FUNKCJA POTĘGOWA

Def.

Potęgą liczby „a" o współczynniku naturalnym n $\in$ N określana jest następująco:

$$\begin{cases} a^1 = a \\ a^{n+1} = a \cdot a^n \end{cases}$$

podstawa potęgi$\rightarrow$**a**$^{\mathbf{n}}$$\leftarrow$wykładnik potęgi

Pojęcie potęgi można rozszerzać na potęgę o wykładniku całkowitym, wymiernym i rzeczywistym.

WŁASNOŚCI POTĘG:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2. $a^n \div a^m = a^{n-m}$

3. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\quad b \neq 0$

5. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

7. $a^0 = 1$

8. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

9. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{n}{m}}$

Podstawa potęgi uzależniona jest od wykładnika:

Jeśli n$\in$N, to a$\in$R

Jeśli n$\in$C, to a$\in$R\{0}

Jeśli n$\in$W, to a$\in$R$_+$\{0}

Jeśli n$\in$R, to a$\in$R$_+$

<u>Przykład:</u>

1.

$$\frac{2\cdot3^{20}-5\cdot3^{19}}{9^9} = \frac{3^{19}\cdot(2\cdot3-5)}{(3^2)^9} = \frac{3^{19}}{3^{18}} = 3^{19-18} = 3$$

2.

$$\frac{4^7+16^5(2^2-2)}{2^5} = \frac{2^{14}+2^{20}\cdot2}{2^5} = \frac{2^{14}+2^{21}}{2^5} = \frac{2^5(2^9+2^{16})}{2^5} = 2^9 + 2^{16}$$

3.

D : a≠0 i b≠0

$$a\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+b\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}=\frac{2ab\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{2ab\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot 2ab\sqrt{a}+\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)2ab\sqrt{b}}{a-b}=\frac{2a^2b-2ab\sqrt{a}\sqrt{b}+2ab\sqrt{a}\sqrt{b}+2ab^2}{a-b}=\frac{2ab(a+b)}{a-b}$$

D′: a≠b

WYKRESY FUNKCJI PTĘGOWEJ

Def.

Funkcję f: D→R postaci $f(x)=x^{n}$ nazywamy funkcją potęgową.

Dziedzina funkcji potęgowej zależy od wykładnika n:
Jeżeli n∈N , to D=R
Jeżeli n∈C , to D=R\{0}
Jeżeli n∈W, to $D=R_{+}\cup\{0\}$
Jeżeli n∈R , to $D=R_{+}$

Przykład:

1.

$y = x^2$

.

D=R

a) Funkcja ta jest parzysta, ponieważ : -x∈D i f(-x)=f(x) ;$[f(-x)=(-x)^2=x^2]$.
Wykres funkcji jest symetryczny względem osi OY .

b) Funkcja ta jest malejąca w przedziale (-∞,0), ponieważ x_1 i x_2∈R oraz $x_1 + x_2<0$, $f(x_1)-f(x_2)>0$

c)Funkcja ta jest rosnąca (0,+∞), ponieważ x_1 i x_2∈R oraz x_1 i $x_2>0$, $f(x_1)-f(x_2)<0$

d)Ma jedno miejsce zerowe P(0,0)

e)Nie jest to funkcja różnowartościowa, ponieważ f(-1) = f(1) = 1

f)Jest to funkcja „na", ponieważ każdemu elementowi y∈Y przyporządkowany jest co najmniej jeden element x∈X

2.

$y = x$

D=R

a)Funkcja jest nieparzysta, ponieważ -x∈D i f(-x) = -f(x) [f(-1) = -1]

b)Funkcja ta jest rosnąca, ponieważ x_1 i x_2∈R, to $x_1+x_2>0$ $f(x_1)-f(x_2)<0 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

c)Ma jedno miejsce zerowe P(0,0)
d)Funkcja jest różnowartościowa
e)Jest to funkcja „na", ponieważ każdemu elementowi y∈ Y podporządkowany jest conajmniej jeden element x∈ X

.

3.

$y = x^3$

.

D=R
a)Funkcja jest nieparzysta
b)Funkcja jest rosnąca
c) Funkcja jest różnowartościowa
d) Funkcja jest „na"
e) Ma jedno miejsce zerowe P(0,0)

4.

$y = \frac{1}{x}$

.

D=R\{0}
a)Funkcja nie jest parzysta ani nieparzysta
b)Nie ma miejsca zerowego
c)Funkcja jest różnowartościowa
d)Funkcja jest „na"

5.

$$y = \frac{1}{x^2}$$

.

D=R\{0}
a)Funkcja jest parzysta
b)Funkcja nie jest różnowartościowa
c)Funkcja nie ma miejsca zerowego

PRZEKSZTAŁCANIE WYKRESÓW FUNKCJI

1.

$$y = \left| -\left|(x-3)^2 - 2\right| + 1 \right|$$

a)

$$y = x^2$$

-----------Funkcje: potęgowa, wykładnicza, logarytmiczna.------------

b)

$y = (x-3)^2 - 2$

c)

$y = \left|(x-3)^2 - 2\right|$

d)

$y = -\left|(x-3)^2 - 2\right|$

e)

$y = -\left|(x-3)^2 - 2\right| + 1$

f)

$y = \left|-\left|(x-3)^2 - 2\right| + 1\right|$

.

NIERÓWNOŚCI PIERWIASTKOWE

<u>Sposób rozwiązywania:</u>

Przykład :

1.

$\sqrt{2x-1} - \sqrt{x+2} \geq 0$

a) wyznaczanie dziedziny !!!

D: 2x-1>0 $\wedge$ x+2>0

D={x$\in$R; x$\geq \frac{1}{2}$}

b)rozwiązanie

$\sqrt{2x-1} \geq \sqrt{x+2}$

podnosimy obie strony do potęgi i otrzymujemy nierówność:

2x - 1$\geq$x + 2

x$\geq$ 3

Odp. Rozwiązaniem nierówności są $x \geq 3$

2.

Można rozwiązywać te nierówności poprzez podstawienie.

$\sqrt{x-2} + x > 4$

D={x∈R; x>2}

Przekształcamy przykład następująco:

$\sqrt{x-2}$ > 4-(x-2)-2

Dokonujemy podstawienia: t = $\sqrt{x-2}$

$t_1=1$ lub $t_2=-2$

t∈(-∞,-2)∪(1,∞)

$\sqrt{x-2}$ >-2 lub $\sqrt{x-2}$ >1

x∈(3,4>

Odp. Rozwiązaniem nierówności jest x∈(3,4>

ZADANIA:

1.

Rozwiąż:

$$\left(\frac{2\sqrt{x}}{x^2}\right)^{-3} = \left[\left(x\sqrt{x}\right)^{-1}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Odp. x= $2^{\frac{4}{5}}$

2.

Rozwiąż:

$$\left[\sqrt[3]{x-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{6}{5}} - \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]^{\frac{6}{5}} = 0$$

Odp.x=1

3.

Narysuj wykres funkcji:

y= $\left|\left|(x+2)^2 - 1\right| + 1\right|$

4.

Rozwiąż:

$$\sqrt{\frac{3x-4}{3-x}} < 1$$

Odp. x∈ $(\frac{7}{4},3)$

FUNKCJA WYKŁADNICZA

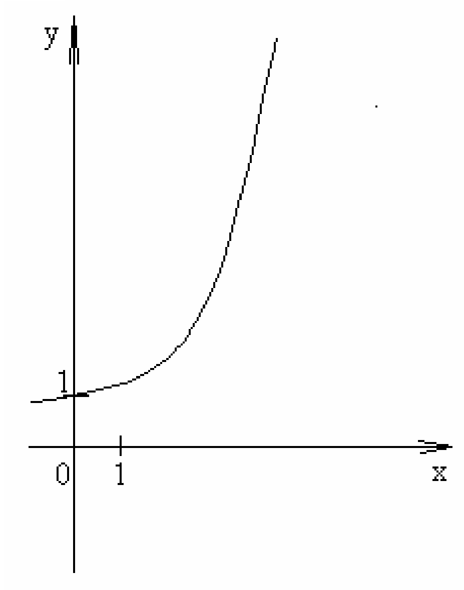
Funkcję f: R→R określoną wzorem f(x) = a^x nazywamy funkcją wykładniczą (a>0 i a≠1).

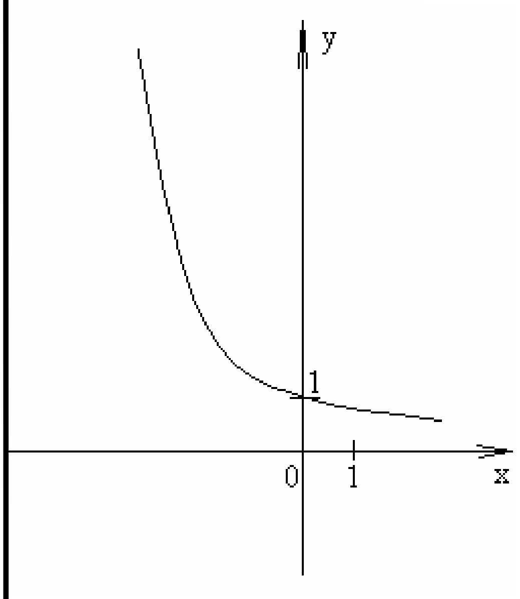
Czasami funkcję wykładniczą oznacza się symbolem $\exp_a(x)$

a>1	0<a<1
np. $y = 2^x$	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

x	-1	0	1	2
y	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$





a>1:

a)D=R
b)Funkcja przyjmuje zawsze wartości dodatnie w przedziale (0,+∞)
c)Funkcja nie jest parzysta ani nieparzysta
d)Funkcja jest ściśle monotoniczna (rosną- ca)
e)Wykres przecina oś OY w punkcie 1

0<a<1:

a)D=R
b)Funkcja przyjmuje zawsze wartości dodatnie w przedziale(0,+∞)
c)Funkcja nie jest parzysta ani nieparzysta
d)Funkcja jest ściśle monotoniczna (malejąca)
e)Wykres przecina oś OY w punkcie 1

Wykres każdej funkcji wykładniczej przecina oś OY w punkcie 1.

Wykresy y = a^x i y = $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ są symetryczne względem osi OY.

Funkcja wykładnicza przyjmuje zawsze wartości dodatnie.
Jeśli a>1, to funkcja jest rosnąca .
Jeśli 0<a<1, to funkcja jest malejąca.

y= 2^x y= 3^x y= 4^x

.
Współczynnik a wpływa na kształt krzywej wykładniczej.

PRZEKSZTAŁCANIE WYKRESÓW FUNKCJI WYKŁADNICZEJ

1.

$y = \left| \left|2^x - 1\right| - 2 \right|$

a)

$y = 2^x$

b)

$y = 2^x - 1$

c)

$y = |2^x - 1|$

d)

$y = |2^x - 1| - 2$

e)

$y = ||2^x - 1| - 2|$

RÓWNANIA WYKŁADNICZE

Przy rozwiązywaniu równań wykładniczych korzystamy z twierdzenia:
$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Przykład:
1.
$3^{\frac{1}{x}} = 9^{\frac{x-1}{x}}$
D=R\{0}
$3^{\frac{1}{x}} = 3^{2\left(\frac{x-1}{x}\right)}$
$\frac{1}{x} = \frac{2x-2}{x}$
$1 = 2x - 2$
$x = \frac{2}{3}$
2.
$25^x - 5^{x+1} + 5 = 5^x$
$\left[5^x\right]^2 - 5^x \cdot 5^1 - 5^x + 5 = 0$
$\left[5^x\right]^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$
$5^x = t$
$t^2 - 6t + 5 = 0$

$\sqrt{\Delta} = 4$
t_1=5 lub t_2=1
$5^x = 5$ lub $5^x = 5^0$
$x = 1$ $x = 0$

3.
$2^{1+x+x^2+\dots} = 4$
Zauważmy, że potęga po lewej stronie równania jest szeregiem geometrycznym.

Aby szereg zbieżny musi zachodzić warunek:

$|q|<1$ $|x|<1$ $x \in (-1,1)$

$S=\frac{a_1}{1-q}$ $\quad S=\frac{1}{1-x}$

$2^{\frac{1}{1-x}}=2^2$

$D=\{x\in R; x\neq 1\}$

$\frac{1}{1-x}=2$

$x=\frac{1}{2}$

NIERÓWNOŚCI WYKŁADNICZE

Przy rozwiązywaniu nierówności wykładniczych korzystamy z twierdzenia:

$0 \quad < a < 1 \Rightarrow a^{x_1} \ < \ a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$

$a > \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_1} \langle a^{x_2} \ \Leftrightarrow x_1 \langle x_2$

Przykład:

1.

$\sqrt{7}^{\frac{1}{x}} \langle \sqrt{7}^{2x}$

$D=\{x\in R; x\neq 0\}$

$\frac{1}{x}\langle 2x$

$x(2x^2-1)\rangle 0$

$x_1=0 \vee x_2=\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x_2=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

$x\in(-\frac{\sqrt{2}}{2},0)\cup(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$

$4^{x^2}-2^{-x+1}\geq 0$

$2^{2x^2}\geq 2^{-x+1}$

$2x^2+x-1\geq 0$

$\sqrt{\Delta}=3$

$x_1=\frac{1}{2}\vee x_2=-1$

$x\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle\frac{1}{2},+\infty)$

2.

$\left(\frac{1}{8}\right)^{2x+3} \rangle 4$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{6x+9} \rangle \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$6x+9 \langle -2$

$6x \langle -11$

$x \langle -\frac{11}{6}$

ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ I NIERÓWNOŚCI Z NIEWIADOMĄ W PODSTAWIE I WYKŁADNIKU POTĘGI

Przykład:

1.

$\sqrt{x^x} = x^{\sqrt{x}}$

D={x∈R; x>0}

Jeśli x=1 to otrzymamy:

1=1

x=1 jest rozwiązaniem.

2.

Jeśli x $\neq$ 1

$\sqrt{x^x} = x^{\sqrt{x}}$

$x^x = x^{2\sqrt{x}}$

$x = 2\sqrt{x}$

$x^2 - 4x = 0$

$x = 0 \vee x = 4$

x=0 $\notin D$

3.

$\left(x^2 - 6x + 9\right)^{x+2} \langle 1$

$a^n \langle 1 \, \textit{jeśli}:$

$a \rangle 1 \wedge n \langle 0 \vee 0 \langle a \langle 1 \wedge n \rangle 0$

$\begin{cases} x^2 - 6x + 9 \rangle 1 \\ x + 2 \langle 0 \\ \end{cases}$

$x^2 - 6x + 8 \rangle 0$

$\sqrt{\Delta} = 2$

$x_1 = 5 \vee x_2 = 1$

$x \in (-\infty, 2)$

$$\begin{cases} x^2 - 6x = 9 \langle 1 \\ x^2 - 6x + 9 \rangle 0 \\ x + 2 \rangle 0 \end{cases}$$

$x \in R \setminus \{3\}$

$Odp. x \in (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

ZADANIA:

1.

Oblicz:

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$$

Odp.x=2 lub x=-2

2.

Rozwiąż:

$$\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y} = 2\sqrt{3} \\ (x+y)2^{y-x} = 3 \end{cases}$$

Odp. X=7,y=5

3.

$$5^{x+3} \leq 25 \cdot 7^{-x-1}$$

Odp. x$\leq$-1

4.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1-x} \rangle 1$$

Odp. x<-1

5.

$$\begin{cases} 8^{x-2} \cdot 4^{y+1} = 16 \\ 2^{2(x-1)} \cdot 8^y = 1 \end{cases}$$

Odp.x=1 y= -2

FUNKCJA LOGARYTMICZNA

Def.
Logarytmem z liczby b (b>0) przy podstawie a (a>0 i a≠0) nazywamy wykładnik potęgi c ,do której trzeba podnieść a, żeby otrzymać b.

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ a,b>0 i a=2

Przykład:
1.

$\log_2 8 = 3, bo 2^3 = 8$

$\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}, bo 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

$\log_3 \frac{1}{81} = -4, bo 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

WŁASNOŚCI LOGARYTMÓW:

Tw.1

$\log_a 1 = 0$

Tw.2

$\log_a a = 1$

Tw.3

$\log_a a^c = c$

Tw.4

$a^{\log_a b} = b$

Tw.5

$\log_a * (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

Tw.6

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

Tw.7

$$\log_a x^n = n\log_a x$$

Tw.8

$$\log_a c = \frac{lob_b c}{\log_b a}$$

Tw.9

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Dowód do twierdzenia 1,2,3,4 wynikają wprost z definicji.

Dowód 5

Niech $\log_a x = p \wedge \log_a y = q$

Wtedy x=$a^p \wedge y = a^q$

Otrzymamy x y=a^{p+q}

Z definicji $\log_a(xy) = p + q$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

C.N.D.

Dowód 6

Niech $\log_a x = p \wedge \log_a y = q$

Wtedy $x = a^p \wedge y = a^q$

Mamy $\frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q} = \frac{x}{y} = a^{p-q}$

Z definicji

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = p - q$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

C.N.D.

Dowód 7

Niech

$$\log_a x = p$$

Wtedy

$$a^p = x$$

$$\left(a^{p}\right)^{n}=x^{n}$$

Z definicji

$$\log_a x^n = n\cdot p$$

$$\log_a x^n = n\cdot \log_a x$$

C.N.D.

Dowód 8

Niech

$$\log_a c = p \wedge \log_b c = q$$

Wtedy

$$a^p = c \wedge b^q = c$$

$$a^p = b^q$$

Jeśli liczby logarytmowane są równe to ich logarytmy też są równe.

$$\log_b a^p = \log_b b^q$$

$$p\log_b a = q\log_b b$$

$$p=\frac{q}{\log_b a}$$

$$\log_a c=\frac{\log_b c}{\log_b a}$$

C.N.D.

Dowód 9

$$\log_a b=\frac{\log_b b}{\log_b a}=\frac{1}{\log_b a}$$

Niech

$$\log_a b = p \wedge \log_b a = q$$

Wtedy

$$a^p = b \wedge b^q = a$$

$$\left(a^p\right)^q = b^q$$

$$a^{pq}=a$$

$$pq=1$$

$$p=\frac{1}{q}$$

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$$

C.N.D.

Przykład:

1.

$$\log_2\left(4\sqrt{2}\right) = \log_2 4 + \log_2\sqrt{2} = \frac{5}{2}$$

2.

$$2^{\log_{2\sqrt{2}}\sqrt{3}} = 2^{\log_{(2)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{3}} = \left[\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\log_{(2)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{3}} = \sqrt[3]{3}$$

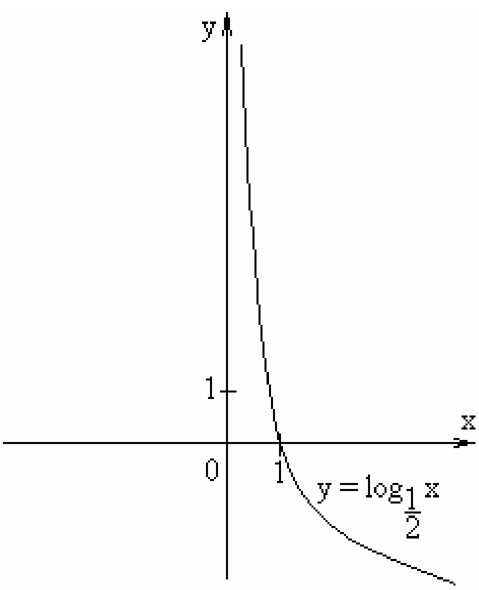
3.

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^{\log_2 e} = 2^{\frac{1}{3}\log_2 e} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$

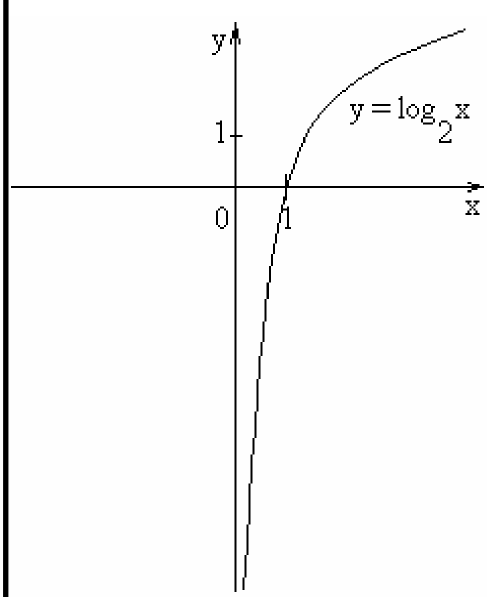
Def.
Funkcję f: $R_+ \rightarrow R$ daną wzorem y = $\log_a x$ gdzie a>0 i a≠1 nazywamy funkcją logarytmiczną.

Uwaga:

1) Jeżeli podstawą logarytmu jest liczba 10 to logarytm nazywamy dziesiętnym i oznaczamy $\log x$
2) Jeżeli podstawą logarytmu jest liczba e to logarytm nazywamy naturalnym i piszemy $\ln x$



a)Wykresem funkcji jest krzywa logaryt-



a)Wykresem funkcji jest krzywa logarytmiczna

miczna

b)D=R_+ b)D=R_+

c)Zbiorem wartości są liczby rzeczywiste c)Zbiorem wartości są liczby rzeczywiste

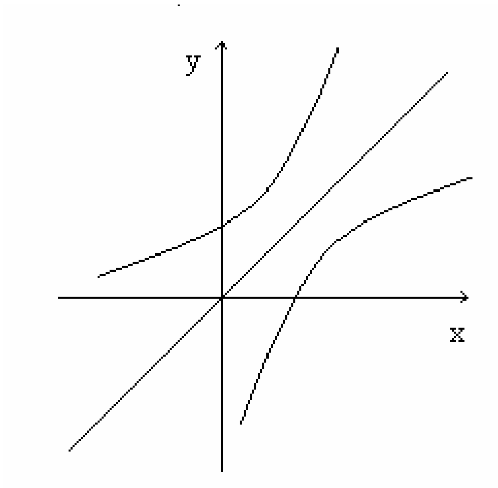
d)Funkcja jest ściśle monotoniczna(malejąca) d)Funkcja jest ściśle monotoniczna (rosnąca)

e)Funkcja ma jedno miejsce zerowe P(1,0) e)Funkcja ma jedno miejsce zerowe P(1,0)

f)Funkcja jest różnowartościowa f)Funkcja jest różnowartościowa

g)Funkcja posiada pionową asymptotę x=0 g)Funkcja posiada pionową asymptotę x=0

Wykres każdej funkcji logarytmicznej przecina oś OX w punkcie 1.



Funkcja logarytmiczna i wykładnicza są funkcjami wzajemnie odwrotnymi.

WYKRESY FUNKCJI LOGARYTMICZNEJ

1.

$$y = \left|\left|\left|\log_2(x-3)\right| - 2\right| - 1\right|$$

a)

$$y = \log_2 x$$

b)

$y = \log_2(x-3)$

c)

$y = \left|\log_2(x-3)\right|$

d)

$y = \left|\log_2(x-3)\right| - 2$

e)

$y = \left| \left| \log_2 (x-3) \right| - 2 \right|$

f)

$y = \left| \left| \log_2 (x-3) \right| - 2 \right| - 1$

g)

$y = \left| \left| \left| \log_2 (x-3) \right| - 2 \right| - 1 \right|$

LOGARYTMY DZIESIĘTNE

Def.

Cechą liczby x nazywamy największą liczbę całkowitą niewiększą od x i oznaczamy [x]

np. [0,999...]=0   [-1]=-1   [2]=2 $\left[-\frac{1}{2}\right]=-1$

Def.

Mantysą liczby x nazywamy różnicę liczby i jej cechy m (x)=x-[x]

$m(2)=0$

np. $m\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$m(1{,}3)=0{,}3$

Wniosek:

Każdą liczbę można zapisać w postaci sumy cechy i mantysy   x=[x]+m(x)

np.   2,6=2+0,6=2,6

-0,5=-1+0,5

Zauważmy, każdą dodatnią liczbę rzeczywistą można napisać w postaci :

$x=a\cdot 10^n, gdzie 1\leq a\langle 10 i\, n\in C$

Przykład:

$15=1{,}5\cdot 10^1$

$1{,}5=1{,}5\cdot 10^0$

$1{,}5=1{,}5\cdot 10^{-1}$

Korzystając ze wzoru na logarytm iloczynu i logarytm potęgi otrzymamy:

$\log_{10} x=\log_{10}\left(a\cdot 10^n\right)=\log_{10} a+\log_{10} 10^n=\log_{10} a+n$

Zatem :

log x = n +log a

Def.

Jeśli x= a$\cdot 10^n$,gdzie $1\leq a\langle 10 \quad n\in C$,to liczbę n nazywamy cechą logarytmu dziesiętnego, liczby x, zaś liczbę log a mantysą logarytmu dziesiętnego liczby x.

Przykład :

log 3,19=log$\left(3{,}19\cdot 10^0\right)=0+0{,}5038=0{,}5038$

WYZNCZANIE DZIEDZINY FUNKCJI LOGARYTMICZNEJ

Wyznaczając dziedzinę funkcji logarytmicznej korzystamy z definicji:

$\log_a b=c\Leftrightarrow a^c=b \qquad a\rangle 0\wedge a\neq 1\wedge b\rangle 0$

Przykład:

1.

$y=\log_3(9-3x)$

D: $9-3x\rangle 0\wedge x\rangle 0$

D=(-∞,3)

2.

$y = \log_x (x^2 - 5x + 6)$

D: $x\rangle 0 \wedge x \neq 1 \wedge x^2 - 5x + 6\rangle 0$

$\sqrt{\Delta} = 1, x_1 = 2 \vee x_2 = 3$

D=$(0,1) \cup (1,2) \cup (3,\infty)$

3.

y=$\dfrac{\ln\left(\dfrac{3x-2}{x-1}\right)}{\log(x+1)}$

D: $\dfrac{3x-2}{x-1}\rangle 0 \wedge x+1\rangle 0 \wedge x+1 \neq 1 \wedge x-1 \neq 0$

(3x-2)(x-1)> $\wedge\ x+1\rangle 0 \wedge x+1 \neq 1 \wedge x-1 \neq 0$

D=(-1,0)$\cup$ (0,$\dfrac{2}{3}$) $\cup$ (1,+∞)

RÓWNANIA LOGARYTMICZNE

Przy rozwiązywaniu równań logarytmicznych korzystamy z twierdzeń :

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$$

$$x, y\rangle 0;\ a\rangle 0;\ a \neq 1$$

Przykład:

1.

$$\log_2(x+2) - \log_2(x-2) = 1$$

D: x+2>0 i x-2>0

x>-2 i x>2

x>2

$$\log_2\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \log_2 2$$

$$\frac{x+2}{x-2} = 2$$

$$x = 6$$

2.

$$\log(x-6) - \frac{1}{2}\log 2 = \log 3 + \frac{1}{2}\log(x-10)$$

D: {x∈R; x>10 }

$$\log\frac{x-6}{\sqrt{2}} = \log 3\sqrt{x-10}$$

$$\frac{x-6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{x-10}$$

$$\frac{x^2-12x+36}{2} = 9(x-10)$$

$$x^2 - 30x + 216 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 6$$

$$x_1 = 18 \quad \vee \quad x_2 = 12$$

3.

$$\ln(2x) = \ln e^3$$

$2x = e^3$ D: x>0

$$x = \frac{e^3}{2}$$

NIERÓWNOŚCI LOGARYTMICZNE

Przy rozwiązywaniu nierówności logarytmicznych korzystamy z twierdzenia:

Jeżeli $0 < a < 1, to \quad \log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x > y$

Jeżeli $a \geq 1, to \ \log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x < y$

Przykład:

1.

$\log_2 x < 3$

D=(0,∞)

$\log_2 x < \log_2 2^3$

$x < 8$

$x \in (0,8)$

2.

$$\frac{1}{\log x} + \frac{1}{1-\log x} > 1$$

D: $\log x \neq 0 \ \wedge \ 1-\log x \neq 0 \ \wedge \ x \neq 0$

D=(0,1)∪(1,10)∪(10,+∞)

$\log x = t$

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{1-t} > 1$$

$$\frac{1}{t(1-t)} > 1$$

$t(1-t)(t^2 - t + 1) > 0$

$t > 0 \ \wedge \ t < 1$

$x > 1 \ \wedge \ x < 10$

$x \in (1,10)$

3.

$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x + 3 \geq 0$

D=(0,∞)

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x \geq \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-3}$$

$x \leq 2\sqrt{2}$

$x \in (0, 2\sqrt{2})$

ZADANIA:

1.

Oblicz:

$$x \cdot \log 10 - x \cdot \log 5 = \log 20 - \log\left(1 + 2^{x}\right)$$

Odp. x=2

2.

Oblicz:

$$\log x + \frac{\log x}{2} + \frac{\log x}{4} + \ldots = 2$$

Odp. x=10

3.

Oblicz:

$$2x + \log\left(1 + 4^{x}\right) \geq x \cdot \log 25 - \log 6$$

Odp. $x \geq \log_{4} \frac{-1 + \sqrt{\frac{5}{3}}}{2}$

4.

Oblicz:

$$\begin{cases} x^{y} = 9 \\ \log_{3} x = y - 1 \end{cases}$$

Odp. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ y = -1 \end{cases}$

5.

Oblicz:

$$\log_{x-2} x^3 - 14 = 3$$

Odp.x=1+$\sqrt{2}$

FUNKCJE
POTĘGOWA
WYKŁADNICZA
LOGARYTMICZNA

WYKONAŁY:
Anna Strojna
Anna Szróbka