FUNKCJA KWADRATOWA

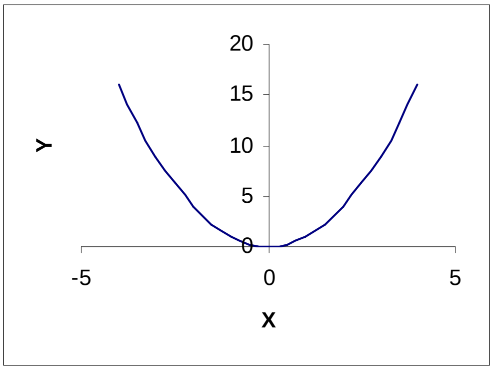
JEDNOMIAN II STOPNIA

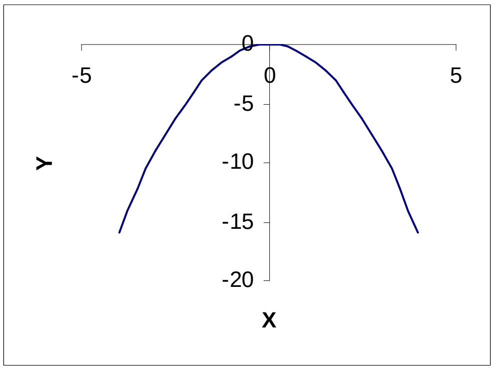
Definicja. Jednomianem II -go stopnia nazywamy funkcję f(x) R→ R daną wzorem

$$f(x) = ax^2 \quad ,\text{gdzie } a \neq 0 \text{ i } a \in R$$

np. $f(x)=x^2$
$f(x)= -3x^2$
$f(x)=\sqrt{2}\,x^2$

a>0 np. $f(x) = x^2$							A<0 Np. $f(x) = -x^2$						
X	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	X	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
Y	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	Y	-9	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$

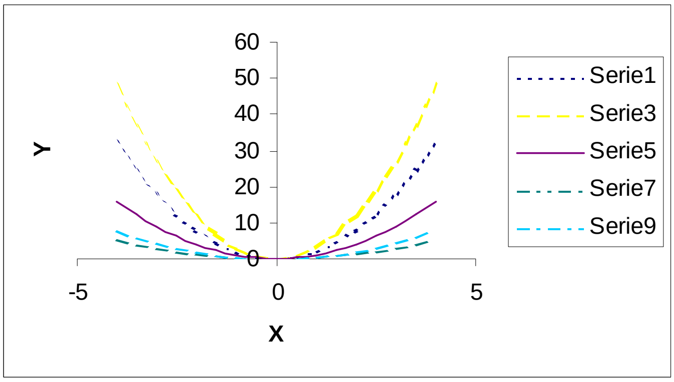




1)Wykresem funkcji jest krzywa zwana parabolą. 2)Funkcja jest parzysta. $F(x) = f(-x)$ $F(x) = ax^2$ $F(-x) = a(-x)^2=ax^2$ 3) Funkcja przyjmuje wartości nieujemne . 4) Funkcja przyjmuje wartość najmniejszą w wierzchołku	1)Wykresem funkcji jest krzywa zwana parabolą. 2)Funkcja jest parzysta $f(x) =f(-x)$ $f(x) = -ax^2$ $f(-x) = -a(-x)^2 = -ax^2$ 3) Funkcja przyjmuje wartości niedodatnie. 4) Funkcja przyjmuje największą wartość w wierzchołku (x =0); funkcja

(x=0);funkcja nie przyjmuje wartości największej. 5) **Twierdzenie** Funkcja $y = ax^2$ jest malejąca w przedziale $(-\infty , 0)$ i rosnąca w przedziale $(0 , +\infty)$. <u>Dowód</u> Weźmy dowolne $x_1 < x_2$ i rozpatrzmy różnicę $F(x_2) - f(x_1) = ax_2^2 - ax_1^2 = a(x_2^2 - x_1^2) =$ $=a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$ Ponieważ $a > 0$ i $(x_2 - x_1) > 0$ to znak różnicy $F(x_2) - f(x_1)$ zależy od sumy $(x_2 + x_1)$ a) Jeżeli $x_1 < x_2 < 0$ to $(x_1 + x_2) < 0$ i różnica $f(x_2) - f(x_1) < 0$ $f(x_2) < f(x_1)$ Zatem funkcja w zbiorze R_- jest <u>malejąca.</u> b) Jeżeli $0 < x_1 < x_2$ to $(x_1 + x_2) > 0$ i różnica $f(x_2) - f(x_1) > 0$ $f(x_2) > f(x_1)$ Zatem funkcja w zbiorze R_+ jest <u>rosnąca.</u>	nie posiada wartości największej. 5) **Twierdzenie** Funkcja $y = -ax^2$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty ,0)$ i malejąca w przedziale $(0 ,+\infty)$. <u>Dowód</u> Weźmy dowolne $x_1 < x_2$ i rozpatrzmy różnicę $F(x_2) - f(x_1) = -ax_2^2 -(- ax_1^2)= -a(x_2^2 - x_1^2) =$ $=-a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$ Ponieważ $a < 0$ i $(x_2 - x_1) > 0$ to znak różnicy $F(x_2) - f(x_1)$ zależy od sumy $(x_2 + x_1)$ a) Jeżeli $x_1 < x_2 < 0$ to $(x_1 + x_2) > 0$ i różnica $f(x_2) - f(x_1) > 0$ $f(x_2) > f(x_1)$ Zatem funkcja zbiorze R_- jest <u>rosnąca.</u> b) Jeżeli $0 < x_1 < x_2$ to $(x_1 + x_2) < 0$ i różnica $f(x_2) - f(x_1) < 0$ $f(x_2) < f(x_1)$ Zatem funkcja w zbiorze R_+jest <u>malejąca.</u>

<u>Przykład.</u> W jednym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji : $y = x^2$; $y = 2x^2$; $y = 3x^2$; $y = \frac{1}{2}x^2$; $y = \frac{1}{3}x^2$.



Seria 1 y=2x
Seria 3 $y=3x^2$
Seria 5 $y=x^2$
Seria 7 $y=\frac{1}{3}x^2$
Seria 9 $y=\frac{1}{2}x^2$

WNIOSEK

1.Jeżeli $a>0$ to ramiona paraboli zwrócone są ku górze.
Jeżeli $a<0$ to ramiona paraboli zwrócone są ku dołowi.

2. Współczynnik a decyduje o kształcie paraboli.

Postać ogólna i kanoniczna trójmianu kwadratowego.

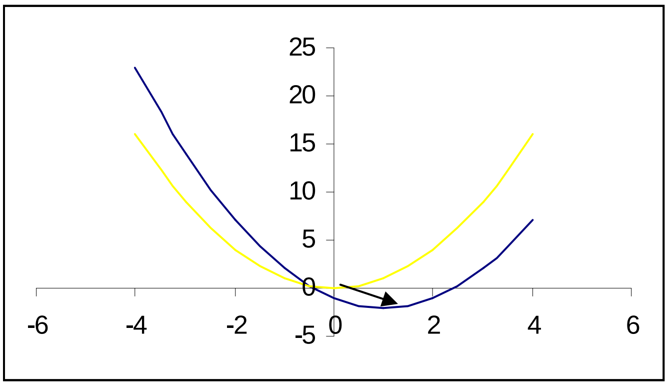
Definicja. Funkcję $f: R \to R$ daną wzorem $f(x) = a(x-p)^2 + q$,(gdzie $a \neq 0$) nazywamy postacią kanoniczną funkcji.

Twierdzenie. Wykresem funkcji $y = a(x-p)^2 + q$ jest parabola powstała w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y=ax^2$ o wektor [p,q].

Przykład. Narysuj wykres funkcji.

a)$y=(x-1)^2-2$

Kolejne kroki.
1)$y=x^2$
2)$y=x^2$ przesuwamy o wektor [1,-2]



Przykład.
Przekształć wyrażenie.

a) $y=(x-1)^2 -2=x^2-2x+1-2=x^2-2x-1$
b) $y= -(x+\frac{1}{2})^2+3=-(x^2+x+\frac{1}{4})+3=-x^2 -x +\frac{3}{4}$
c) $y=2(x+2)^2-1=2(x^2+4x+4)-1=2x^2+8x+7$

Definicja. Funkcję $f: R \to R$ postaci $f(x) = ax^2+bx+c$; $a \neq 0$ nazywamy postacią ogólną funkcji kwadratowej (trójmianem kwadratowym).

Definicja. Wyrażenie $\Delta=b^2-4ac$ nazywamy wyróżnikiem (deltą) funkcji kwadratowej.

Przykład. Oblicz wyróżnik funkcji.

a) $y= x^2-2x-1$

$a=1$
$b=-2$ $\Delta= b^2-4ac$
$c=-1$ $\Delta=4+4=8$

b) $y=-\sqrt{3}\,x^2+\pi x+\sqrt{12}$

$a=-\sqrt{3}$ $\Delta=b^2-4ac$
$b=\pi$ $\Delta=\pi^2+24$
$c=\sqrt{12}$

c) $y=2x^2+8x+7$

$a=2$ $\Delta=b^2-4ac$
$b=8$ $\Delta=64-4\cdot 2\cdot 7=64-56=8$
$c=7$

Przykład. Zamień postać ogólną trójmianu kwadratowego na postać kanoniczną.

a) $y=x^2-2x-1$

$y=(x^2-2x+1)-2$
$y=(x-1)^2-2$

b) $y=2x^2+8x+7$

$y=2(x^2+4x)+7$
$y=2(x^2+4x+4)-1$
$y=2(x+2)^2-1$

Twierdzenie. Postacią kanoniczną trójmianu kwadratowego $y=ax^2+bx+c$ jest

$$y= a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a}$$

<u>Dowód.</u>
Postać kanoniczna trójmianu.

$Y= a (x -p)^2+q$
$Y=ax^2+bx+c \quad a\neq 0$
$a(x -p)^2+q=ax^2+bx+c$
$a(x^2-2xp+p^2)+q =ax^2+bx+c$

$ax^2-2apx+ap^2+q=ax^2+bx+c$
$-2apx+ap^2+q=bx+c$

$b=-2ap \Rightarrow p=-\frac{b}{2a}$

$c=ap^2+q \Rightarrow q=c-ap^2=c-a(-\frac{b}{2a})^2=c-a\frac{b^2}{4a^2}=c-\frac{b^2}{4a}=\frac{4ac}{4a}-\frac{b^2}{4a}=\frac{-b^2+4ac}{4ac}=\frac{-(b^2-4ac)}{4ac}=-\frac{\Delta}{4a}$

$p=-\frac{b}{2a}$

$q=-\frac{\Delta}{4a}$

$y=a(x-p)^2+q$

$y=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a}$

c.n.d.

WNIOSEK

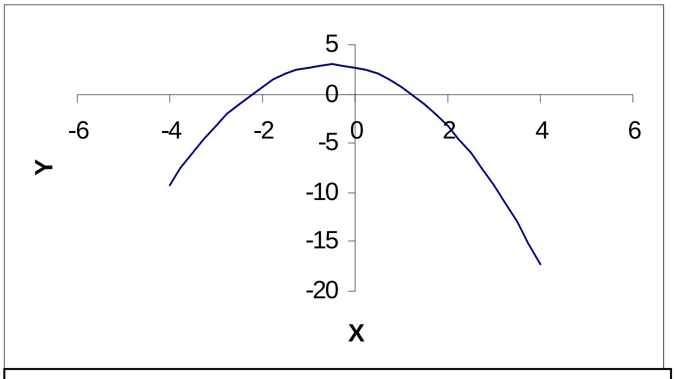
Wierzchołek paraboli ma współrzędne $(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a})$.

<u>Zadanie 1.</u> Narysuj wykres funkcji

a) $y=-(x+\frac{1}{2})^2+3$
b) $y=(x+2)^2-1$
c) $y=\left|x^2-x-6\right|$

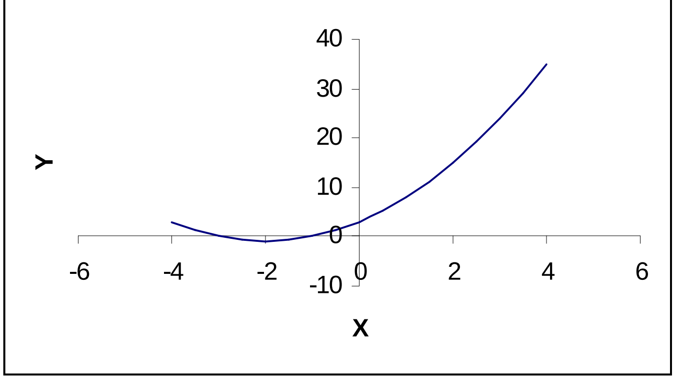
a) Kolejne kroki :

1) $y=x^2$
2) $y=-x^2$, $[-\frac{1}{2},3]$



b) Kolejne kroki :

1) $y=x^2$
2) $y=x^2$, $[-2,-1]$



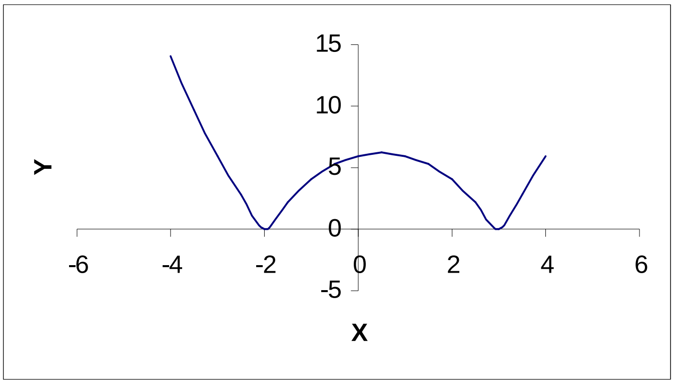
c) Kolejne kroki :

Przekształcamy funkcję z postaci ogólnej na kanoniczną.

$$Y=\left|x^2-x-6\right|=\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right|$$

Rysujemy:

1) $y=x^2$
2) $y=x^2$, $\frac{1}{2}$, $\frac{-25}{4}$
3) y= $\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right|$



Zadanie 2. Wyznacz współczynnik b trójmianu $y=2x^2+bx+1$, jeśli wiadomo , że do jego wykresu należy punkt o współrzędnych P(1,6)

Jeśli punkt P należy do wykresu trójmianu to musi spełniać jego równanie ,czyli f(1)=6

$Y=2x^2+bx+1$
$6=2\cdot 1+1b+1$
$6=2+b+1$
$b=6-3$
$b=3$

Odp. Szukany współczynnik b jest równy 3.

Zadanie 3. Przekształć wyrażenie

a) z postaci kanonicznej w ogólną

$$y=\frac{\pi}{6}\left(x-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$$

$$y=\frac{\pi}{6}\left(x^2-\sqrt{5}x+\frac{5}{4}\right)+\frac{5}{2}$$

$$y=\frac{\pi}{6}x^2-\frac{\pi\sqrt{5}}{6}x+\frac{5\pi}{24}+\frac{60}{24}$$

$$y=\frac{\pi}{6}x^2-\frac{\pi\sqrt{5}}{6}x+\frac{5\pi+60}{24}$$

Odp. $y=\frac{\pi}{6}x^2-\frac{\pi\sqrt{5}}{6}x+\frac{5\pi+60}{24}$

b) z postaci ogólnej w kanoniczną

$$y=\pi x^2-\frac{\sqrt{7}}{4}x+\sqrt{17}$$

Obliczamy wyróżnik funkcji.

a=π

b=$-\frac{\sqrt{7}}{4}$ $\qquad$ $\Delta=b^2-4ac$

c=$\sqrt{17}$ $\qquad$ $\Delta=\frac{7}{16}-4\pi\sqrt{17}$

Korzystając z wzoru

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

Obliczamy

$$y=\pi\left(x-\frac{\sqrt{7}}{8\pi}\right)^2-\frac{\frac{7}{16}-4\pi\sqrt{17}}{4\pi}$$

Odp. $y=\pi\left(x-\frac{\sqrt{7}}{8\pi}\right)^2-\frac{\frac{7}{16}-4\pi\sqrt{17}}{4\pi}$

<u>Zadanie1.</u> Wyznacz a ,b ,c trójmianu $y=ax^2+bx+c$, jeśli jego wykres przechodzi przez punkty : P(0,1), Q(1,-2),R(_-1,10)
Odp. Szukany trójmian ma postać $y=3x^2-6x+1$

<u>Zadanie 2.</u>Wyznacz trójmian kwadratowy $y=ax^2+bx+c$ wiedząc, że jego wykres przechodzi przez punkty (0,1) i (1,-2) oraz, że dla x=1 osiąga on swoją najmniejszą wartość.
<u>Wskazówka.</u> Skorzystaj ze wzorów na współrzędne wierzchołka.
Odp. $Y=3x^2-6x+1$.

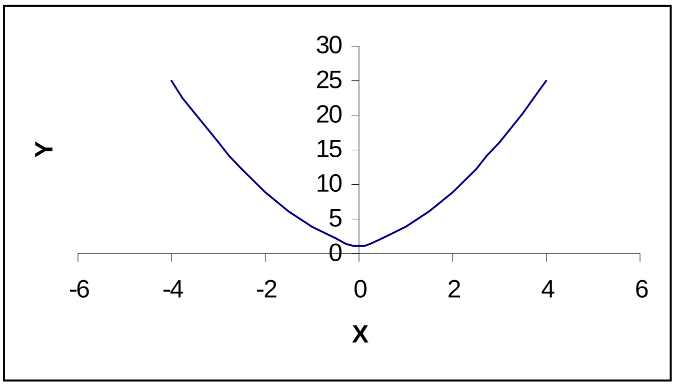
Zadanie 3. Wyznacz funkcję f(m) wyrażającą liczbę pierwiastków równania $\left|x^2-1\right|=m$ w zależności od parametru m.

$$\text{Odp. } \begin{cases} 0 \quad dla \quad m\in(-\infty,0) \\ 2 \quad dla \quad m=0 \quad \text{lub}\, m\in(1,\infty) \\ 3 \quad dla \quad m=1 \\ 4 \quad dla \quad m\in(0,1) \end{cases}$$

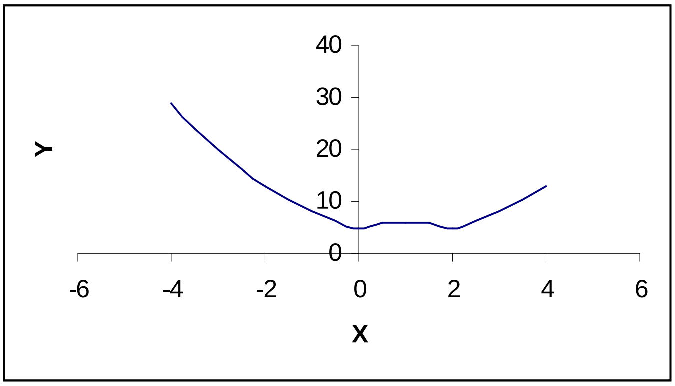
Zadanie 4. Narysuj wykres funkcji

a) $y=x^2+2|x|+1$
b) $y=|x^2-2x|+5$

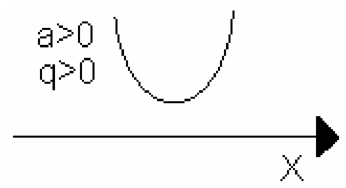
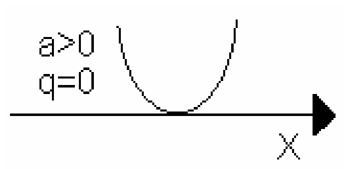
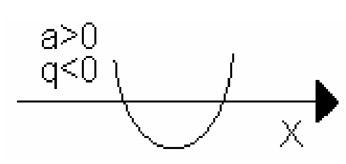
Odp.
a)

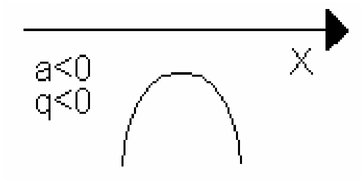
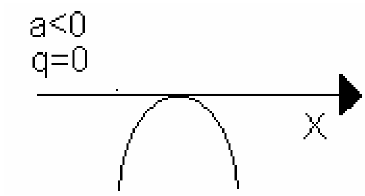
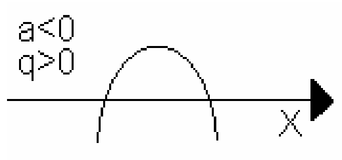


b)



Miejsca zerowe funkcji.

Brak miejsc zerowych	Jedno miejsce zerowe	Dwa miejsca zerowe
		

Zauważmy, że o ilości miejsc zerowych decyduje przesunięcie pionowe wykresu. Zatem z wzoru

$$q = -\frac{\Delta}{4a}$$

po przekształceniu otrzymamy $\Delta=-4aq$

Trójmian nie ma miejsc zerowych wtedy,

$$\begin{cases} a > 0 \\ q > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a < 0 \\ q < 0 \end{cases}$$

W obu przypadkach wyróżnik jest mniejszy od zera ($\Delta<0$)

Trójmian ma jedno miejsce zerowe wtedy, gdy

$$\begin{cases} a > 0 \\ q = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a < 0 \\ q = 0 \end{cases}$$

W obu przypadkach wyróżnik jest równy zero ($\Delta=0$).

Trójmian ma dwa miejsca zerowe wtedy, gdy

$$\begin{cases} a > 0 \\ q < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a < 0 \\ q > 0 \end{cases}$$

W obu przypadkach wyróżnik jest większy od zera ($\Delta>0$).

Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie :

Twierdzenie.

Funkcja kwadratowa $f(x)=ax^2+bx+c$, gdzie $a\neq0$ ma:

1) dwa miejsca zerowe $\Leftrightarrow \Delta>0$
2) jedno miejsce zerowe $\Leftrightarrow \Delta=0$
3) zero miejsc zerowych $\Leftrightarrow \Delta<0$

Przykład. Określ ilość miejsc zerowych trójmianu

a) $y=2x^2-4x+3$

$\Delta=b^2-4ac$

Δ=16-24
Δ=-8
Odp. Funkcja nie ma miejsc zerowych, ponieważ Δ<0.

Twierdzenie.

Jeżeli trójmian kwadratowy $f(x)=ax^2+bx+c$, gdzie $a\neq 0$ ma

1) Δ>0 to jego dwa miejsca zerowe mają postać:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad , \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

2) Δ=0 to jedyne miejsce zerowe ma postać

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

<u>Dowód.(1)</u>

Niech dany będzie trójmian $f(x)= ax^2+bx+c$, gdzie $a\neq 0$ i Δ>0
W swoim miejscu zerowym trójmian przyjmuje wartość zero.

$$ax^2+bx+c=0$$

$$a(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$$

$$a(x+\frac{b}{2a})^2 - a\frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

$$a[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}] = 0$$

Ponieważ Δ>0 to możemy napisać, że $\Delta = (\Delta)^2$

$$a[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}] = 0$$

$$a[(x+\frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2] = 0$$

Korzystają ze wzoru na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$a[(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})\cdot(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})] = 0$$

$$a[(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a})\cdot(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a})] = 0$$

$$x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}=0 \quad \vee \quad x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}=0$$

$$x=-\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad x=-\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

c.n.d.

Dowód.(2)

Jeśli $\Delta=0$ to podstawiając otrzymamy :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{0}}{2a} \quad \vee \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{0}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-b}{2a} \quad \vee \quad x_2=\frac{-b}{2a}$$

$$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$$

c.n.d.

WNIOSEK

Jeśli w trójmianie kwadratowym $f(x)=ax^2+bx+c$ $a\neq 0$ i $\Delta\geq 0$ to trójmian możemy przedstawić w postaci iloczynowej:

1) $\Delta>0$ $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

2) $\Delta=0$ $ax^2+bx+c=a(x-x_0)(x-x_0)=a(x-x_0)^2$,

gdzie x_0,x_1,x_2 są miejscami zerowymi trójmianu.

Przykład. Określ ilość miejsc trójmianu $y=-2x^2+x+1$

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=1+8$$
$$\Delta=9$$

Odp. Trójmian ma dwa miejsca zerowe.

Przykład. Przedstaw w postaci iloczynowej.

$f(x)=2x^2+5x-3$

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=25+24=49$$

$$x_1=\frac{-b\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-5+7}{4} \quad \vee \quad x_2 = \frac{-5-7}{4}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad \vee \quad x_2 = -3$$

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$
$$2x^2+5x-3=2(x-\frac{1}{2})(x+3)$$

Odp. Postać iloczynowa funkcji to $y = 2(x-\frac{1}{2})(x+3)$.

Zadanie 1. Narysuj wykres funkcji
a) $f(x)=x^2+x-2$
b) $f(x)=x^2-3x+2$

Równanie kwadratowe.

Definicja

Równanie postaci:
$ax^2+bx+c=0 \qquad\qquad a \neq 0$
oraz każde jemu równoważne nazywamy **równaniem kwadratowym**.
Rozwiązanie równania kwadratowego jest równoważne z wyznaczeniem miejsc zerowych danego trójmianu.

Twierdzenie I
Istnienie i liczba rozwiązań równania kwadratowego zależą od znaku wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$
1. Gdy jest $\Delta < 0$, równanie nie ma rozwiązań.
2. Gdy jest $\Delta = 0$, równanie ma jedno rozwiązanie (dwukrotne):
$x_0 = -\frac{b}{2a}$
3.Gdy jest $\Delta > 0$, równanie ma dwa rozwiązania:
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Przykład 1.
Rozwiązać równanie : $3x^2 - 2x - 7 = 0$.
Obliczamy wyróżnik: $\Delta = 4 - 4 \cdot 3 \cdot (-7) = 88 = 2\sqrt{22}$
Na podstawie twierdzenia 3:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{2-2\sqrt{22}}{6} = \frac{1-\sqrt{22}}{3}; \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{22}}{3}$$

Przykład 2.
Rozwiązać równanie: $-36x^2 + 12x - 1 = 0$.
Mnożymy obie strony równania przez (-1) i otrzymujemy równanie równoważne: $36x^2 - 12x + 1 = 0$.
Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 36 \cdot 1 = 0$.
Na podstawie twierdzenia 2:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$x_0 = \frac{1}{6}$$

Przykład 3.
Rozwiązać równanie: $4x^2 + 3x + 77 = 0$.
Obliczamy wyróżnik: $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot 77 < 0$.
Na podstawie twierdzenia 1 stwierdzamy , że równanie nie ma rozwiązania.

Zadania:
Rozwiąż równanie:
1) $5x^2 + 6x - 1{,}4 = 0$
2) $0{,}3x^2 - x - 0{,}8 = 0$
3) $x^2 - 3x + 2\frac{1}{4} = 0$
4) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 1 = 0$
5) $x^2 - (2 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$

RÓWNANIA KWADRATOWE ZUPEŁNE I NIEZUPEŁNE.

I. Równanie kwadratowe zupełne:
W przypadku , gdy $b \neq 0$ i $c \neq 0$, równanie $ax^2 + bx + c = 0$ nazywamy równaniem kwadratowym zupełnym i rozwiązujemy je na podstawie twierdzenia I.
II. Równanie kwadratowe niezupełne:
W przypadku , gdy $b = 0$ i $c = 0$, równanie $ax^2 + bx + c = 0$ przybiera postać:
$ax^2 + c = 0$ lub $ax^2 + bx = 0$ lub $ax^2 = 0$
i nazywa się równaniem kwadratowym niezupełnym.
Równanie niezupełne rozwiązujemy rozkładając lewą stronę równania na czynniki.

Przykład 1.
Rozwiązać równanie: $5x^2 + 2x = 0$

$$x(5x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ lub } 5x + 2 = 0).$$

Zatem $x_1 = 0, x_2 = -0{,}4$.

Przykład 2.
Rozwiązać równanie: $x^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{7}) \cdot (x + \sqrt{7}) = 0$
Stąd $x_1 = -\sqrt{7}$, $x_2 = \sqrt{7}$

Przykład 3.
Rozwiązać równanie: $3x^2 + 9 = 0$

Ponieważ jest $3x^2 + 9 > 0$ dla każdego x, więc równanie $3x^2 + 9 = 0$ nie ma rozwiązania.

Zadania:

Rozwiąż równania:

1) $2x^2 + 3x - 2 = 0$
2) $2x^2 - 8 = 0$
3) $2x^2 - 4x = 0$
4) $-3x^2 - 5x + 1 = 0$
5) $4 + x^2 = 0$

Zastosowanie równań kwadratowych do rozwiązywania zadań tekstowych.

Zadanie 1.
Suma kwadratów czterech kolejnych liczb nieparzystych wynosi 36. Wyznacz te liczby.
Oznaczenia:
$2x+1=a$ – pierwsza liczba nieparzysta; $x \in C$
$2x+3=b$ – druga liczba nieparzysta; $x \in C$
$2x+5=c$ – trzecia liczba nieparzysta; $x \in C$
$2x+7=d$ – czwarta liczba nieparzysta; $x \in C$
Otrzymujemy:

$$(2x+1)^2+(2x+3)^2+(2x+5)^2+(2x+7)^2=36$$

$$4x^2+4x+1+4x^2+12x+9+4x^2+20x+25+4x^2+28x+49=36$$

$$16x^2+64x+84=36$$

$$16x^2+64x+48=0 \,/ \div 16$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe zupełne:

$$x^2+4x+3=0$$

Rozwiązujemy je na podstawie twierdzenia I. Obliczamy wyróżnik:

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=16-12=4$$

$$\sqrt{\Delta}=2$$

Na podstawie twierdzenia I:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-4-2}{2} \quad \vee \quad x_2=\frac{-4+2}{2}$$

$$x_1=-3 \quad \vee \quad x_2=-1$$

Stąd wykorzystując wcześniejsze oznaczenia otrzymujemy:

$$\begin{cases} a=-5 \\ b=-3 \\ c=-1 \\ d=1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=3 \\ d=5 \end{cases}$$

Odp: Szukane liczby to: $\begin{cases} a=-5 \\ b=-3 \\ c=-1 \\ d=1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=3 \\ d=5 \end{cases}$

Zadanie 2.

Jeżeli od pewnej liczby odejmiemy jej odwrotność, to otrzymamy $\frac{5}{6}$. Co to za liczba?

Oznaczmy przez:
x – szukana liczba

$\frac{1}{x}$ – odwrotność szukanej liczby

Z warunku zadania mamy:

$$x-\frac{1}{x}=\frac{5}{6} \quad / \cdot x$$

$$x^2-1=\frac{5}{6}x$$

$$x^2-\frac{5}{6}x-1=0 \quad / \cdot 6$$

$$6x^2-5x-6=0$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe zupełne. Rozwiązujemy je na podstawie twierdzenia I.

Obliczam wyróżnik:

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=25+144=169$$

$$\sqrt{\Delta}=13$$

Na podstawie twierdzenia I:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1=\frac{5-13}{12} \quad \vee \quad x_2=\frac{5+13}{12}$$

$$x_1=-\frac{2}{3} \quad \vee \quad x_2=\frac{3}{2}$$

Sprawdzenie:

$$x-\frac{1}{x}=\frac{5}{6}$$

$$x_1=-\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{3}-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{6}$$

$$x_2=\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$$

Odp: Szukane liczby to: $-\frac{2}{3}$ lub $\frac{3}{2}$

Zadanie 3.

Wykaż, że dla liczb dodatnich a i b zachodzi:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$$

Z warunku zadania mamy: $a\neq 0, \quad b\neq 0$.

Przekształcając, otrzymujemy:

$$\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}\geq 2 \quad / \cdot ab$$

$$a^2+b^2\geq 2ab$$

$$a^2-2ab+b^2\geq 0$$

$$(a-b)^2\geq 0$$

Kwadrat liczby rzeczywistej nigdy nie jest ujemny, więc warunek $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ jest spełniony c.n.d.

Zadania:

1. Suma cyfr liczby dwucyfrowej wynosi 9. Jeżeli pomnożymy tę liczbę przez liczbę o przestawionych cyfrach, to otrzymamy 1944. Co to za liczba?

   Odp: 27;72

2. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych równa się 194. Oblicz te liczby.

   Odp: 7;8;9
3. Wysokość walca jest o 3 cm większa od jego średnicy. Pole powierzchni całkowitej wynosi 120π cm^2. Oblicz wymiary walca.

   Odp: $r = 4cm$; $h = 11cm$
4. Obwód rombu równa się 116 cm, różnica długości jego przekątnych wynosi 2 cm. Oblicz długości przekątnych rombu.

   Odp: $40cm$; $42cm$

5. Znajdź liczbę dwucyfrową wiedząc, że różnica jej cyfr wynosi 3, a iloczyn tej liczby przez sumę tych cyfr wynosi 324.

   Odp: 36.

Nierówności kwadratowe.

I. **Badanie znaku trójmianu kwadratowego.**

Dany jest trójmian kwadratowy:

$y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$

Pytamy dla jakich wartości zmiennej x trójmian ten przybiera wartości dodatnie, a dla jakich ujemne.

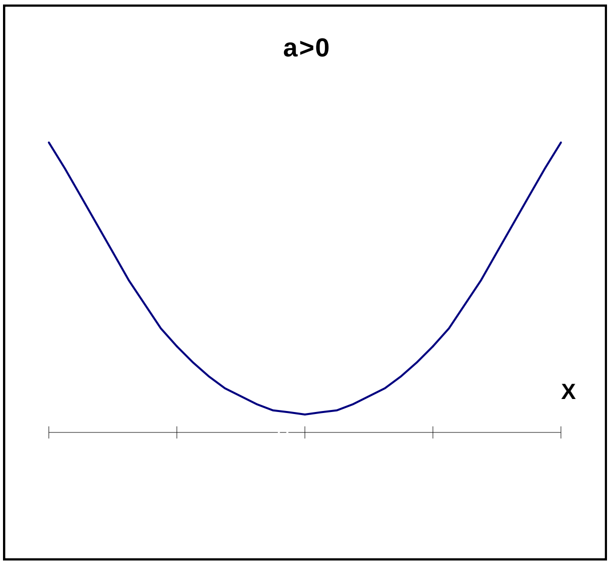
Inaczej: dla jakich wartości zmiennej x jest $y > 0$, dla jakich $y < 0$.

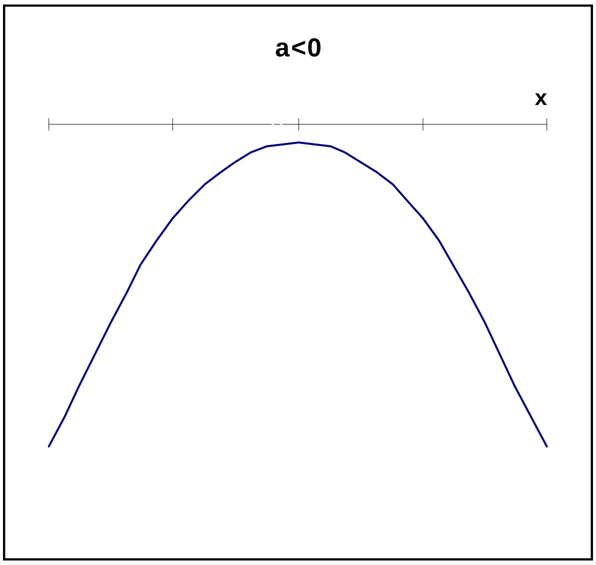
Punkty wykresu trójmianu dla których jest $y > 0$, leża nad osią x; punkty wykresu, dla których jest $y < 0$, leża poniżej osi x.

Przypadek 1.

$\Delta < 0$

w tym przypadku trójmian nie ma pierwiastków i otrzymujemy wykresy:



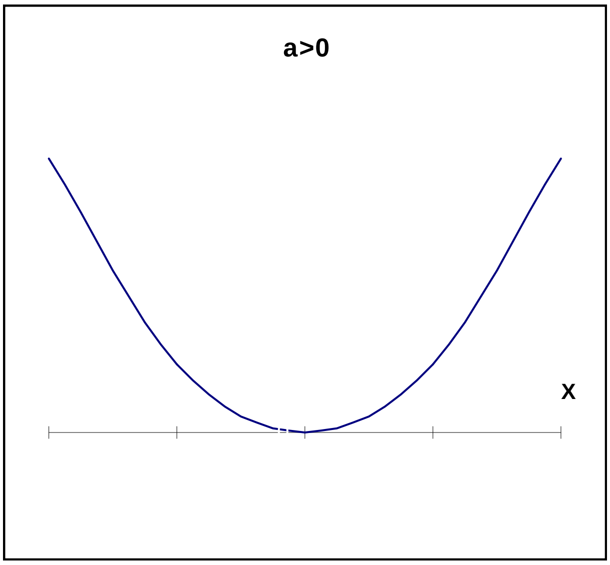


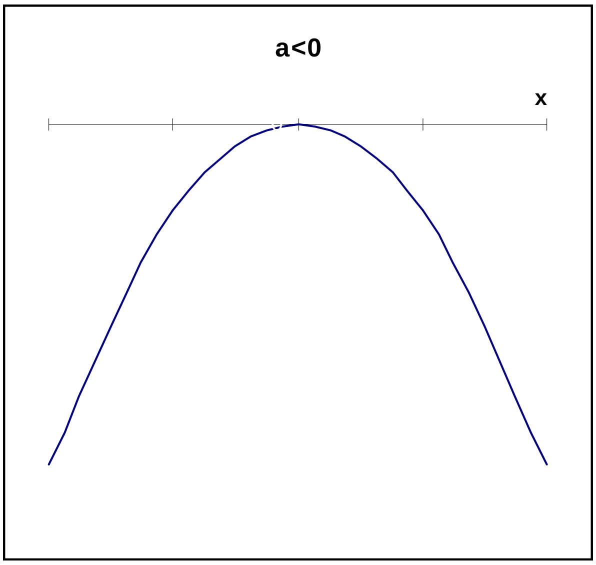
Dla a>0 i Δ<0 cały wykres znajduje się nad osią. Zatem dla każdej wartości x trójmian ma wartość dodatnią.

Dla a<0 i Δ<0 cały wykres znajduje się pod osią. Zatem dla każdej wartości x trójmian ma wartość ujemną.

Twierdzenie 1.
Jeżeli wyróżnik trójmianu kwadratowego: $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, jest ujemny, to znak trójmianu jest dla wszystkich wartości x zgodny ze znakiem współczynnika przy x^2.

Przypadek 2.
$\Delta = 0$
w tym przypadku trójmian ma jeden pierwiastek i otrzymujemy wykresy:





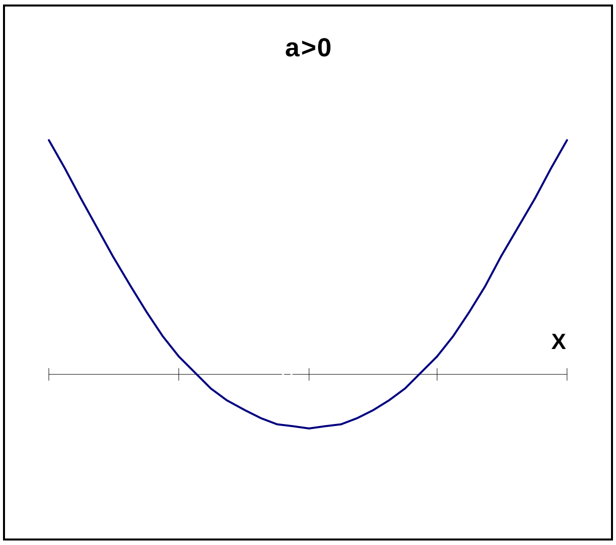
Dla a>0 i Δ=0 z wyjątkiem wierzchołka wszystkie punkty paraboli znajdują się nad osią x. Zatem dla $x \neq \frac{-b}{2a}$ trójmian ma wartości dodatnie.

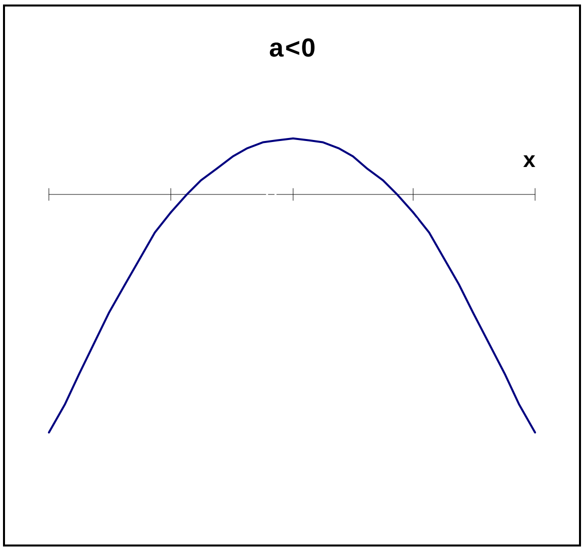
Dla a<0 i Δ=0 z wyjątkiem wierzchołka wszystkie punkty paraboli znajdują się pod osią x. Zatem dla $x \neq \frac{-b}{2a}$ trójmian ma wartości ujemne.

Twierdzenie 2.
Jeżeli wyróżnik trójmianu kwadratowego: $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, jest równy 0, to znak trójmianu jest zgodny ze znakiem współczynnika przy x^2 dla wszystkich wartości x oprócz pierwiastka $x_0 = \frac{-b}{2a}$, dla którego funkcja przybiera wartość zero.

Przypadek 3.

$\Delta > 0$
w tym przypadku trójmian ma dwa pierwiastki (zakładamy $x_1 < x_2$) i otrzymujemy wykresy:





Dla a>0 i Δ>0 punkty wykresu mające rzędną dodatnią odpowiadają wartościom x „leżącym poza pierwiastkami". Punkty wykresu mające rzędną ujemną, odpowiadają wartościom x „leżącym między pierwiastkami".

Dla a<0 i Δ>0 punkty wykresu mające rzędną dodatnią odpowiadają wartościom x „leżącym między pierwiastkami". Punkty wykresu mające rzędną ujemną, odpowiadają wartościom x „leżącym poza pierwiastkami".

Twierdzenie 3.
Jeżeli wyróżnik trójmianu kwadratowego: $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, jest dodatni, to:
1) znak trójmianu jest zgodny ze znakiem współczynnika przy x^2 dla wartości x położonych poza pierwiastkami trójmianu, czyli dla każdego: $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.
2) znak trójmianu jest przeciwny do znaku współczynnika przy x^2 dla wartości x położonych między pierwiastkami trójmianu, czyli dla każdego: $x \in (x_1; x_2)$.

II. **Nierówności kwadratowe.**

Nierównością kwadratową nazywamy nierówność postaci $ax^2 + bx + c < 0$ lub $ax^2 + bx + c > 0$, gdzie $a \neq 0$.
Istnieją także nierówności nieostre: $ax^2 + bx + c \leq 0$ lub $ax^2 + bx + c \geq 0$, gdzie $a \neq 0$.

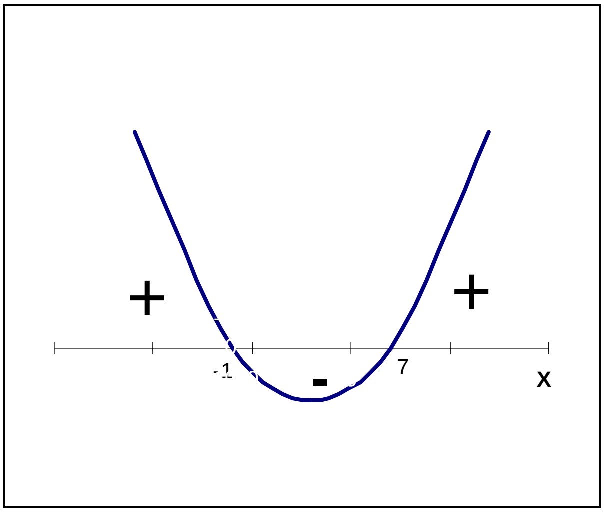
Rozwiązywanie nierówności kwadratowych sprowadza się do badania znaku trójmianu kwadratowego.

Przykład 1.
Rozwiąż nierówność:
$x^2 - 6x - 7 > 0$
obliczamy wyróżnik:
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = 36 + 28 = 64$
$\sqrt{\Delta} = 8$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ lub $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{6-8}{2}$ lub $x_2 = \frac{6+8}{2}$
$x_1 = -1$ $x_2 = 7$

Ponieważ Δ>0 i a>0 wykres trójmianu przybiera postać:



Na podstawie twierdzenia 3 trójmian $y = x^2 - 6x - 7$ przybiera wartości dodatnie dla wartości x położonych poza pierwiastkami trójmianu, czyli dla x<-1 lub x>7.
Odp: Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 - 6x - 7 > 0$ jest suma przedziałów nieograniczonych $x \in (-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$.

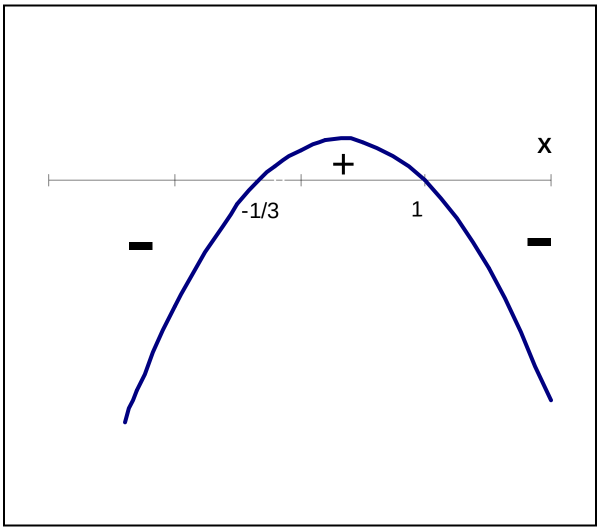
Przykład 2.
Rozwiąż nierówność:
$-3x^2 + 2x + 1 \leq 0$
obliczamy wyróżnik:
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = 4 + 12 = 16$
$\sqrt{\Delta} = 4$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ lub $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-2-4}{-6}$ lub $x_2 = \frac{-2+4}{-6}$

$x_1 = 1$ $x_2 = -\frac{1}{3}$

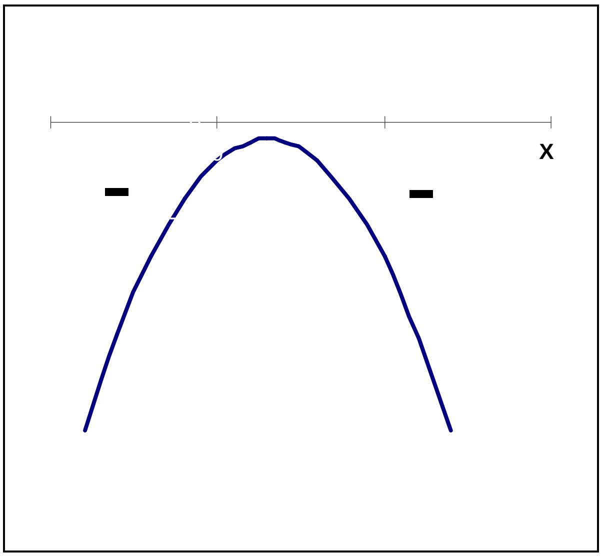
Ponieważ Δ>0 i a<0 wykres trójmianu przybiera postać:



Na podstawie twierdzenia 3 trójmian $y = -3x^2 + 2x + 1$ przybiera wartości ujemne dla wartości x położonych poza pierwiastkami trójmianu, czyli dla x<-1/3 lub x>1.
Odp: Zbiorem rozwiązań nierówności $-3x^2 + 2x + 1 > 0$ jest suma przedziałów nieograniczonych

$$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right\rangle \cup \left\langle 1; +\infty\right).$$

Przykład 3.
Rozwiąż nierówność:
$-x^2 + 3x - 4 \le 0$
obliczamy wyróżnik:
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = 9 - 16 = -7$
$\Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Nie ma pierwiastków.
Ponieważ Δ<0 i a<0 wykres trójmianu przybiera postać:



Na podstawie twierdzenia 1 trójmian $y = -x^2 + 3x - 4$ przybiera wartości ujemne dla wartości $x \in R$.
Odp: Rozwiązaniem nierówności są wszystkie liczby rzeczywiste.

Zadania:
Rozwiąż nierówności:
1) $x^2 - 3x - 28 > 0$
2) $3x^2 - 2x\sqrt{15} + 5 \leq 0$
3) $2 > 2\sqrt{2}x - x^2$
4) $x(x-5) > 2$
5) $x^2 - 0{,}2x + 0{,}01 > 0$

Równania dwukwadratowe i pierwiastkowe.

I. Równania dwukwadratowe.

Równanie postaci: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ nazywamy równaniem dwukwadratowym.
Równania dwukwadratowe rozwiązuje się przez sprowadzenie do równania kwadratowego poprzez podstawienie.

Przykład 1.
Rozwiąż równanie:
1) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
Podstawiamy:
$x^2 = t$
$(x^2)^2 - 10x + 9 = 0$
$t^2 - 10t + 9 = 0$
Otrzymaliśmy równanie kwadratowe zupełne. Obliczamy wyróżnik:
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = 100 - 36 = 64$
$\sqrt{\Delta} = 8$
Wyznaczamy pierwiastki:

$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ lub $t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$t_1 = \frac{10-8}{2}$ lub $t_2 = \frac{10+8}{2}$

$t_1 = 1$ lub $t_2 = 9$

$x_1^2 = 1$ lub $x_2^2 = 9$

$x_1 = 1 \vee x_1 = -1$ lub $x_2 = 3 \vee x_2 = -3$

Odp: Rozwiązaniem równania $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ są: $x_1 = 1 \vee x_1 = -1 \vee x_2 = 3 \vee x_2 = -3$.

Zadania:

Rozwiąż równania:

1) $x^4 - 3(x^2 - 1) = 7(x^2 - 3)$ Odp: 2; -2; $\sqrt{6}; -\sqrt{6}$

2) $(x^2 - 9)(x^2 - 16) = 15x^2$ Odp: 2; -2; 6; -6

3) $x^4 - x^2 - 2 = 0$ Odp: $\sqrt{2}; -\sqrt{2}$

II. Równania pierwiastkowe.

Równaniem pierwiastkowym nazywamy równanie, w którym niewiadoma występuje pod znakiem pierwiastka.

Przykład 1.

Rozwiąż równanie:

$x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

Określamy dziedzinę:

D=$\left\{ x \in R,\ \ x \geq 0 \ \right\}$

$(\sqrt{x})^2 - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

Podstawiam:

$t = \sqrt{x}$

$t^2 - 5t + 6 = 0$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe zupełne. Obliczam wyróżnik:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 25 - 24 = 1$

$\sqrt{\Delta} = 1$

Wyznaczamy pierwiastki:

$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ lub $t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$t_1 = \frac{5-1}{2}$ lub $t_2 = \frac{5+1}{2}$

$t_1 = 2$ lub $t_2 = 3$

$\sqrt{x_1} = 2$ lub $\sqrt{x_2} = 3$

$x_1 = 4$ lub $x_2 = 9$

Sprawdzenie:

$x_1 = 4 \Rightarrow 4 - 5\sqrt{4} + 6 = 0$

$$-6+6=0$$
$$0=0$$
$$L = P$$

$$x_2 = 9 \Rightarrow 9 - 5\sqrt{9} + 6 = 0$$
$$-6+6=0$$
$$0=0$$
$$L = P$$

Odp: Rozwiązaniem równania są: $x_1 = 4$ lub $x_2 = 9$.

Przykład 2.
Rozwiąż równanie:
$x + \sqrt{10x+6} = 9$
Określamy dziedzinę:
D: $10x + 6 \geq 0$
$10x \geq -6$
$x \geq -\frac{3}{5}$
$D = \left\{ x \in R; \; x \geq -\frac{3}{5} \right\}$
$\sqrt{10x+6} = 9 - x$

Podnosząc obie strony do kwadratu, otrzymujemy:
$10x + 6 = 81 - 18x + x^2$
$-x^2 + 28x - 75 = 0$
$x^2 - 28x + 75 = 0$
Otrzymaliśmy równanie kwadratowe zupełne. Obliczam wyróżnik:
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = 784 - 300$
$\sqrt{\Delta} = 22$
Wyznaczamy pierwiastki:
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ lub $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 = \frac{28-22}{2}$ lub $x_2 = \frac{28+22}{2}$
$x_1 = 3$ lub $x_2 = 25$

Sprawdzenie:
$$x_1 = 3 \Rightarrow 3 + \sqrt{10 \cdot 3 + 6} = 9$$
$$3+6=9$$
$$9=9$$
$$L = P$$

$x_2 = 25 \Rightarrow 25 + \sqrt{10 \cdot 25 + 6} = 9$

$$25 + 16 = 9$$

$$41 = 9$$

$$\mathrm{L} \neq \mathrm{P}$$

Odp: Rozwiązaniem równania jest: $x_1 = 3$.

Przykład 3.

Rozwiąż równanie:

$\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$

Określamy dziedzinę:

D: $2x + 3 \geq 0 \quad \wedge \quad x + 1 \geq 0$

$x \geq -\frac{3}{2} \quad \wedge \quad x \geq -1$

$D = \{x \in R; \ \ x \geq -1\}$

$\sqrt{2x+3} = 1 + \sqrt{x+1}$

Podnosimy obie strony do kwadratu:

$2x + 3 = 1 + 2\sqrt{x+1} + 1 + x$

$2\sqrt{x+1} = x + 1$

Ponownie podnosimy obie strony do kwadratu:

$4(x+1) = x^2 + 2x + 1$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe zupełne. Obliczam wyróżnik:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 4 + 12$

$\sqrt{\Delta} = 4$

Wyznaczamy pierwiastki:

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ lub $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{2 - 4}{2}$ lub $x_2 = \frac{2 + 4}{2}$

$x_1 = -1$ lub $x_2 = 3$

Sprawdzenie:

$x_1 = -1 \quad \Rightarrow \sqrt{2(-1) + 3} - \sqrt{-1 + 1} = 1$

$$1 - 0 = 1$$

$$L = P$$

$x_1 = 3 \quad \Rightarrow \sqrt{2 \cdot 3 + 3} - \sqrt{3 + 1} = 1$

$$3 - 2 = 1$$

$$L = P$$

Odp: Rozwiązaniem równania jest: $x_1 = -1 \quad \vee \quad x_2 = 3.$.

Zadania:
Rozwiąż równania:

1) $\sqrt{1-x}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

2) $2\sqrt{x-2}+\sqrt{x}=\sqrt{x+3}-1$

3) $x+5<\sqrt{3x+19}$

4) $\sqrt{2x+3}<x+2$

5) $(x-3)-2\sqrt{(x-3)}-3=0$

Wzory Viete'a.

I. Twierdzenie Viete'a

Jeżeli $a \neq 0$, x_1 i x_2 są pierwiastkami trójmianu $y=ax^2+bx+c$, to zachodzą związki:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$$

Dowód:
Z założenia wynika, że $\Delta \geq 0$.
Dla każdej wartości x prawdziwa jest równość:
$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.
Wykonujemy działania po prawej stronie równości:
$ax^2+bx+c=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1 \cdot x_2$.

Równość ta zachodzi dla każdej wartości x wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki przy zmiennej x i wyrazy stałe są odpowiednio równe, czyli gdy
$b=-a(x_1+x_2)$ i $c=a \cdot x_1 \cdot x_2$. Stąd:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad \text{i} \quad x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a},$$

c.n.d.

W przypadku $\Delta=0$ mamy:
$x_1=x_2=x_0$;
wzory Viete'a przybierają postać:

$$2x_0=-\frac{b}{a}, \qquad x_0^2=\frac{c}{a}.$$

II. **Zastosowanie wzorów Viete'a.**

1. Badanie znaków pierwiastków trójmianu kwadratowego.

Zakładamy: $\Delta \geq 0,\ x_1 \leq x_2$.
Z własności sumy i iloczynu liczb rzeczywistych wynika:

$x_1 \cdot x_2 < 0 \Leftrightarrow (x_1 < 0 \text{ i } x_2 > 0).$
$(x_1 \cdot x_2 > 0 \text{ i } x_1 + x_2 > 0) \Leftrightarrow (x_1 > 0 \text{ i } x_2 > 0).$ $(x_1 \cdot x_2 > 0 \text{ i } x_1 + x_2 < 0) \Leftrightarrow (x_1 < 0 \text{ i } x_2 < 0).$

Przykład 1.
Nie obliczając pierwiastków trójmianu $3x^2 - 12x + 2$ ustalić ich znaki.

Sprawdzamy, że $\Delta > 0$, więc pierwiastki istnieją i $x_1 \neq x_2$.
Ze wzorów Viete'a:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{3} > 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 4 > 0$$

Stąd : $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$.
Odp. Pierwiastki mają znaki dodatnie.

Przykład 2.
Dany jest trójmian: $y = x^2 - 4x - 6$. Obliczyć sumę odwrotności pierwiastków tego trójmianu.
Mamy $a = 1, c = -6, ac < 0, b^2 - 4ac > 0,$ więc trójmian ma dwa pierwiastki.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}.$$

Ponieważ
$x_1 + x_2 = 4$, $x_1 \cdot x_2 = -6,$
więc $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{2}{3}.$

Odp. Suma odwrotności pierwiastków trójmianu wynosi: $-\frac{2}{3}$.

Przykład 3.
Wiadomo, że x_1, x_2 są pierwiastkami trójmianu. Nie rozwiązując wyznacz: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$.

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2}{x_1 x_2} + \frac{x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{(-\frac{b}{a})^2 - 2\frac{c}{a}}{\frac{c}{a}} = \left[\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}\right] \cdot \frac{a}{c} =$$

$$= \frac{b^2}{ac} - 2$$

Zadania
1.Określ znaki pierwiastków trójmianu jeśli one istnieją:
a) $y = x^2 - 5x - 3$ Odp. Pierwiastki są różnych znaków
b) $y = -2x^2 + 3x - 1$ Odp. Pierwiastki mają znaki dodatnie.
c) $y = x^2 - x + 6$ Odp. Trójmian nie ma pierwiastków.

2.Pierwiastki trójmianu $y = 4x^2 - 8x + c$ są liczbami naturalnymi. Oblicz c.
Odp: 0 lub 4

3. Wiadomo, że x_1, x_2 są pierwiastkami trójmianu. Nie rozwiązując wyznacz:

a) $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}$ Odp. $-\frac{b}{c}$

b) $x_1^3 + x_2^3$ Odp. $\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b^2}{a^2} - 3\frac{c}{a}\right)$

Równania kwadratowe z parametrem.

Przykład 1.
Zbadaj liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru m. Skonstruuj funkcję $f(m)$ wyrażającą tę zależność i narysuj jej wykres.

1). $x^2 - 5x + 4 = m$

$x^2 - 5x + 4 - m = 0$

$a = 1$

$b = -5$

$c = 4 - m$

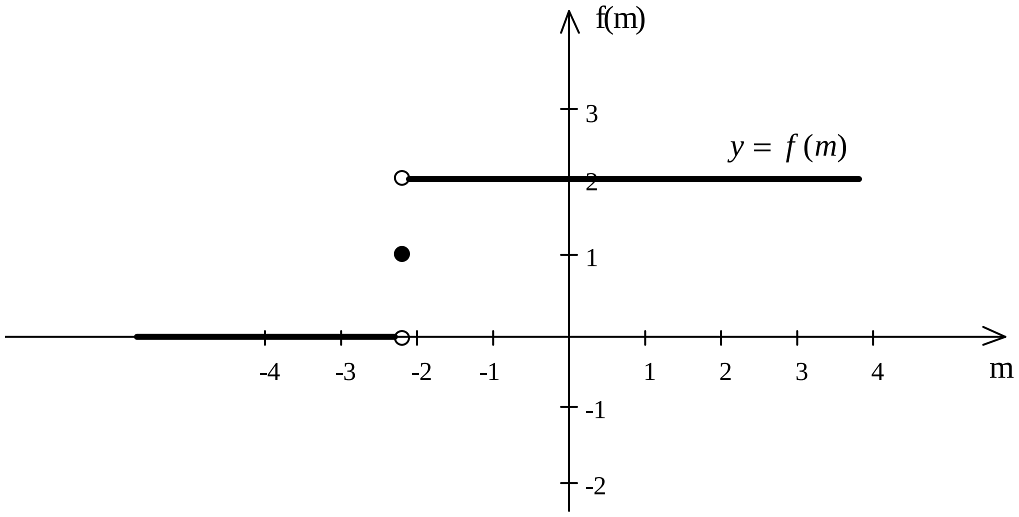
Obliczamy wyróżnik:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 25 - 4(4 - m) = 25 - 16 + 4m = 4m + 9$

Brak rozwiązań Δ<0	Jedno rozwiązanie Δ=0	Dwa rozwiązania Δ>0
$4m + 9 < 0$ $4m < -9$ $m < -\frac{9}{4}$	$4m + 9 = 0$ $4m = -9$ $m = -\frac{9}{4}$	$4m + 9 > 0$ $4m > -9$ $m > -\frac{9}{4}$

$$f(m) = \begin{cases} 0 \quad \text{dla} \quad m < -\frac{9}{4} \\ 1 \quad \text{dla} \quad m = -\frac{9}{4} \\ 2 \quad \text{dla} \quad m > -\frac{9}{4} \end{cases}$$



Odp. Jeżeli $m < -\frac{9}{4}$, to równanie nie ma rozwiązania.

Jeżeli $m = -\frac{9}{4}$, to równanie ma jedno rozwiązanie.

Jeżeli $m > -\frac{9}{4}$, to równanie ma dwa rozwiązania.

2) $x^2 - (m-3)x + \frac{1}{4}m^2 = 0$

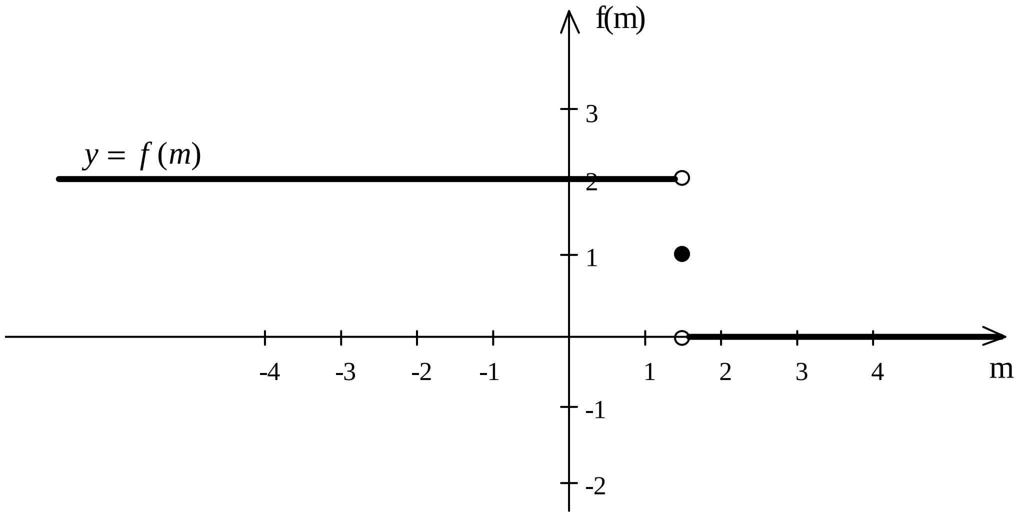
Obliczam wyróżnik:

$\Delta = \left[-(m-3)\right]^2 - m^2$

$\Delta = m^2 - 6m + 9 - m^2 = 9 - 6m$

Brak rozwiązania $\Delta < 0$	Jedno rozwiązanie $\Delta = 0$	Dwa rozwiązania $\Delta = 0$
$-6m + 9 < 0$ $-6m < -9$ $m > \frac{9}{6}$ $m > \frac{3}{2}$	$-6m + 9 = 0$ $-6m = -9$ $m = \frac{9}{6}$ $m = \frac{3}{2}$	$-6m + 9 > 0$ $-6m > -9$ $m < \frac{9}{6}$ $m < \frac{3}{2}$

$$f(m) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad m > \frac{3}{2} \\ 1 & \text{dla} \quad m = \frac{3}{2} \\ 2 & \text{dla} \quad m < \frac{3}{2} \end{cases}$$



Odp. Jeżeli $m > \frac{3}{2}$, to równanie nie ma rozwiązania.

Jeżeli $m = \frac{3}{2}$, to równanie ma jedno rozwiązanie.

Jeżeli $m < \frac{3}{2}$, to równanie ma dwa rozwiązania.

3) $mx^2 + 2(m-2)x + m - 3 = 0$

I. Równanie liniowe otrzymamy jeżeli:

$a = 0$
$m = 0$

Wtedy:

$-4x - 3 = 0$
$-4x = 0$
$x = -\frac{3}{4}$

równanie ma jedno rozwiązanie.

II. Równanie kwadratowe otrzymamy, jeżeli:

$a \neq 0$
$m \neq 0$

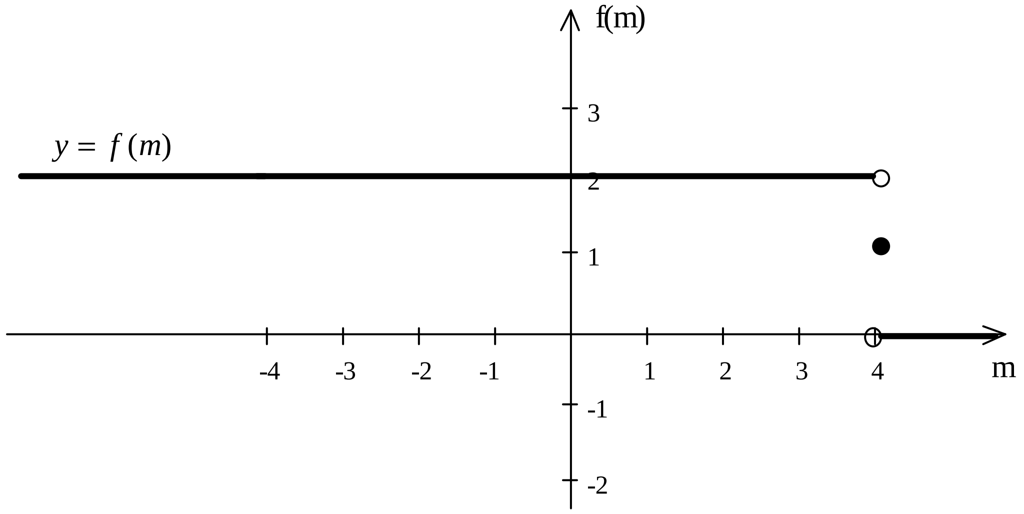
Wtedy:

$mx^2 + 2(m-2)x + m - 3 = 0$

Brak rozwiązań	Jedno rozwiązanie	Dwa rozwiązania

$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$
$-4m+16<0$ $-4m<-16$ $m>4$	$-4m+16=0$ $-4m=-16$ $m=4$	$-4m+16>0$ $-4m>-16$ $m<4$

$$f(m) = \begin{cases} 0 \quad \text{dla} \quad m > 4 \\ 1 \quad \text{dla} \quad m = 4 \ \text{ lub } \ m = 0 \\ 2 \quad \text{dla} \ \ m < 0 \ \ \text{ lub } \ m \neq 0 \end{cases}$$



Odp. Jeżeli $m > 4$, to równanie nie ma rozwiązania.
Jeżeli $m = 4 \vee m = 0$, to równanie ma jedno rozwiązanie.
Jeżeli $m < 0 \vee m \neq 0$, to równanie ma dwa rozwiązania.

Przykład 2.
Dla jakich parametrów m., n równanie:
$x^2 + mx = -mn - nx$
ma jeden pierwiastek podwójny. Wyznacz ten pierwiastek.

$x^2 + mx = -mn - nx$
$x^2 + mx + mn + nx = 0$
$x^2 + x(m+n) + mn = 0$

$a = 1$
$b = m + n$
$c = mn$

Aby pierwiastek był podwójny $\Delta = 0$.
Obliczamy wyróżnik:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (m+n)^2 - 4mn = m^2 + 2mn + n^2 = (m-n)^2$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \left(m - n^2 = 0\right)$$
$$m - n = 0$$
$$m = n$$

Obliczamy pierwiastek:

$x_0 = -\frac{b}{2a}$

$x_0 = \frac{-(m+n)}{2} = \frac{-(m+m)}{2} = \frac{-2m}{2} = -m$

Odp. Dla parametru $m = n$ równanie $x^2 + mx = -mn - nx$ ma jeden pierwiastek podwójny $x_0 = -m.$

Zadania

1. Zbadaj liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru m. Skonstruuj funkcję $f(m)$ wyrażającą tę zależność i narysuj jej wykres.

a) $(2-m)x^2 + 3(m-1)x - m + 1 = 0$

Odp. Jeżeli $m \in \left(\frac{1}{5}, 1\right)$, to równanie nie ma rozwiązań.

Jeżeli $m = \frac{1}{5} \vee m = 1 \vee m = 2$, to równanie ma jedno rozwiązanie.

Jeżeli $m \in \left(-\infty, \frac{1}{5}\right) \cup (1,2) \cup (2,+\infty)$, to równanie ma dwa rozwiązania.

b) $2mx^2 - 12x + 9 = 0$

Odp. Jeżeli $m > 2$, to równanie nie ma rozwiązań.

Jeżeli $m < 2 \wedge \mathrm{m} \neq 0$, to równanie ma jedno rozwiązanie.

Jeżeli $m = 0 \vee m = 2$, to równanie ma dwa rozwiązania.

2. Dla jakich wartości parametru m równanie: $x^2 - 2(m+2)x + 4m + 5 = 0$ ma dwa pierwiastki spełniające warunek $x_2 - x_1 = 2$?

Odp. $m_1 = -\sqrt{2}, \ m_2 = \sqrt{2}$

3. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - 2x + m - 4 = 0$ ma:

a) ma dwa pierwiastki Odp. $m < 5$

b) ma jeden pierwiastek (podwójny) Odp. $m = 5$

c) nie ma pierwiastków Odp. $m > 5$

Równania kwadratowe z parametrem – rozwiązywanie zadań.

Przykład 1

Dla jakiego parametru k zbiorem wartości funkcji $f(x) = kx^2 - 4x + k + 3$ jest zbiór $R_+ \cup \{0\}$.

Rozpatrujemy dwa przypadki:
a) funkcja liniowa
Jeżeli $k = 0$ wtedy funkcja przyjmuje postać: $f(x) = -4x + 3$.
Nie spełnia warunków zadania.
b) funkcja kwadratowa
Jeżeli $k \neq 0$ funkcja przyjmuje postać funkcji kwadratowej.
Aby spełnione były warunki zadania musi zachodzić:
1) $k > 0$ – wtedy ramiona paraboli będą skierowane ku górze
2) $\Delta = 0$ – wtedy wierzchołek będzie leżał na osi OX
Otrzymujemy układ zależności:

$$\begin{cases} k > 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

Obliczamy wyróżnik równania

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 16 - 4k^2 - 12k$

$\Delta = -4k^2 - 12k + 16$

Z warunków zadania wiemy, że: $\Delta = 0 \Leftrightarrow -4k^2 - 12k + 16 = 0 / (-4)$

$$k^2 + 3k - 4 = 0$$

Obliczamy wyróżnik równania $k^2 + 3k - 4 = 0$:

$\Delta_k = b^2 - 4ac$

$\Delta_k = 9 + 16 = 25$

$\sqrt{\Delta_k} = 5$

$k_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ lub $k_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$k_1 = \dfrac{-3 - 5}{2}$ lub $k_2 = \dfrac{-3 + 5}{2}$

$k_1 = -4$ lub $k_2 = 1$

Nie spełnia warunku zadania $k_1 = -4$.
Odp. Dla parametru $k_2 = 1$ zbiorem wartości funkcji $f(x) = kx^2 - 4x + k + 3$ jest $R_+ \cup \{0\}$.

Przykład 2.

Dla jakiego parametru a trójmian $(a-1)x^2 + (a-1)x + a$ przyjmuje tylko wartości ujemne?

Aby trójmian przyjmował wartości ujemne muszą zachodzić warunki:

1) $a-1\neq 0$ – wtedy funkcja f będzie trójmianem
2) $a-1<0$ – wtedy ramiona paraboli będą skierowane ku dołowi
3) $\Delta<0$ – wtedy wierzchołek będzie leżał pod osią
Otrzymujemy układ zależności:

$$\begin{cases} a-1<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$$

Z warunków zadania wiemy, że: $\Delta<0 \Leftrightarrow (a-1)^2-4a(a-1)<0$

$$-3a^2+2a+1<0$$

Obliczamy wyróżnik równania: $-3a^2+2a+1<0$

$\Delta_a=b^2-4ac$

$\Delta_a=4-4(-3)=16$

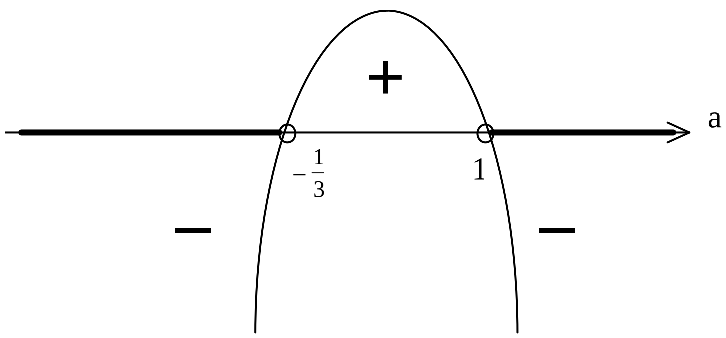
$\sqrt{\Delta_a}=4$

$a_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ lub $a_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

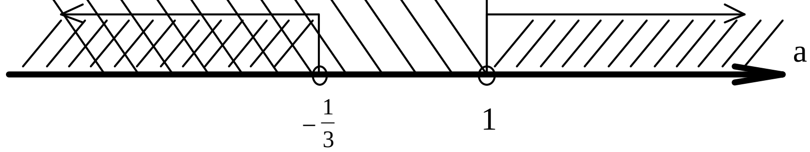
$a_1=\dfrac{-2-4}{-6}$ lub $a_2=\dfrac{-2+4}{-6}$

$a_1=1$ lub $a_2=-\dfrac{1}{3}$

Nie spełnia warunku zadania $a_1=1$.



$a\in\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(1,+\infty\right)$



$a \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$

Odp. Dla $a \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ trójmian przyjmuje wartości ujemne.

Zadania

1. Dla jakich m suma odwrotności pierwiastków równania: $x^2 - 2x(m-5) + m^2 + 3m + 2 = 0$ jest dodatnia?

Odp. $m \in (-2, -1)$

2. Dla jakich m równanie $x^2 - (2m-1)x + m^2 - 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki mniejsze od 4?

Odp. $m \in (2,4)$

3. Dla jakich k równanie $4kx^2 - 4(1-2k)x + 9k - 8 = 0$ ma dwa różne pierwiastki różnych znaków?

Odp. $m \in (0, \frac{8}{9})$

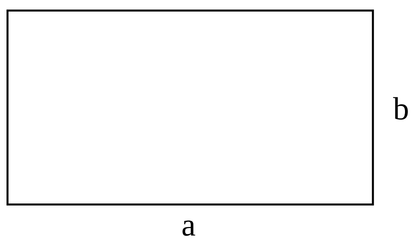
4. Dla jakich a $(a \in C)$ pierwiastki równania $x^2 - (2+a)x + 1 = 0$ spełniają warunek: $|x_1 - x_2| < 1$?

Odp. $m \in (-4,0)$

Funkcja kwadratowa – zadania.

Przykład 1.

Z danych prostokątów o obwodzie 8 wybrać ten o największym polu.



Oznaczenia:

a – długość prostokąta
b – szerokość prostokąta
P – pole prostokąta
$P = a \cdot b$
O – obwód prostokąta
$O = 2a + 2b = 8$

Dwóm wymiarom prostokąta przyporządkowana jest dokładnie jedna para liczb, którą nazywamy polem. Przyporządkowanie to nazywamy funkcją. Zatem pole prostokąta możemy traktować jako funkcję jego wymiarów.

$$P = f(a,b) = ab$$

Wiemy, że:

$2a + 2b = 8$

$a + b = 4$

$b = 4 - a$

Podstawiając do funkcji $f(a,b)$ otrzymamy:

$f(a) = a(4-a)$

$f(a) = 4a - a^2$

Otrzymaliśmy funkcję jednej zmiennej, która wyraża zależność pola prostokąta od długości boku a. Aby prostokąt miał największe pole, to funkcja $f(a)$ musi mieć największą wartość.
Funkcja $f(a)$ jest funkcją kwadratową, której współczynnik przy najwyższej potędze jest ujemny. Zatem największa wartość funkcja $f(a)$ przyjmuje w wierzchołku.

Współrzędne wierzchołka: $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$. Stąd otrzymujemy:

$a = \frac{-4}{-2} = 2$

$b = 4 - a$

$b = 4 - 2 = 2$

Odp. Ze wszystkich prostokątów o obwodzie 8, największe pole ma kwadrat o boku 2.

Przykład 2.

Który z walców o wysokości h, promieniu podstawy r i obwodzie przekroju osiowego $p = 100cm$ ma największą powierzchnię boczną?

Oznaczenia:

p – obwód przekroju osiowego walca

h – wysokość walca

r – promień podstawy

S – pole powierzchni bocznej walca

Mamy wzory: $p = 2h + 4r$

$100 = 2h + 4r$

oraz : $S = 2\pi rh$

Pole powierzchni bocznej walca $S = 2\pi rh$ traktujemy jako funkcję jego promienia i wysokości. Korzystając ze wzoru $100 = 2h + 4r$ możemy wyrazić h w zależności od r:

$h = 50 - 2r$

Stąd:

$S(r) = 2\pi(50 - 2r)$

$S(r) = -4\pi r^2 + 100\pi r$

Widzimy, że pole powierzchni bocznej rozpatrywanego walca wyraziliśmy jako funkcję promienia. Jest to funkcja drugiego stopnia, gdzie $a = -4\pi,\ b = 100\pi,\ c = 0$.

Ponieważ jest $a < 0,$ więc funkcja ta osiąga największą wartość dla:

$r = -\frac{b}{2a}$, czyli

$r = \frac{-100\pi}{-8\pi} = 12{,}5$

Zatem pole powierzchni bocznej jest największe, gdy $r = 12{,}5$.

Mamy wówczas:
$2r = 25cm,$

$h = (50 - 2r)cm = 25cm$

Odp. Największą powierzchnię boczną ma walec, którego przekrojem osiowym jest kwadrat.

Przykład 3.

Rozwiązać równanie:

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

D: $1 - x \geq 0 \quad \wedge \quad x \geq 0$

$x \leq 1 \quad \wedge \quad x \geq 0$

Dwa razy podnosimy obustronnie do kwadratu:

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$1 - x - 2\sqrt{x}\sqrt{1-x} + x = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} = \frac{1}{3}$$

$$x(1-x) = \frac{1}{9}$$

$$x^2 - x + \frac{1}{9} = 0$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe. Obliczamy wyróżnik:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\sqrt{\Delta} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Obliczamy pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{1 - \frac{\sqrt{5}}{3}}{2} \quad \vee \quad x_2 = \frac{1 + \frac{\sqrt{5}}{3}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{6} \quad \vee \quad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{6}$$

Sprawdzenie x_1:

$$\sqrt{1-x_1} - \sqrt{x_1} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{6}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{6}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^2} - \sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(1 + \sqrt{5} - \sqrt{5} + 1\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Sprawdzenie x_2:

$\sqrt{1-x_1}-\sqrt{x_1}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{6}}-\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Po uwzględnieniu dziedziny otrzymujemy, że x_2 nie spełnia równania.

Odp. Rozwiązaniem równania jest: $x_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{6}$.

Zadania

1. Okno ma kształt prostokąta zakończonego na górze trójkątem równobocznym. Obwód okna wynosi 2. Jaka powinna być długość podstawy prostokąta, aby powierzchnia okna była największa? Odp. $a = \dfrac{-1}{\left(\dfrac{\sqrt{3}-6}{4}\right)\cdot 2}$

2. Rozwiązać w zbiorze Z_5 równanie: $3x^2 + 2x - 1 = 0$.

Odp. $x_1 = 2, x_2 = 4$

3. Z prostokątnego kawałka tektury wykonano otwarte pudełko w ten sposób, że wycięto w czterech rogach kwadraty o boku 5 i otrzymane boki zgięto. Długość arkusza tektury jest dwa razy większa od szerokości, a objętość pudełka wynosi 1040. Oblicz wymiary kawałka tektury, z którego wykonano pudełko.

Odp. 36 i 18.

4. Rozwiązać równanie: $\sqrt{x} + \sqrt{2x+1} = 5$

Odp. $x = 4$

5. Dwa samochody minęły się na skrzyżowaniu prostopadłych szos. Jeden jechał na północ, drugi na zachód. Po dwóch godzinach od spotkania ich odległość w linii powietrznej wynosiła 200 km. Średnia prędkość jednego samochodu była o 20 km/h większa niż średnia prędkość drugiego. Oblicz te prędkości.

Odp.80 km/h; 60 km/h.

Równanie ogólne drugiego stopnia. Krzywe stożkowe.

Definicja

Równanie postaci

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

Gdzie A,B,C nie są jednocześnie zerami, nazywamy równaniem ogólnym drugiego stopnia.

Równanie kwadratowe może mieć:

1) brak rozwiązań , np. $x^2+y^2+1=0$
2) jedno rozwiązanie , np. $x^2+(y-1)^2=0$
3) nieskończenie wiele rozwiązań , np.

a)
$x^2-2xy+y^2=0$
$(x-y)^2=0$
$(x-y)(x-y)=0$
$y=x \quad \vee \quad y=x$ *proste równoległe*

b)
$x^2-y^2=0$
$(x-y)(x+y)=0$
$y=x \ \vee \ y=-x$ *proste prostopadłe*

c)
$y=x^2-5x+6$ *parabola*

d)
$x^2+y^2-4=0$ *okrąg*

e)

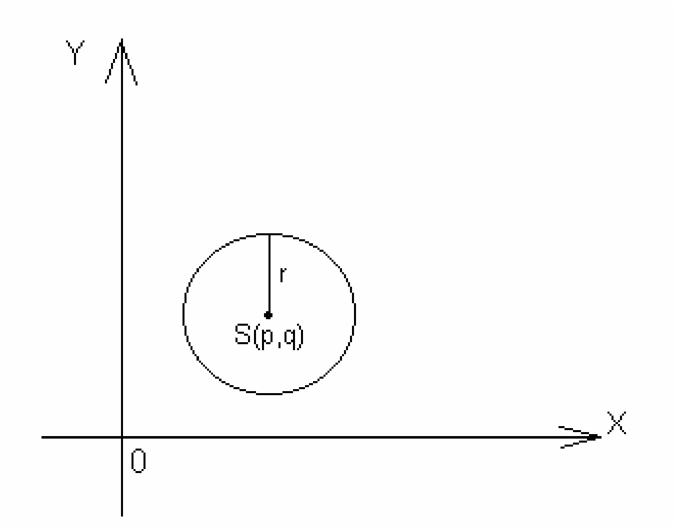
$\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2-1=0$ *elipsa*

f)
$xy-2=0$ *hiperbola*

Każde rozwiązanie równania kwadratowego jest zbiorem punktów , które tworzą krzywe zwane krzywymi stożkowymi.

1) Okrąg
a) $(x-p)^2-(y-q)^2= r^2$ *równanie kanoniczne okręgu*

p,q - współrzędne środka okręgu
r - promień okręgu

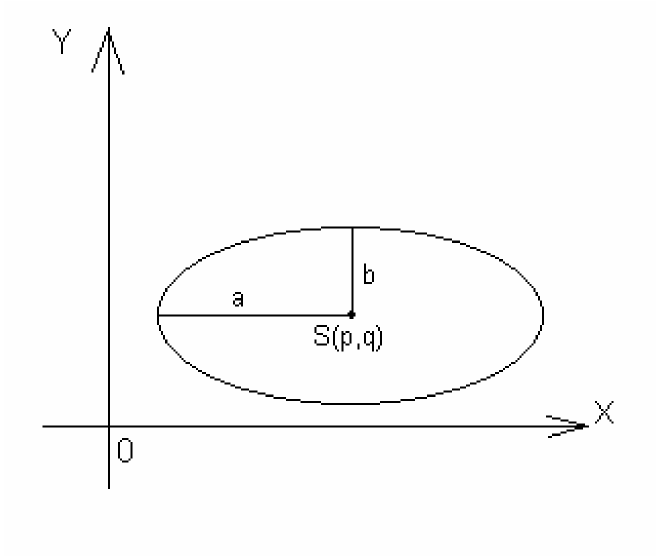


b) $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$
$x^2-2px+p^2+y^2-2qy+q^2-r^2=0$
$x^2+y^2-2px-2qy+p^2+q^2-r^2=0$ *równanie ogólne okręgu*

2) Elipsa

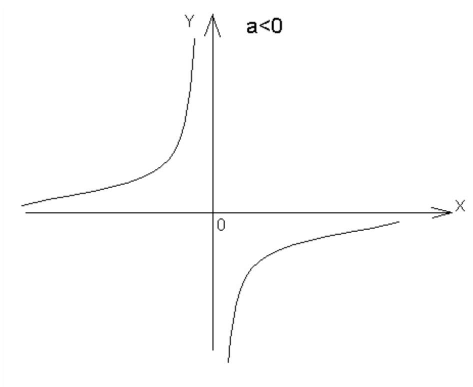
$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$$

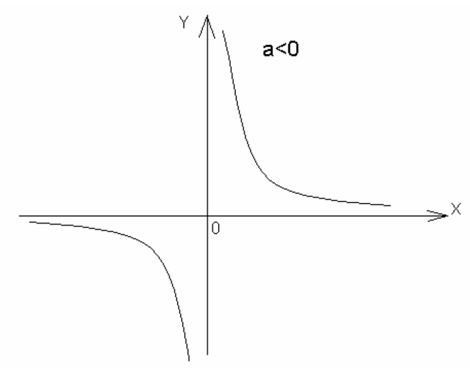
p,q - współrzędne środka elipsy
a,b - półosie elipsy



3) Hiperbola
xy=a

$$y=\frac{a}{x} \qquad x\neq 0$$





Przykład. Jaką krzywą przedstawia równanie.

a)
$x^2+y^2=4$ okrąg o środku S(0,0) i promieniu r=2

b)
$x^2+y^2-2x-8=0$
$x^2-2x+y^2-8=0$
$x^2-2x+1-1+y^2-8=0$ okrąg o środku S(1,0) i r=3
$(x-1)^2+y^2=9$

c)

$x^2+y^2-4x+6y-15=0$

$x^2-4x+4-4+y^2+6y+9-9-15=0$ okrąg o środku S(2,-3) i r-2$\sqrt{7}$

$(x-2)^2+(y+3)^2=28$

d)

$x^2+9y^2+6x+9=36$

$x^2+6x+9+9y^2=36$ elipsa o środku S(-3,0) ; a=6 i b=2

$(x+3)^2+9y^2=36$

$$\frac{(x+3)^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$$

e)

$4xy-12=0$

$4xy=12$

$xy=3$ hiperbola

$y=\frac{3}{x}$

f)

$4x^2-9y^2=0$

$(2x-3y)(2x+3y)=0$

$2x-3y=0 \lor 2x+3y=0$ dwie proste przecinające się

$3y=2x \lor 3y=-2x$

$y=\frac{2}{3}x \lor y=-\frac{2}{3}x$

g)

$x^2+xy=0$

$x(x+y)=0$ dwie proste przecinające się

$x=0 \lor x=-y$

Zadanie. Jaką krzywą przedstawia równanie.

a) $4x-y^2=0$

b) $x^2+2xy+y^2=0$

c) $xy=-6$

d) $xy+y^3=0$

e) $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(x-4)^2}{9}=1$

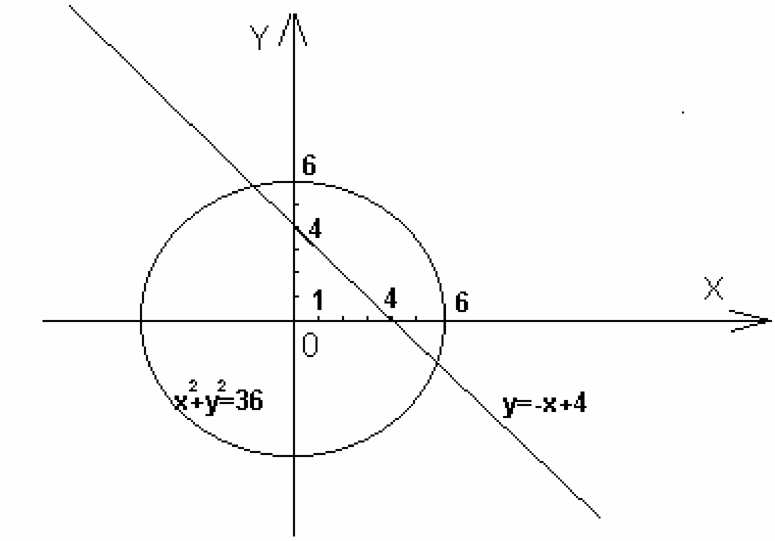
Układy równań.

Przykład. Rozwiąż graficznie i algebraicznie.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

a) rozwiązanie graficzne

okrąg o środku S(0,0) i r=6
prosta y=-x+4



b) rozwiązanie algebraiczne

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4 - x \\ x^2 + 16 - 8x + x^2 = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4 - x \\ 2x^2 - 8x - 20 = 0 \end{cases}$$

$x^2-4x-10=0$
$\Delta=16+40=56$
$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{14}$

$$x_1 = 2 - \sqrt{14} \quad \vee \quad x_2 = 2 + \sqrt{14}$$

$y_1=4-x_1 \quad \vee \quad y_2=4-x_2$
$y_1=4-2+\sqrt{14} \quad \vee \quad y_2=4-2-\sqrt{14}$
$y_1=2+\sqrt{14} \quad \vee \quad y_2=2-\sqrt{14}$

Odp. Rozwiązaniem są dwie pary liczb $\begin{cases} x = 2 - \sqrt{14} \\ y = 2 + \sqrt{14} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 + \sqrt{14} \\ y = 2 - \sqrt{14} \end{cases}$.

Zadanie. Rozwiąż algebraicznie i graficznie.

a)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y^2 + x^2 + 8y + 12 = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + xy + y = 13 \\ 2(x+y)^2 + x^2 y + xy^2 + 30 = 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} |x - y| = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Styczna i sieczna krzywej stożkowej.

Definicja.
Prostą k mającą jeden punkt wspólny z krzywą stożkową nazywamy styczną.
Definicja.
Prostą k mającą dwa punkty wspólne z krzywą stożkową nazywamy sieczną.

Przykład . Przedyskutuj istnienie i liczbę rozwiązań układu równań w zależności od parametru m.
$$\begin{cases} x^2 - y - 4 = 0 \\ 2x - y + m = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y - 4 = 0 \\ 2x - y + m = 0 \end{cases}$$

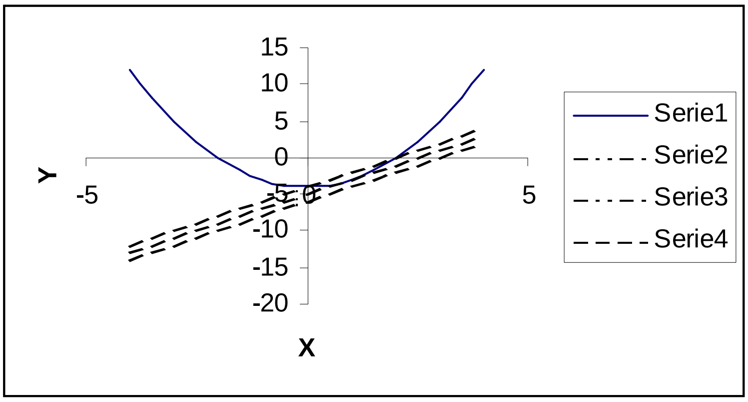
$$\begin{cases} y = 2x + m \\ x^2 - y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - (2x + m) - 4 = 0$$

$$x^2 - 2x - m - 4 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(-m - 4) = 4 + 4m + 16 = 4m + 20$$

Brak rozwiązań	Jedno rozwiązanie	Dwa rozwiązania
4m+20<0 m<-5	4m+20=0 m=-5	4m+20>0 m>-5



Odp. Dla parametru m<-5 układ nie ma rozwiązań , dla m=-5 układ ma jedno rozwiązanie , dla m>-5 układ ma dwa rozwiązania.

<u>Zadanie 1.</u> Dla jakiego paramertu m prosta x-y-m=0
Jest styczna do krzywej $x^2+y^2+2x-4y-4=0$
Odp. Prosta jest styczna do krzywej jeśli układ ma jedno rozwiązanie, czyli dla $m=-3-3\sqrt{2}$ lub $m=-3+3\sqrt{2}$.

<u>Zadanie 2.</u>Dla jakiego parametru m prosta y=2x+4 nie ma punktów wspólnych z krzywą $(x-1)^2+y^2=m$.
Odp. Dla $m \in (0, \frac{36}{5})$ prosta nie ma punktów wspólnych z krzywą.

<u>Zadanie 3.</u> Dla jakiego parametru a prosta x+y+a=0 jest sieczną krzywej $3x^2-6x+2y^2+8y+5=0$
Odp. Dla $a \in (1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5})$ prosta jest sieczną krzywej.

<u>Zadanie 4.</u>Dla jakiego parametru t krzywe są styczne zewnętrznie.
WSKAZÓWKA. Okręgi są styczne zewnętrznie jeśli spełniony jest warunek $\overline{|S_1S_2| = r_1 + r_2}$.
Odp. Dla $t=-2\sqrt{2}$ okręgi są styczne zewnętrznie.

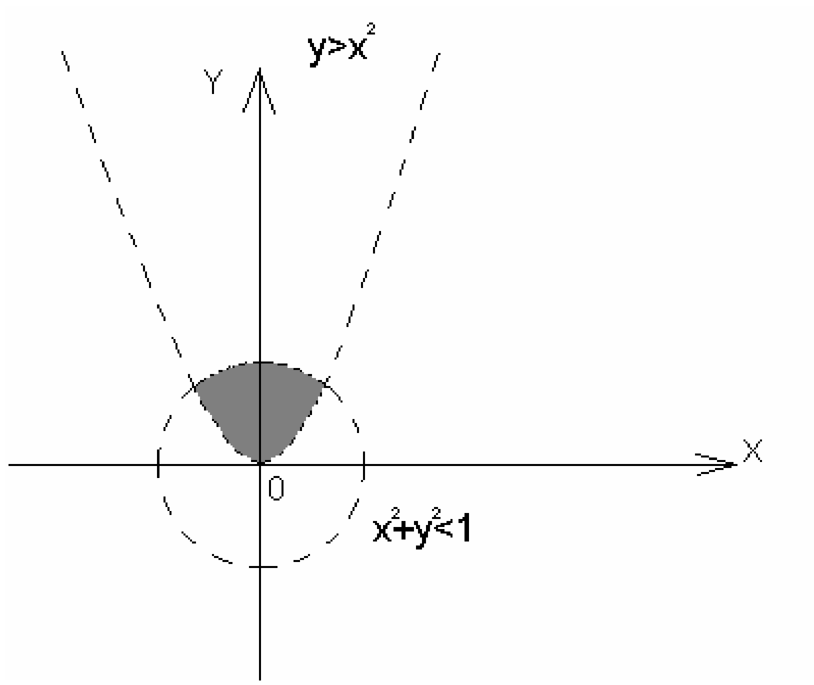
<u>Zadanie 5.</u>Dla jakiego parametru k krzywe $\begin{cases} xy - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - k = 0 \end{cases}$ są styczne.

Odp. Dla k=2. Krzywe są styczne.

Układy nierówności.

Przykład1. Zaznacz na płaszczyźnie.

$$\begin{cases} y > x^2 \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$



Zadanie. Zaznacz na płaszczyźnie.

a)

$$\begin{cases} \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{1} \le 1 \\ y \langle -x^2 + 1 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} xy \langle 1 \\ x^2 + y^2 \ge 4 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} |x| + |y| > 1 \\ x^2 + y^2 < 1 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} y < \sin x \\ x^2 + y^2 \leq 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} xy > 1 \\ (x-3)^2 + (y+1)^2 > 4 \\ y < x \end{cases}$$