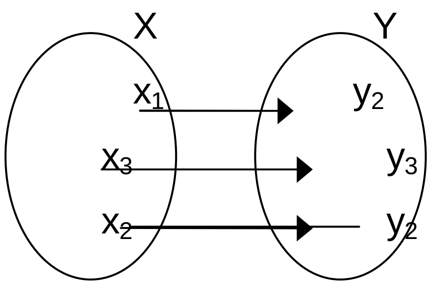
FUNKCJE

Przy badaniu otaczających nas przedmiotów i zjawisk wprowadzamy różne wielkości, które je charakteryzują, i staramy się wykryć związki między tymi wielkościami.

I. Pojęcie funkcji .

Definicja:

Niech dane będą zbiory $X, Y \neq 0$. Przyporządkowanie , które każdemu elementowi zbioru X przypisuje dokładnie jeden element zbioru Y nazywamy **funkcją** , co zapisujemy :
$f: X \rightarrow Y$ $y = f(x)$



x- argument funkcji (zmienna niezależna)

y- wartość funkcji (zmienna zależna)

f - określa funkcję

X- zbiór argumentów (dziedzina funkcji)

Y- zbiór wartości funkcji (przeciwdziedzina)

II. Sposoby określania funkcji .

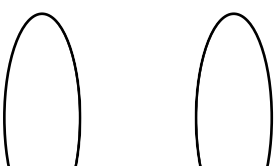
1. Przypis słowny :

   Każdemu X przyporządkowany jest jeden Y .

2. Przy pomocy tabelki

x	-2	0	3	5
f (x)	-6	0	6	15

3. Graficznie



$3 \longrightarrow 9$

$0 \longrightarrow 0$

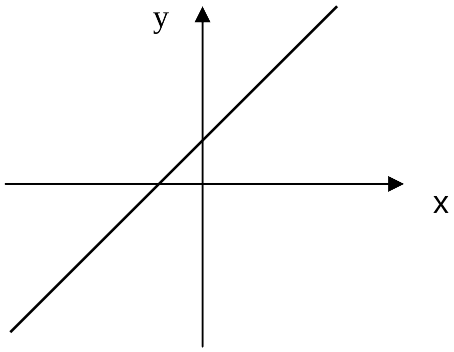
$-3 \longrightarrow -9$

4. Przy pomocy wzoru

$f : R \rightarrow R$

$f(x) = 3x$

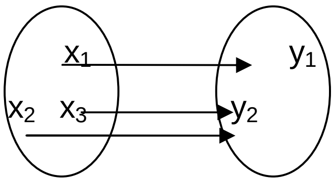
5. Za pomocą wykresu



III. Funkcja „na”.

Definicja :

Mówimy , że funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest „na” , jeśli każdy element $y \in Y$ jest przyporządkowany conajmniej jednemu elementowi $x \in X$.

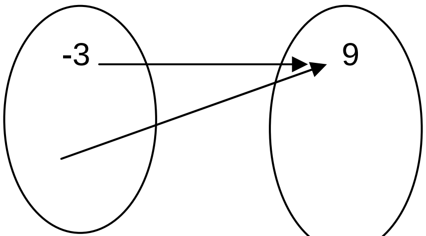


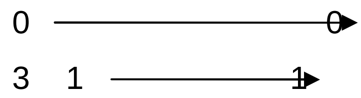
Przykład :

$y = x^2$

$X = \{-3, 0, 1, 3\}$

$Y = \{0, 1, 9\}$

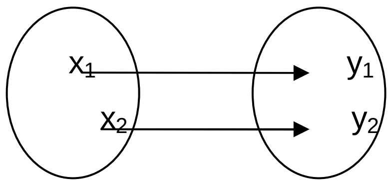




IV. Funkcja różnowartościowa i wzajemnie jednoznaczna .

Definicja :

Mówimy , że funkcja jest **różnowartościowa** , jeżeli element $y \in Y$ jest przyporządkowany dokładnie jednemu elementowi $x \in X$.

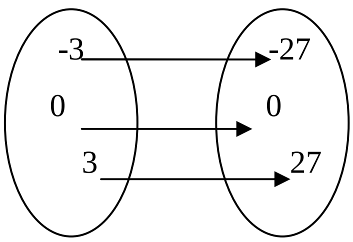


Przykład

$y = x^3$

$X = \{-3 ,0 ,3 \}$

$Y = \{-27 ,0 ,27 \}$



Definicja :

Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy **wzajemnie jednoznaczną** , jeśli jest różnowartościowa i „na” .

V. Obraz i przeciwobraz zbioru .

Definicja :

Obrazem zbioru $A \subset X$ wyznaczonym przez funkcję f nazywamy zbiór wartości funkcji f dla argumentów należących do zbioru A .

$f(A) = \{ y \in Y ;\ y = f(x) \wedge x \subset A \}$

Definicja :

Przeciwobrazem zbioru $C \subset Y$ wyznaczonym przez funkcję f nazywamy zbiór , którego elementami są te x , których obrazy należą do zbioru C .

$f^{-1}(C) = \{ x \in X ,\ f(x) \in C \}$

VI .Funkcja liczbowa .

Definicja :

Jeżeli zbiory X i Y są zbiorami liczbowymi , to funkcję f nazywamy **funkcją liczbową.**

Działania na funkcjach :

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$

Definicja :

Mówimy , że funkcje $f : D_1 \rightarrow R$ i $g : D_2 \rightarrow R$ są równe (f = g) , obie dziedziny są takie same , i dla każdego x zachodzi : f(x) = g(x) .

Przykład

$f(x) = \dfrac{x^2}{x}$ $\qquad D_1 = R \setminus \{o\}$

$g(x) = x$ $\qquad D_2 = R$

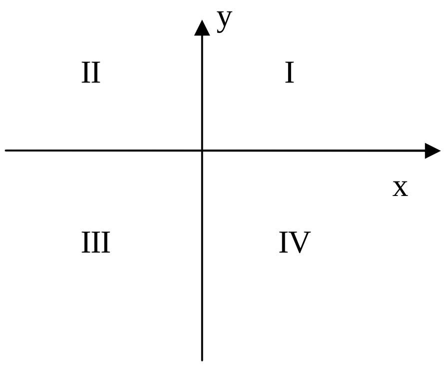
$D_1 \neq D_2$

Czyli obie funkcje są różne .

1. Układ współrzędnych na płaszczyźnie .

Definicja :

Układem współrzędnych prostokątnych na płaszczyźnie nazywamy parę osi liczbowych wzajemnie prostopadłych , przy czym punkt przecięcia tych osi zwany początkiem układu jest punktem zerowym każdej z nich .



Oś poziomą oznaczamy OX i nazywamy osią odciętych . Oś pionową oznaczamy OY i nazywamy osią rzędnych . Taki układ współrzędnych oznaczamy OXY . Dzieli on płaszczyznę na cztery ćwiartki . Każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkujemy parę liczb : odciętą x i rzędną y . Liczby x i y nazywamy współrzędnymi A , co zapisujemy A (x,y) .

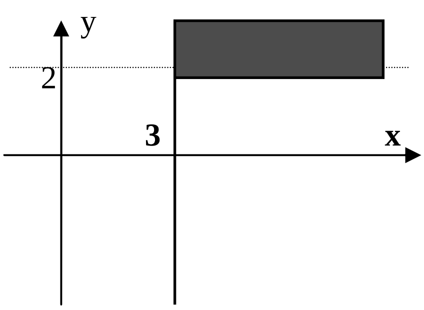
Twierdzenie :

Każdej uporządkowanej parze liczb rzeczywistych odpowiada na płaszczyźnie dokładnie jeden punkt , którego współrzędnymi są te liczby i odwrotnie , każdy punkt na płaszczyźnie ma dokładnie jedną parę współrzędnych .

Przykład

Zacieniuj zbiór tych wszystkich punktów płaszczyzny , których współrzędne spełniają warunki :

$x \geq 3$ i $y > 2$



2. Iloczyn kartezjański .

Definicja :

Zbiór wszystkich par uporządkowanych (x , y) takich , że $x \in X$ i $y \in Y$ nazywamy **iloczynem kartezjańskim** , co oznaczamy :

$$X \times Y$$

Przykład

Mamy dane dwa zbiory A i B . Wyznacz iloczyn kartezjański .

A = {a ,b ,c }

B = {e ,f }

Podajemy zbiór wszystkich uporządkowanych par elementów .

$A \times B$ = { (a,e),(a,f),(b,e),(b,f),(c,e),(c,f) }

czyli :

$A \times B = 6$

3. Wykres funkcji .

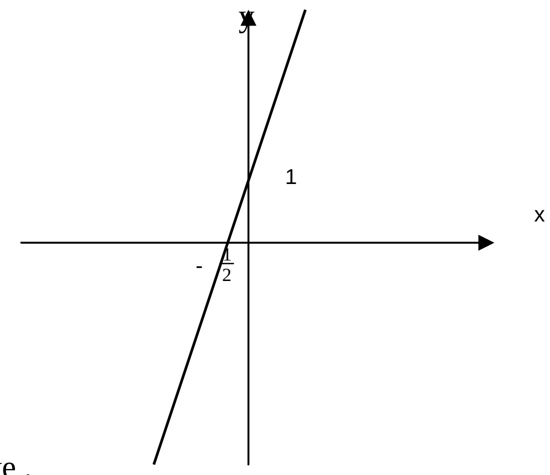
Definicja :

Wykresem funkcji nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny o współrzędnych x i y , takich , że x należy do dziedziny funkcji a y jest odpowiednią wartością .

Przykład

Naszkicuj wykres funkcji :

f (x) = 2x + 1



4. Miejsca zerowe .

Definicja :

Miejscem zerowym funkcji nazywamy tę wartość argumentu , dla której funkcja przybiera wartość zero .

Przykład

Wyznacz miejsce zerowe funkcji : f (x) = $\frac{1}{5}$ x - 2

$\frac{1}{5}$ x - 2 =0

$\frac{1}{5}$ x = 2

$x = 10$

5. Monotoniczność funkcji .

Definicja :

Funkcję f nazywamy **malejącą** w zbiorze X wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych x_1 i x_2 należących do zbioru X zachodzi :

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

czyli , gdy większej wartości argumentu odpowiada mniejsza wartość funkcji .

Definicja :

Funkcję f nazywamy **rosnącą** w zbiorze X wtedy i tylko wtedy , gdy dla dowolnych x_1 i x_2 należących do zbioru X zachodzi :

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

czyli , gdy większej wartości argumentu odpowiada większa wartość funkcji .

Definicja :

Funkcję f nazywamy **niemalejącą** w zbiorze X wtedy i tylko wtedy , gdy dla dowolnych x_1 i x_2 należących do zbioru X zachodzi :

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Definicja :

Funkcję f nazywamy **nierosnącą** w zbiorze X wtedy i tylko wtedy , gdy dla dowolnych x_1 i x_2 należących do zbioru X zachodzi :

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Przykład

Zbadaj monotoniczność funkcji :

$f(x) = -2x + 1$

- weźmy dowolne $x_1 < x_2$ i rozpatrzmy różnicę $f(x_1) - f(x_2)$

$f(x_1) - f(x_2) = (-2x_1 + 1) - (-2x_2 + 1) = -2x_1 + 2x_2 = -2(x_1 - x_2) > 0$

czyli

$f(x_1) - f(x_2) > 0$

$f(x_1) > f(x_2)$, co oznacza , że funkcja f jest malejąca .

6. Okresowość funkcji

Definicja :

Funkcję $f : X \rightarrow Y$ nazywamy **okresową** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $s \neq 0$, taka, że dla każdego $x \in X$ zachodzi :

$x + s \in X$ i $x - s \in X$ i $f(x + s) = f(x) = F(x-s)$

7. Dziedzina funkcji

Zbiór wszystkich wartości zmiennej niezależnej (argumentu) x, dla których funkcja f(x) jest określona.

8. Parzystość i nieparzystość funkcji

Definicja :

Funkcję f nazywamy **parzystą**, jeżeli istnieje takie x należące do dziedziny funkcji, gdzie :

$f(-x) = f(x)$

Definicja :

Funkcję f nazywamy **nieparzystą**, jeżeli istnieje takie x należące do dziedziny funkcji, dla którego zachodzi :

$f(-x) = - f(x)$

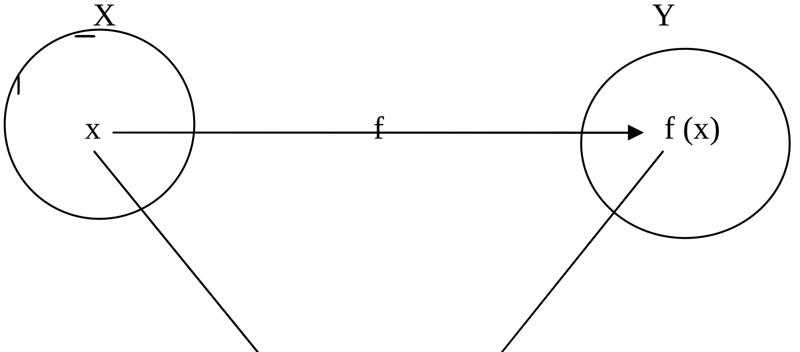
VII . Funkcja złożona i odwrotna .

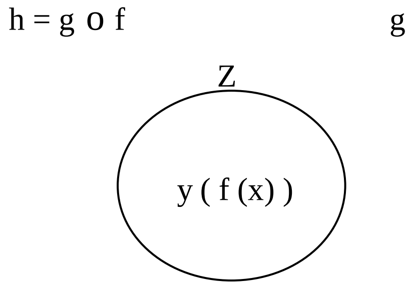
1 . Funkcja złożona

Definicja :

Niech $f : X \xrightarrow{\text{"na"}} Y$ i $g : Y \rightarrow Z$. Para uporządkowana (f , g) określa nową funkcję $h : X \rightarrow z$ zwaną **złożeniem** (superpozycją) funkcji f i g, co zapisujemy :

$h = g \circ f$, $h(x) = g[f(x)]$



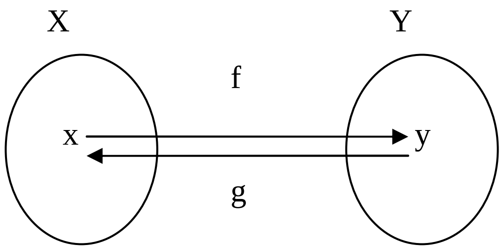


2 . Funkcja odwrotna .

Definicja :

Niech $f : X \rightarrow Y$. Mówimy , że funkcja $g : Y \rightarrow X$ jest **odwrotną** do funkcji f , jeśli zachodzi :

$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$



Twierdzenie :

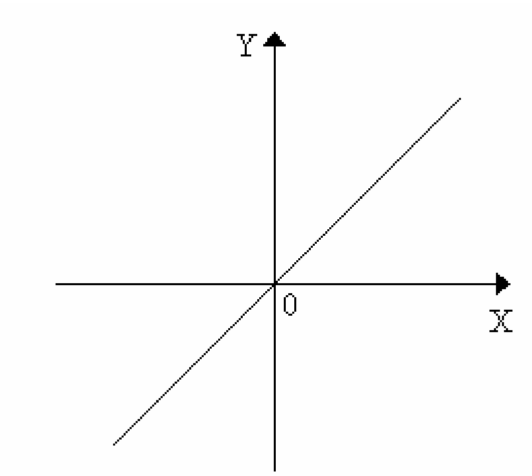
Funkcja odwrotna do funkcji $f : X \rightarrow Y$ istnieje wtedy , gdy f jest „na” i różnowartościowa .

VIII . Przykłady funkcji liczbowej .

FUNKCJE

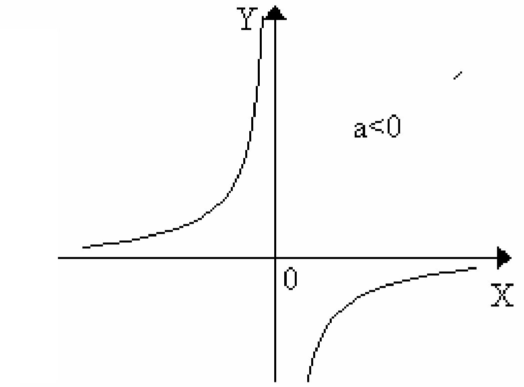
1 . Proporcjonalność prosta .

y = ax



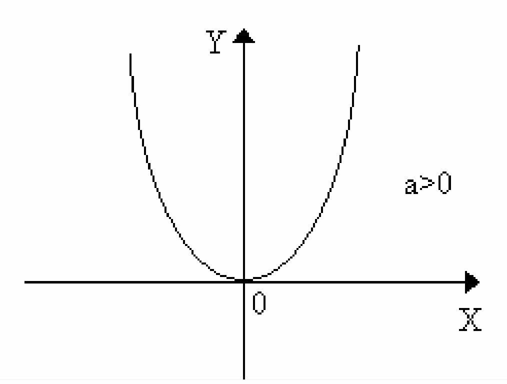
2 . Proporcjonalność odwrotna .

$$y = \frac{a}{x}$$



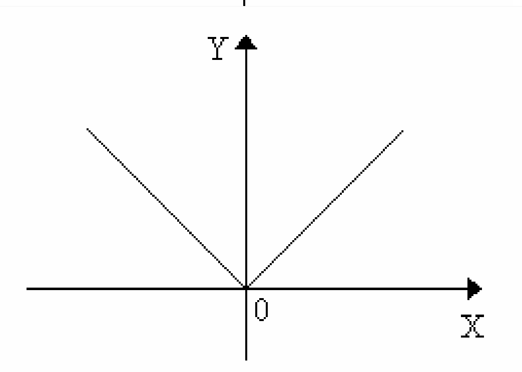
3 . Funkcja kwadratowa .

$y = ax^2$



4. Wartość bezwzględna .

$y = | x |$

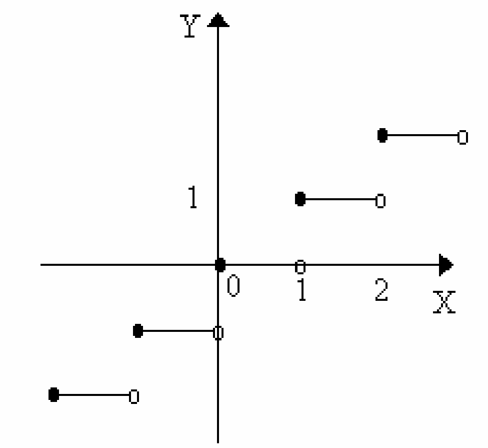


5. Cecha liczby

$y = [x]$

Definicja :

Częścią całkowitą (cechą) liczby x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą od x i oznaczamy [x] .



Przykład

[2,1] = 2

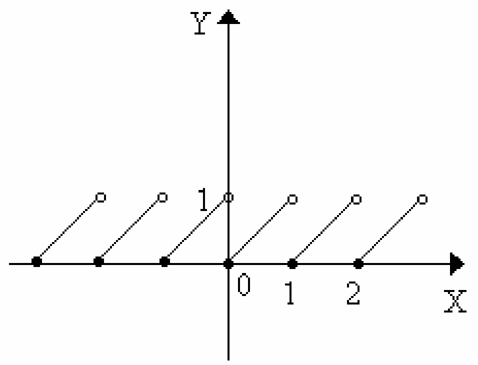
[-2,1] = -3

6. Mantysa liczby .

$y = m(x)$

Definicja :

Mantysą nazywamy różnicę x - [x] i oznaczamy m (x) .



Przykład

m (2,3) = 2,3 - [2,3] = 2,3 - 2 = 0,3

ZADANIA

Zadanie 1 .

Określ dziedzinę i monotoniczność funkcji $y = 3x - 2$

1. Dziedzina

$D: 3x - 2 \neq 0$

$3x \neq 2$

$x \neq \frac{2}{3}$

2. Monotoniczność

- weźmy dowolne x_1 i x_2 , gdzie $x_1 < x_2$
- rozpatrzmy różnicę

$f(x_1) - f(x_2) = (3x_1 - 2) - (3x_2 - 2) = 3x_1 - 3x_2$

$f(x_1) - f(x_2) < 0$

$f(x_1) < f(x_2)$,czyli funkcja jest rosnąca .

Zadanie 2 .

Mając dane $g(x) = x^2 + 2x$, oblicz :

a) g (2)

b) g (0,5)

c) g (- 0,3)

-obliczamy podstawiając do wzoru :

a) $g(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 = 4 + 4 = 8$

b) $g(0{,}5) = (0{,}5)^2 + 0{,}5 = 0{,}75$

c) $g(-0{,}3) = (-0{,}3)^2 + (-0{,}3) = 0{,}09 + (-0{,}3) = (-0{,}21)$

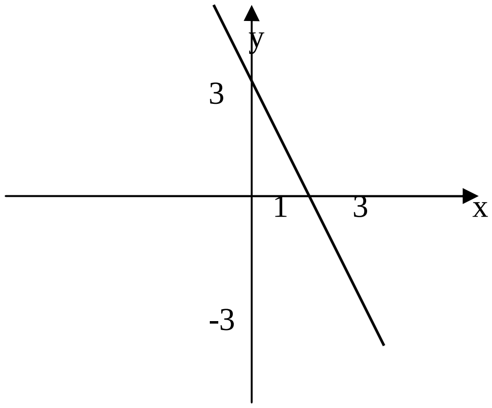
Zadanie 3 .

Mając daną funkcję $y = 3 - 2x$, ułóż częściową tabelkę , narysuj wykres oraz podaj miejsca zerowe .

1.Układamy tabelkę :

x	-2	0	1	3
y = 3-2x	7	3	1	-3

2. Rysujemy wykres



3.Miejsce zerowe

$3 - 2x = 0$

$-2x = -3$

$x = \frac{3}{2}$

Zadania do samodzielnego rozwiązywania .

Zadanie 1.

Podaj wzór funkcji odwrotnej do podanej funkcji i naszkicuj jej wykres :

y = $\frac{-2}{x}$

Zadanie 2.

Ułóż częściową tabelkę funkcji y = 10 - x^3 , zbadaj monotoniczność , narysuj wykres i odczytaj z niego miejsca zerowe .

Zadanie 3.

Ułóż częściową tabelkę i sprawdź , czy dla funkcji f (x) = 4 - x zachodzi :

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Zadanie 4.

a)Czy objętość sześcianu jest funkcją długości krawędzi tego sześcianu ?

b)Czy długość krawędzi sześcianu jest funkcją objętości tego sześcianu ?

Zbuduj odpowiednie wzory . Czy w każdym z zadań można podać tylko jeden wzór , czy więcej ?

Zadanie 5.

Wykaż , że funkcja y = log (x + $\sqrt{x^2 + 1}$) określona na zbiorze R wszystkich liczb rzeczywistych jest nieparzysta .

Zadanie 6.

Niech C oznacza zbiór wszystkich liczb całkowitych . Znaleźć elementy zbioru (B$\times$A) - (A$\times$B) wiedząc , że

A = { k$\in$ C : k $\in$ $\langle -1;5 \rangle$ } i B = { k $\in$ C : k $\in$ $\langle 0;4 \rangle$ }