionego twierdzenia, warunkiem dostatecznym prostopadłości prostej do płaszczyzny jest jej prostopadłość do dwóch prostych położonych na płaszczyźnie i przechodzących przez punkt przebicia prostej z płaszczyzną.

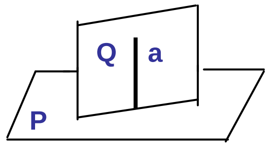
Z twierdzenia tego wnioskujemy oprócz tego, że przez dany punkt położony na płaszczyźnie lub poza nią można poprowadzić tylko jedną prostą prostopadłą do tej płaszczyzny, podobnie jak przez punkt położony na prostej lub poza nią można poprowadzić tylko jedną płaszczyznę prostopadłą do tej prostej.

TWIERDZENIE

Jeżeli z dwóch prostych równoległych jedna jest prostopadła do płaszczyzny, to druga również jest prostopadła do tej płaszczyzny.

TWIERDZENIE

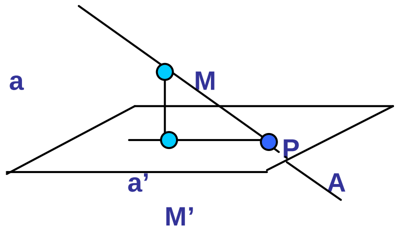
Jeżeli z dwóch płaszczyzn równoległych jedna jest prostopadła do danej prostej, to druga również jest prostopadła do tej prostej.
Dwie płaszczyzny nazywamy *prostopadłymi*, jeżeli jedna przechodzi przez prostą prostopadłą do drugiej.
Na rysunku jest *Q*   *P* albo przeciwnie *P*   *Q*, ponieważ *Q* przechodzi przez *a*   *P*.



TWIERDZENIE
Jeżeli dwie płaszczyzny są prostopadłe, to każda z nich przechodzi przez prosta prostopadłą do drugiej i każda prosta poprowadzona prostopadle do jednej z płaszczyzn przez dowolny punkt drugiej płaszczyzny znajduje się w drugiej płaszczyźnie.

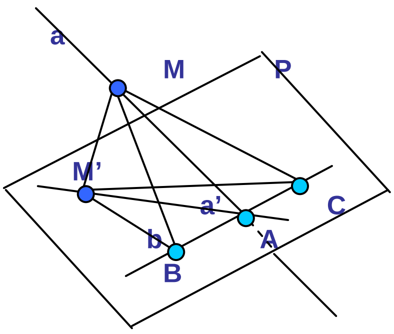
5. Kąty między prostymi a płaszczyznami.

Jeżeli prosta nie jest prostopadła ani równoległa do płaszczyzny, to kątem między prosta a płaszczyzną nazywamy kąt ostry utworzony przez tę prostą z jej rzutem na płaszczyznę.
Na rysunku rzutem prostej *a* jest prosta *a*' i wobec tego wspomnianym kątem jest kąt .
Jeżeli prosta jest prostopadła do płaszczyzny, to rzutem jej na płaszczyźnie jest punkt jej przebicia z płaszczyzną i powyższe określenie nie może obejmować tego przypadku.



Prosta tworzy wówczas kąt prosty z każda prostą na płaszczyźnie przechodząca przez punkt przebicia płaszczyzny prostopadłą. Zauważmy, że w ten sposób określony kąt między prostą a płaszczyzną jest najmniejszym z kątów tych, które tworzy prosta z prostymi płaszczyzny przechodzącymi przez punkt przebicia *A*.

TWIERDZENIE



Jeżeli prosta leżąca na płaszczyźnie i przechodząca przez punkt przecięcia pochyłej z płaszczyzną jest prostopadła do rzutu pochyłej, to jest ona prostopadła do pochyłej.
Na rysunku jest *b*   *a'*, gdzie *a'* jest rzutem prostej pochyłej a na płaszczyznę *P*. Mamy dowieść ,że *b*   *a*. Na prostej a obieramy dowolny punkt *M*, którego rzutem jest punkt *M'*, a na prostej *b* odkładamy dowolne, ale równe odcinki po obu stronach punktu *A* -   *AB* = *AC*. Następnie łączymy punkty *M* i *M'* z punktami *B* i *C*. Jak widzimy   *M'AB* ≡ *M'AC*, skąd wynika, że *M'B* = *M'C*. Wobec tego   *MM'B* ≡   *MM'C* i stąd mamy *MB* = *MC*, czyli trójkąt *BMC* jest trójkątem równoramiennym, w którym *MA* jest z założenia środkową, a wskutek dowiedzionej równoramienności jednocześnie i wysokością, wobec czego
  MAB =   *MAC* = *90* albo *b*   *a*

Twierdzenie to nosi nazwę *twierdzenia o trzech prostopadłych*.
Kątem dwuściennym nazywamy każdą z dwóch części przestrzeni, na którą dzielą przestrzeń dwie płaszczyzny *P* i *Q* o wspólnej krawędzi. Płaszczyzny *P* i *Q* nazywamy *ścianami kąta dwuściennego*, a ich wspólna krawędź – *krawędzią kąta dwuściennego*.

WIELOSCIANY

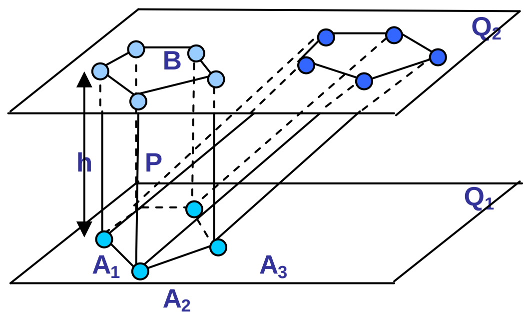
__Wielościanem__ nazywamy część przestrzeni składającą się z punktów, położonych wewnątrz powierzchni wielościennej i z punktów położonych na tej powierzchni.

__Powierzchnia__ wielościanu nazywamy figurę utworzoną przez wielokąty położone w różnych płaszczyznach w ten sposób, że każdy bok jest wspólny dla dwu wielokątów.

Wielokąty ograniczające dany wielościan nazywamy ,__ścianami__ wielościanu, a wierzchołki i boki tych wielokątów nazywamy odpowiednio __wierzchołkami__ i __krawędziami__ wielościanu.

1. Graniastosłupy.

Graniastosłupem nazywamy wielościan, którego wszystkie wierzchołki znajdują się na dwóch płaszczyznach równoległych, zwanych *płaszczyznami podstaw dolnej i górnej*, i którego wszystkie krawędzie nie położone na tych płaszczyznach , zwane *krawędziami bocznymi* są równoległe.



W przypadku, gdy krawędzie boczne są prostopadłe do płaszczyzny podstaw, graniastosłup nazywamy *prostym*, a w przypadku gdy są one pochyłe, graniastosłup nazywamy *pochyłym*.
Jeżeli podstawa graniastosłupa jest wielokąt foremny, graniastosłup nazywamy *prawidłowym* (*foremnym*). Graniastosłup, którego wszystkie ściany są prostokątami , nosi nazwę *prostopadłościanu*.
Oznaczmy: powierzchnię podstawy – B, powierzchnie boczną – P, powierzchnie całkowitą – S i objętość – V. Dla dowolnego graniastosłupa będzie:

$\boldsymbol{S = P + 2B}$

W przypadku graniastosłupa prostego ściany boczne są prostokątami i wobec tego powierzchnia boczna

$P = a_1h + a_2h + . . . + a_nh = (a_1 + a_2 + . . . + a_n) h = 2ph$

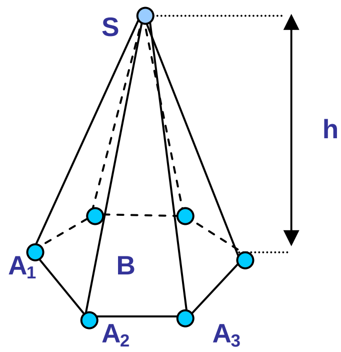
$\boldsymbol{P = 2ph}$

gdzie $2p$ oznacza obwód podstawy, a h wysokość graniastosłupa za która uważa się w obu przypadkach odległość płaszczyzn podstaw.
Objętość graniastosłupa zarówno prostego, jak i pochyłego wyraża się wzorem:

$\boldsymbol{V = Bh}$

2. Ostrosłup ostry i ścięty.

Ostrosłupem n-kątnym nazywamy wielościan, którego jedną ścianą, zwaną *podstawą* ostrosłupa, jest *n-kąt*, a pozostałe ściany, zwane *ścianami bocznymi*, są trójkątami o wspólnym wierzchołku.
Wysokością ostrosłupa nazywamy odległość wierzchołka od powierzchni podstawy.
Ostrosłup nazywamy p*rawidłowym* (*foremnym*), jeżeli podstawa jego jest wielokąt foremny, a spodek wysokości ostrosłupa znajduje się w środku okręgu opisanego na podstawie.



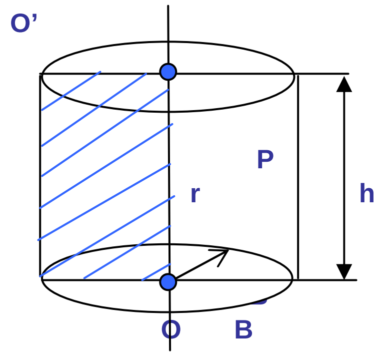
Według oznaczeń podanych powyżej jest:
$\boldsymbol{S = P + B}$
gdzie $P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$ jest sumą trójkątów tworzących ściany boczne .
Objętość ostrosłupa wyraża się wzorem:
$\boldsymbol{V = 1/3\ Bh}$

Jeżeli ostrosłup przetniemy płaszczyzną równoległą do podstawy, to otrzymamy dwa wielościany, z których dolny nazywamy *ostrosłupem ściętym*.
Objętość ostrosłupa ściętego obliczamy jako różnicę ostrosłupa przed ścięciem o wysokości $h + x$ i ostrosłupa odciętego o wysokości x.
A więc mielibyśmy:
$V = 1/3B_1 (h + x) – 1/3B_2x = 1/3B_1h + 1/3(B_1 – B_2) x$

BRYŁY OBROTOWE

1. Walec

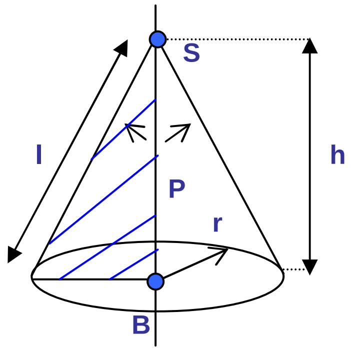
Walcem nazywamy bryłę ograniczoną powierzchnią, która powstaje przy obrocie prostokąta dokoła jednego z jego boków.
Przekrojem osiowym walca nazywamy przekrój, który powstaje wówczas, gdy płaszczyzna tnąca przechodzi przez oś walca *OO'*. Przekrój ten jest prostokątem o bokach *2r* i *h*.
W przypadku szczególnym, gdy przekrój ten jest kwadratem, tj. gdy *2r = h*, walec nazywamy *równobocznym*.



Traktując walec jako graniastosłup prosty prawidłowy, którego podstawa jest wielokąt foremny o nieskończenie wielkiej ilości boków, stojąc na gruncie powyżej przyjętych oznaczeń, mamy:
$\boldsymbol{B = \ r^2}$
$\boldsymbol{P = 2\ \ r\, h}$
$\boldsymbol{V = \ r^2 h}$
$\boldsymbol{S = 2\ \ r\, (r + h)}$

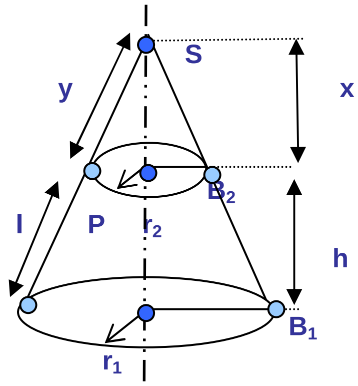
2. Stożek ostry i ścięty:

Stożkiem nazywamy bryłę ograniczoną powierzchnią, która powstaje przy obrocie trójkąta prostokątnego dokoła jednej z jego przyprostokątnych.
W przekroju poprzecznym stożka otrzymuje się trójkąt równoramienny, którego kąt wierzchołkowy 2 nazywamy *kątem rozwarcia* stożka. Ramiona *l* tego trójkąta nazywamy *tworzącymi stożka*.
Między odcinkami *r* , *l* i *h* zachodzi oczywista zależność:
$l^2 = r^2 + h^2$
Traktując stożek jako ostrosłup o nieograniczonej ilości ścian bocznych łatwo wyprowadzamy przez analogię następujące zależności:



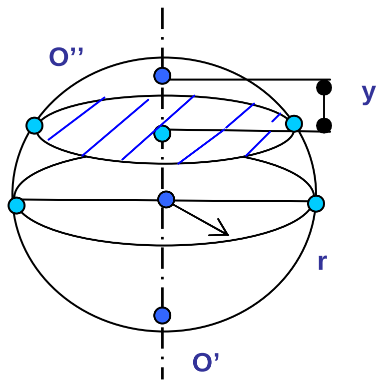
$B = r^2$
$S = r (r + l)$
$P = r l$
$V = 1/3 \ r^2 h$

Aby obliczyć wielkości *B, P, S,* i *V stożka ściętego* o promieniach podstawy r_1 *i* r_2, wysokości *h* i tworzącej *l*, uzupełniamy go do stożka ostrego i znajdujemy wysokość *x*, oraz tworzącą *y* stożka dobudowanego
$x = (r_2 h)/(r_1 - r_2)$ oraz $y = (r_2 l)/(r_1 - r_2)$
Mając obliczone wartości *x* oraz *y*, powierzchnię boczną stożka ściętego *P* i objętość *V* znajdujemy jako różnicę powierzchni i objętości stożków pierwotnego i odciętego.
Mamy wówczas:



$B_1 = r_1^2$
$B_2 = r_2^2$
$P = (r_1 + r_2) l$
$S = [(r_1 + r_2) l + r_1^2 + r_2^2]$
$V = 1/3 \ h (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

3. Kula:



Kulą nazywamy bryłę ograniczoną powierzchnią kulistą, która powstaje przez obrót półkola dokoła średnicy.
Przecinając kulę płaszczyzną przechodzącą przez jej środek *O* otrzymujemy w przekroju koło o promieniu równym promieniowi kuli *r*. Przekrój dowolna płaszczyzna dzieli kulę na dwie bryły zwane *odcinkami kulistymi* albo *czaszami kulistymi*, których wielkością charakterystyczną przy danym promieniu *r* jest wysokość *h*. Oczywiście wysokość drugiej czaszy wynosi *2r –h.*

Dla kuli jest:
$S = 4 \ r^2$
$V = 4/3 \ r^3$

Dla czaszy kulistej jest:
$P = 2 \ r h$
$V = h^2 (r - 1/3 h)$
Wzory te znajdują zastosowanie w odniesieniu do obydwu czasz, na które płaszczyzna dzieli kulę. Przy obliczaniu wartości *P* i *V* drugiej czaszy należy zamiast wartości *h* podstawić wartość *2r – h.*

P w przypadku czaszy określa część powierzchni kulistej bez powierzchni przekroju kołowego. Jeżeli przetniemy kulę dwiema płaszczyznami równoległymi, oddalonymi od siebie o $g \quad 2r$, to otrzymamy warstwę kuli, której grubość (wysokość) wynosi g, a podstawami są koła o promieniach r_1 i r_2. Powierzchnię boczną otrzymanej bryły nazywamy *pasmem kulistym*. Wynosi ona :

$$\boldsymbol{P = 2 \quad r\ g}$$

Objętość warstwy kuli

$$\boldsymbol{V = 1/2 \quad r_1^2 g + 1/2 \quad r_2^2 g + 1/6 \quad g^3}$$