FUNKCJA LINIOWA

FUNKCJA LINIOWA

DEFINICJA

Funkcję f : R $\rightarrow$ R daną wzorem f (x) = ax + b gdzie a , b $\in$ R nazywamy funkcją liniową.

Np. f (x) = 3x – 5 ; a = 3 , b = – 5
f (x) = – x +2 $\sqrt{3}$; a = –1 , b = 2 $\sqrt{3}$

I. Funkcja postaci f (x) = ax

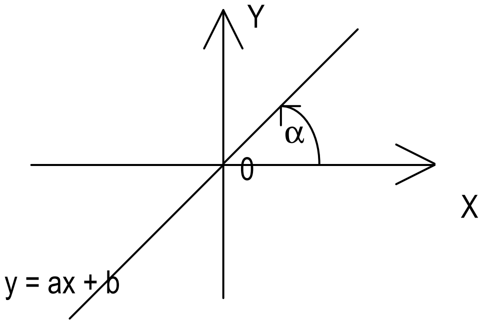
Funkcja postaci f (x) = ax jest szczególnym przypadkiem funkcji liniowej, w którym b = 0. Funkcję liniową tej postaci nazywamy jednomianem pierwszego stopnia.

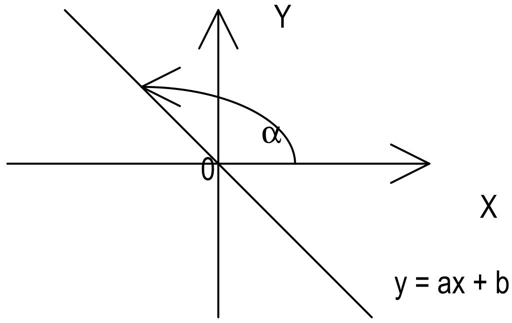
TWIERDZENIE

Wykresem każdej funkcji postaci f (x) = ax jest prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych i odwrotnie - każda prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych (różna od OY) jest wykresem pewnej funkcji postaci f (x) = ax.

DEFINICJA

Kątem nachylenia prostej do osi OX nazywamy kąt skierowany dodatni między osią OX i daną prostą.



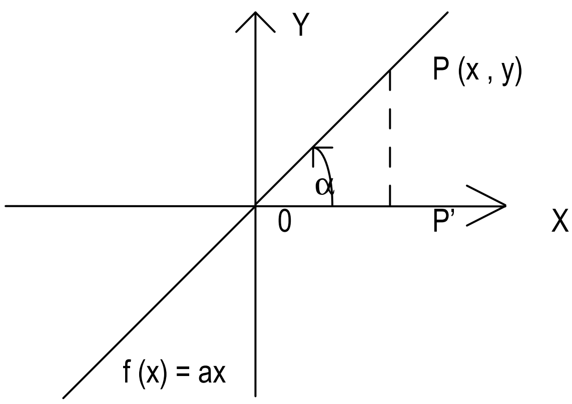


TWIERDZENIE

Prosta będąca wykresem funkcji f(x) = ax jest nachylona do osi OX pod kątem , którego tangens jest równy spółczynnikowi a.

a = tg α

<u>DOWÓD</u>



Niech punkt P (x , y) będzie dowolnym punktem wykresu funkcji f (x) = ax. Punkt P ma współrzędne x , ax.
Z określenia funkcji trygonometrycznych kąta skierowanego mamy :

tg $\alpha = \frac{y}{x} = \frac{ax}{x} = a$

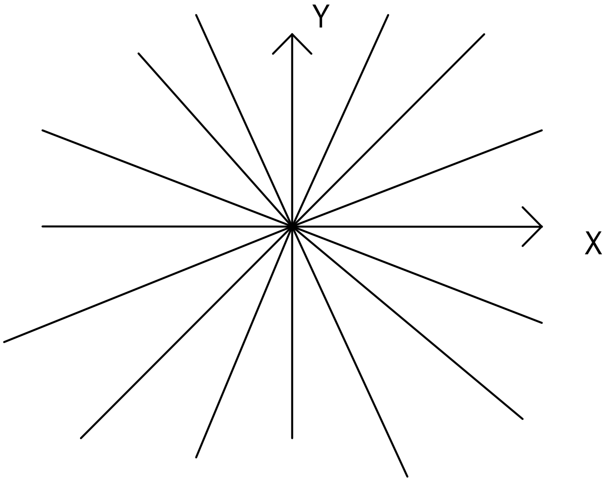
tg α = a c. n. d.

WNIOSEK

1.
A.
Jeśli a > 0, to funkcja f (x) = ax jest rosnąca, a kąt nachylenia α jest ostry.
B.
Jeśli a < 0, to funkcja f (x) = ax jest malejąca, a kąt α jest rozwarty.
C.
Jeśli a = 0, to funkcja f (x) = ax jest stała (jej wykres pokrywa się z osią OX) i kąt nachylenia jest równy 0°.

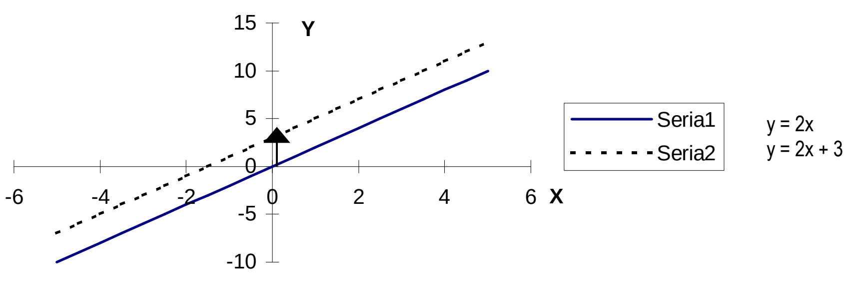
2.
f (x) = ax

Geometrycznie współczynnik a odpowiada obrotowi prostej wokół początku układu współrzędnych.



II. Funkcja postaci f(x) = ax + b

Niech dane będą funkcje f (x) = 2x , g (x) = 2x + 3 .



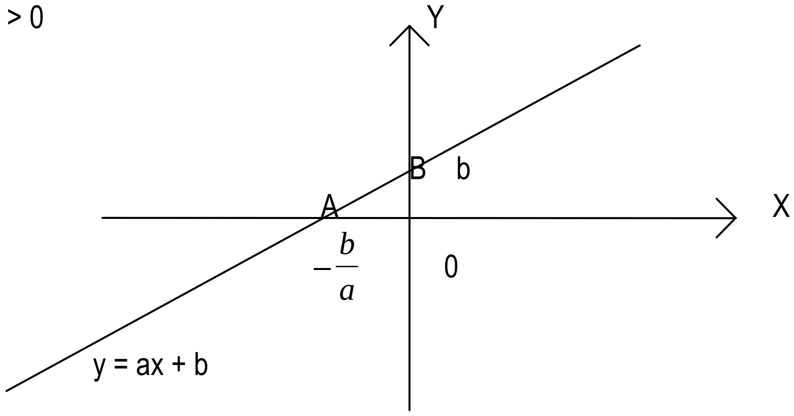
Zauważmy , że wykres funkcji g możemy otrzymać z wykresu funkcji f , przesuwając go o wektor $\vec{u} = [0,3]$.

Ogólnie :

Wykres funkcji f (x) = ax + b powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji f (x) = ax o wektor $\vec{u}$ = $[0,b]$.

III. Własności funkcji liniowej

A. a > 0



1. D = R

2. y = R
   f (D) = R

3. Punkt przecięcia z osiami

OX : x = $-\frac{b}{a}$, y = 0

A ($-\frac{b}{a}$, 0)

OY : x = 0 , y = b

B (0 , b)

4. Funkcja jest rosnąca

<u>DOWÓD</u>

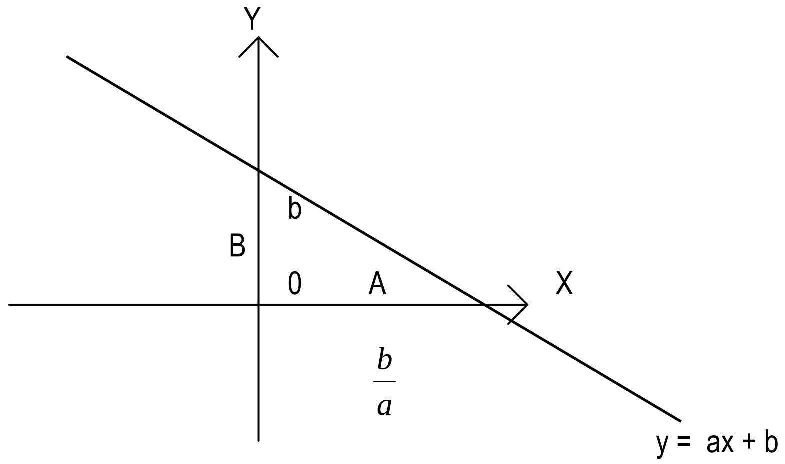
Weźmy $x_1 < x_2$
wtedy $x_1 - x_2 < 0$
Rozważmy różnicę :
$f(x_1) - f(x_2) = (ax_1 + b) - (ax_2 + b) = ax_1 - ax_2 = a(x_1 - x_2) < 0$
$f(x_1) - f(x_2) < 0$
$f(x_1) < f(x_2)$
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ c. n. d.

5. Wartość funkcji :

dla $x \in (-\infty, -\frac{b}{a})$ ujemna

dla $x \in (-\frac{b}{a}, -\infty)$ dodatnia

B. a < 0



1. D = R

2. y = R
   f (D) = R

3. Punkt przecięcia z osiami

OX : $x = \frac{b}{a}$, y = 0

$A\left(\frac{b}{a}, 0\right)$

OY : x = 0 , y = b

B (0 , b)

4. Funkcja jest malejąca

<u>DOWÓD</u>

Weźmy $x_1 < x_2$

wtedy $x_1 - x_2 < 0$

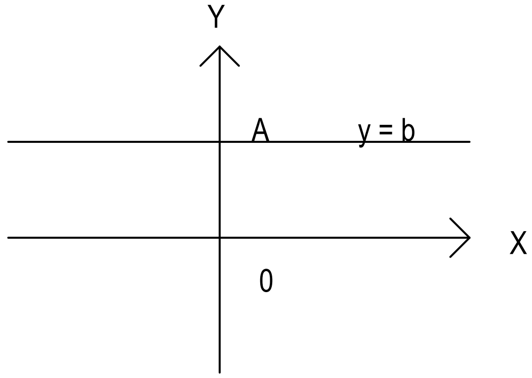
$f(x_1) - f(x_2) = (ax_1 + b) - (ax_2 + b) = ax_1 + b - ax_2 - b = ax_1 - ax_2 = a(x_1 - x_2) > 0$

$f(x_1) - f(x_2) > 0$

$f(x_1) > f(x_2)$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ c. n. d.

C. a = 0



1. D = R

2. $y = b$
$f(D) = b$

3. Punkt przecięcia z osiami
OX : nie istnieje
OY : $x = 0$, $y = b$
$A(0, b)$

4. Funkcja jest stała

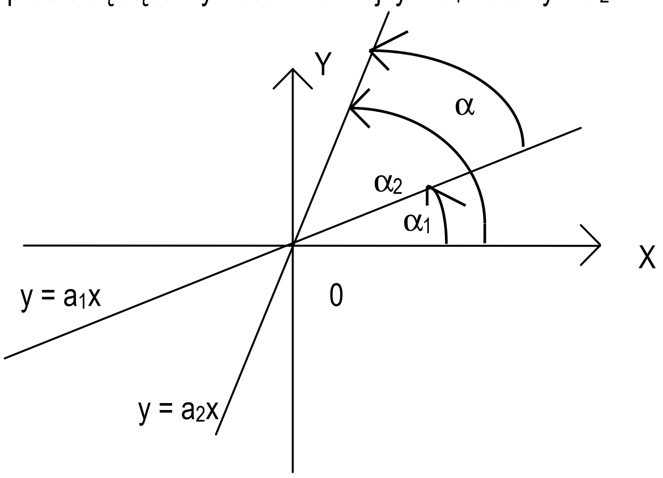
<u>DOWÓD</u>
Weźmy $x_1 \neq x_2$
$f(x_1) - f(x_2) = b - b = 0$
$f(x_1) = f(x_2)$ c. n. d.

5. Wartość funkcji
$b > 0 \Rightarrow x \in R_+$ dodatnia
$b < 0 \Rightarrow x \in R_-$ ujemna

KĄT MIĘDZY PROSTYMI
RÓWNOLEGŁOŚĆ I PROSTOPADŁOŚĆ PROSTYCH

I. Kąt między prostymi

Weźmy dwie proste będące wykresami funkcji $y = a_1x$ oraz $y = a_2x$.



Kąt między prostymi α jest równy różnicy kątów nachylenia jednej i drugiej prostej
$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$
Ponadto
$tg\ \alpha_2 = a_2$
$tg\ \alpha_1 = a_1$
Korzystając z wzorów na tangens różnicy dwóch kątów otrzymamy

$$tg\ \alpha = tg\ (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{a_2 - a_1}{1 + a_1 \cdot a_2}$$

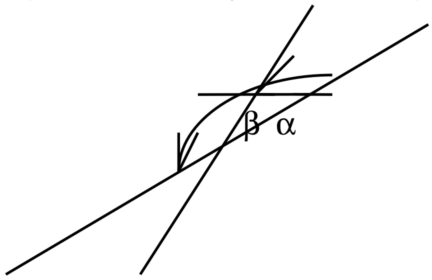
$$tg\ \alpha = \frac{a_2 - a_1}{1 + a_1 \cdot a_2}$$

Kąt nachylenia prostej do osi OX zależy tylko od współczynnika a , nie zależy zaś od wyrazu wolnego b . Wnioskujemy stąd prawdziwość powyższego wzoru również dla prostych postaci y = ax + b .

UWAGA !

Umawiamy się , że kąt przecięcia prostych jest kątem ostrym . Tangens kąta ostrego (α) i jego kąta dopełniającego do 180° (β) różnią się znakiem . Dlatego we wzorze będziemy używać wartości bezwzględnej.

$$\text{tg}\,\alpha = \left|\frac{a_2 - a_1}{1 + a_1 \cdot a_2}\right|$$



PRZYKŁAD

Wyznaczyć kąt między prostymi : y = $\sqrt{3}$x i y = $\frac{\sqrt{3}}{3}$x .

$a_1 = \sqrt{3}$

$a_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

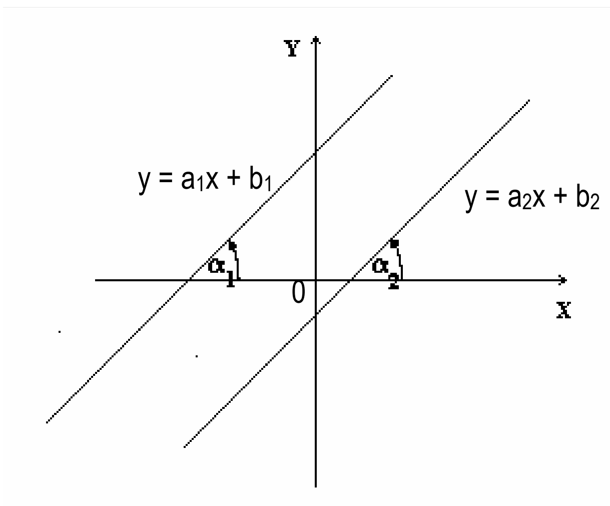
$$\text{tg}\,\alpha = \left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}\right| = \left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3}}{1+1}\right| = \left|\frac{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2}\right| = \left|-\frac{2\sqrt{3}}{6}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30°$$

Odp.: Szukany kąt wynosi α = 30° .

II. Równoległość prostych

Niech dane będą dwie proste będące wykresami funkcji $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$



Aby proste były równoległe , kąt przecięcia między nimi musi wynosić α = 0° .

Zatem :

tg α = tg 0° = 0

to :

$\left|\frac{a_2 - a_1}{1 + a_1 \cdot a_2}\right| = 0$

$a_2 = a_1$

WNIOSEK

Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy gdy $a_1 = a_2$.

PRZYKŁAD

Wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkt A (1 , 2) i równoległej do prostej $y = -3x + 5$.

Szukamy prostej $y = ax + b$ równoległej do prostej $y = -3x + 5$ i przechodzącej przez punkt A (1 , 2).
Z warunku równoległości prostych wynika , że współczynnik a szukanej prostej musi się równać –3.
Szukana prosta ma postać $y = -3x + b$
Ponieważ punkt A ma należeć do tej prostej , to musi spełniać jej równanie .

$2 = -3 \cdot 1 + b$

$b = 2 + 3$

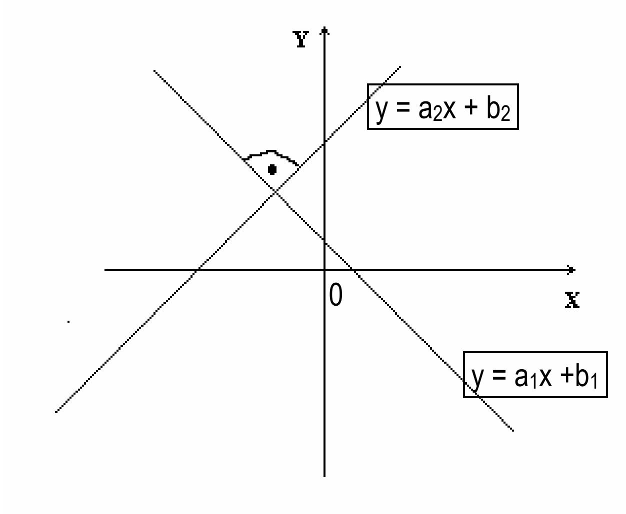
$b = 5$

$y = -3x + 5$

Odp.: Równanie prostej ma postać $y = -3x + 5$.

III. Prostopadłość prostych

Niech będą dane dwie proste prostopadłe $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$.



Proste te przecinają się pod kątem α równym 90°.

$\alpha = 90°$

Przeanalizujmy wzór $\operatorname{tg} \alpha = \left|\frac{a_2 - a_1}{1 + a_1 \cdot a_2}\right|$.

Ponieważ tg 90° nie istnieje , zatem i wyrażenie $\left|\frac{a_2 - a_1}{1 + a_1 \cdot a_2}\right|$ musi być nieokreślone .

Zachodzi to wtedy , gdy mianownik tego wyrażenia jest równy 0 .

Stąd :

$1 + a_1 \cdot a_2 = 0$

$-1 = a_1 \cdot a_2$

$a_2 = \frac{-1}{a_1}$

WNIOSEK

Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy , gdy iloczyn $a_1 \cdot a_2 = -1$.

PRZYKŁAD

Wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkt A (1 , 2) i prostopadłej do prostej $y = -3x + 5$.

Szukamy prostej $y = ax + b$ prostopadłej do prostej $y = -3x + b$ i przechodzącej przez punkt A (1 , 2).
Z warunku prostopadłości prostych wynika , że współczynnik a szukanej prostej wynosić musi :

$a = \frac{-1}{-3}$

$a = \frac{1}{3}$

Szukana prosta ma postać $y = \frac{1}{3}x + b$.

Ponieważ punkt A ma należeć do prostej , to musi spełniać jej równanie

$2 = \frac{1}{3} + b$

$b = \frac{5}{3}$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

Odp.: Równanie prostej ma postać $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

PROSTA NA PŁASZCZYŹNIE

I. Równanie prostej

1. Równanie ogólne prostej

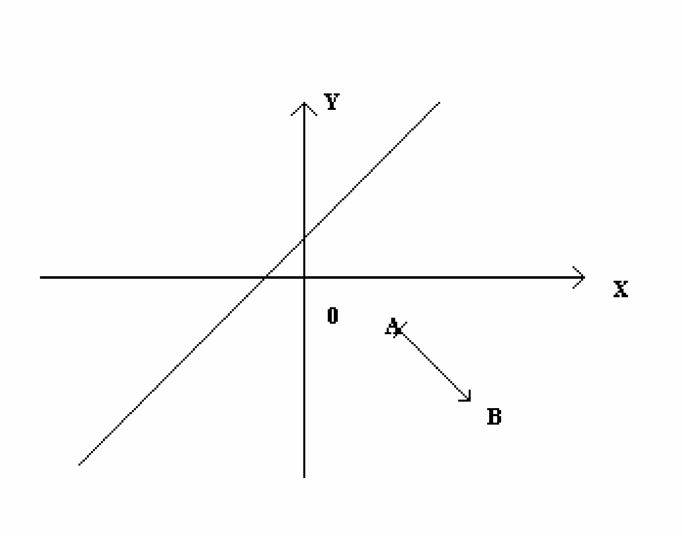
Prosta przechodząca przez ustalony punkt $P (x_1 , y_1)$ i prostopadła do danego wektora $\vec{u} = [A, B]$ (wektor normalny prostej) ma postać :

$A (x - x_1) + B (y - y_1) = 0$

$Ax - Ax_1 + By - By_1 = 0$

$Ax + By - Ax_1 - By_1 = 0$

$$\mathbf{Ax + By + C = 0}$$

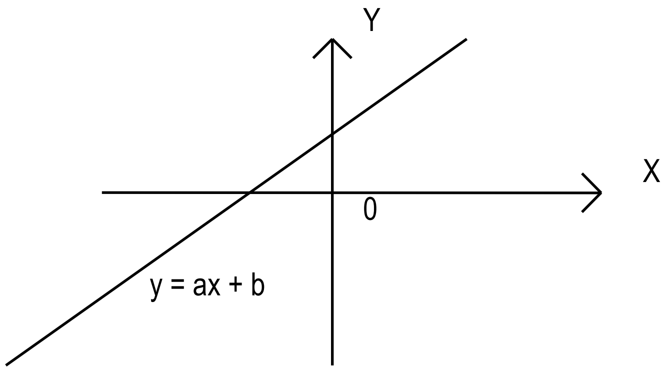


2. Postać kierunkowa prostej

Ax + By + C = 0
Jeśli B $\neq$ 0, to :
By = –Ax – C / : B
y = $-\frac{A}{B}$x – $\frac{C}{B}$

y = ax + b

gdzie a = tg α : współczynnik kierunkowy prostej



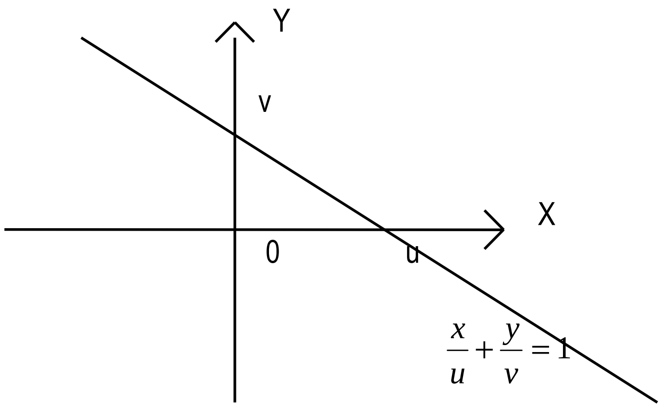
3. Postać odcinkowa prostej

Ax + By + C = 0
Jeśli C $\neq$ 0, to :
Ax + By = –C / : (–C)

$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1$

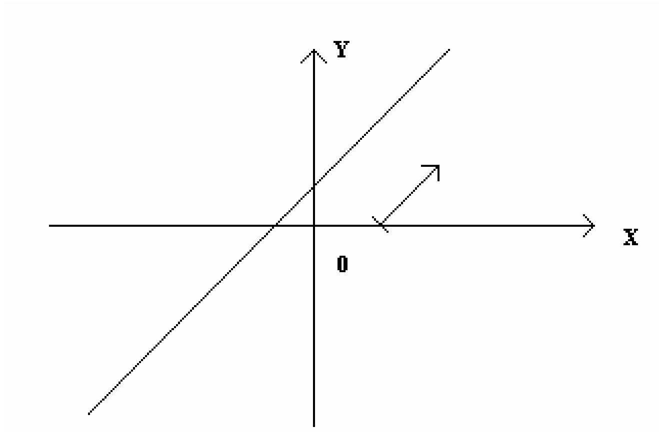
$\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1$$



4. Prostą przechodzącą przez ustalony punkt P (x_1 , y_1) i równoległą do danego wektora $\vec{s}$ = $[p,q]$ można zapisać w tzw. postaci parametrycznej :

$$\begin{cases} x = x_1 + pt \\ y = y_1 + qt \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in R$$



PRZYKŁAD

Przedstaw w pozostałych postaciach : 4x – 8y – 12 = 0 .

a) postać kierunkowa :

–8y = –4x + 12 / : (–8)

y = $\frac{1}{2}$x $-$ $\frac{3}{2}$

b) postać odcinkowa :

4x – 8y = 12 / : 12

$\frac{4x}{12} - \frac{8y}{12}$ = 1

$\frac{x}{3} - \frac{y}{\frac{3}{2}}$ = 1

c) postać parametryczna :

P (1, –1)

$\vec{u} = [4,-8]$

$\vec{s} = [8,4]$

$$\begin{cases} x = 1 + 8t \\ y = -1 + 4t \end{cases}$$

II. Równanie prostej o danym współczynniku kierunkowym a i przechodzącej przez punkt P (x_1 , y_1)

Ponieważ punkt P ma należeć do prostej y = ax + b , to musi spełniać jej równanie :
$y_1 = ax_1 + b \Rightarrow b = y_1 - ax_1$
Podstawiając za b otrzymamy :
$y = ax + y_1 - ax_1$
$y = a (x - x_1) + y_1$

$$\mathbf{y - y_1 = a (x - x_1)}$$

PRZYKŁAD

Napisać równanie prostej wiedząc , że przechodzi ona przez punkt A (1 , 2) , a jej współczynnik kierunkowy a = 3 .

a = 3
$x_1 = 1$
$y_1 = 2$
Podstawiając dane do wzoru :
y – 2 = 3 (x – 1)
y – 2 = 3x – 3
y = 3x – 1

Odp.: Szukana prosta ma postać y = 3x – 1 .

III. Równanie prostej przez dwa punkty

Niech dane będą punkty A (x_1 , y_1) i B (x_2 , y_2) należące do prostej y = ax + b . Oba muszą spełniać jej równanie :

$$\begin{cases} y_2 = ax_2 + b \\ y_1 = ax_1 + b \end{cases}$$

$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1$
$y_2 - y_1 = a (x_2 - x_1)$
$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Podstawiając do II. otrzymamy :
$y - y_1 = a (x - x_1)$

$$\mathbf{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)}$$

PRZYKŁAD

Napisać równanie prostej wyznaczonej przez punkty A (4 , 6) i B (0 , –1) .

$x_1 = 4$
$y_1 = 6$
$x_2 = 0$
$y_2 = -1$
Podstawiając dane do wzoru :

$y - 6 = \frac{-1-6}{0-4}\ (x - 4)$

$y - 6 = \frac{7}{4}(x - 4)$

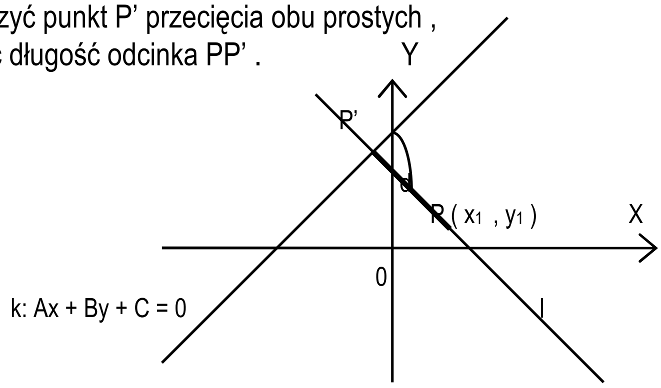
$y - 6 = \frac{7}{4}x - 7$

$y = \frac{7}{4}x - 1$

Odp.: Szukana prosta ma postać $y = \frac{7}{4}x - 1$.

IV. Odległość punktu od prostej

Aby obliczyć odległość punktu P od prostej należy :
1. napisać równanie prostej k prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt P' ,
2. wyznaczyć punkt P' przecięcia obu prostych ,
3. obliczyć długość odcinka PP' .



W praktyce lepiej posługiwać się wzorem :

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

PRZYKŁAD

Wyznaczyć odległość punktu P (1 , 2) od prostej y = 3x + 1 .

$y = 3x + 1$
$-3x + y - 1 = 0$
$A = -3$
$B = 1$
$C = -1$
$x_1 = 1$
$y_1 = 2$
Podstawiając do wzoru :

$$d = \left| \frac{-3\cdot 1 + 1\cdot 2 - 1}{\sqrt{9+1}} \right| = \left| \frac{-2}{\sqrt{10}} \right| = \left| \frac{-2\sqrt{10}}{10} \right| = \left| \frac{-\sqrt{10}}{5} \right| = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

Odp.: Szukana odległość wynosi $d = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

<u>ZADANIE 1</u>

Dane są wierzchołki trójkąta : A (1 , 2) , B (3 , 0) , C (–1 , –4) . Znajdź równania jego boków .

Korzystamy ze wzoru $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

Prosta przechodząca przez punkty

a) A i B

$$y-2=\frac{0-2}{3-1}(x-1)$$
$$y-2=-x+1$$
$$x+y-3=0$$

b) B i C

$$y-0=\frac{-4-0}{-1-3}(x-3)$$
$$y=x-3$$
$$x-y-3=0$$

c) A i C

$$y-2=\frac{-4-2}{-1-1}(x-1)$$
$$y-2=3x-3$$
$$3x-y-1=0$$

Odp.: Równania boków trójkąta mają postać : x + y – 3 = 0 , x – y – 3 = 0 , 3x – y – 1 = 0 .

ZADANIE 2

Obliczyć pole trójkąta ograniczonego prostą 3x – 4y – 12 = 0 i osiami układu współrzędnych .

Równanie danej prostej sprowadzamy do postaci odcinkowej

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1$$

Szukany trójkąt jest trójkątem prostokątnym , więc jego pole S = $\frac{1}{2}|ab|$, gdzie a = 4 i b = –3 .

S = $\frac{1}{2}|4\cdot(-3)| = \frac{1}{2}|-12| = \frac{1}{2}\cdot 12 = 6$

S = 6 j^2

Odp.: Pole trójkąta wynosi 6 j^2 .

ZADANIE 3

Obliczyć odległość prostej 3x – 2y + 5 = 0 od prostej 4y – 6x +19 = 0 .

Obieramy na prostej 3x – 2y + 5 = 0 punkt P (1 , 4) i wyznaczamy jego odległość od prostej 6x – 4y – 19 = 0 korzystając ze wzoru $d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$.

$$d=\left|\frac{6\cdot 1-4\cdot 4-19}{\sqrt{36+16}}\right|=\frac{29}{2\sqrt{13}}=\frac{29\sqrt{13}}{26}$$

Odp.: Odległość między prostymi wynosi $d=\frac{29\sqrt{13}}{26}$.

ZADANIE 4

Obliczyć pole trójkąta ograniczonego prostymi y = x + 1 i y = –2x + 10 oraz osią OX .

ZADANIE 5

Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt A (1 , –2) i równo oddalonej od punktów B (1 , 3) i C (–1 , 2) .

ZADANIE 6

Znaleźć równania prostych równoległych do prostej 2x – y + 1 = 0 oraz odległych od niej o $2\sqrt{5}$.

ZADANIE 7

Obliczyć długości wszystkich wysokości trójkąta o wierzchołkach A (2 , 1) , B (0 , 3) , C (–2 , 2) .

ZADANIE 8

Znaleźć punkt jednakowo odległy od prostej x + y + 1 = 0 i od punktów A (1 , 1) , B (2 , 1) .

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI LINIOWE

I.

DEFINICJA

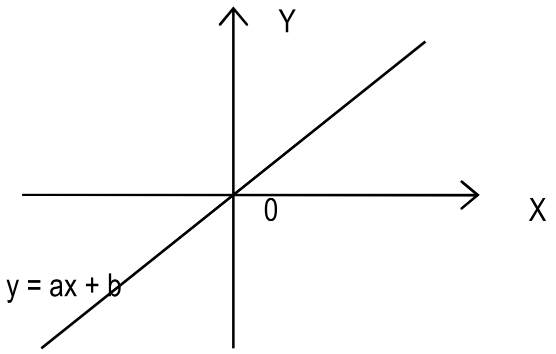
Równaniem liniowym (równaniem pierwszego stopnia) nazywamy równanie postaci :
ax + b = 0

Jeśli znak „=” zastąpimy jednym ze znaków : „ $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ ” , to otrzymamy nierówność liniową.

Geometrycznie rozwiązaniem równania jest punkt przecięcia prostej y = ax + b z prostą y = 0 , a więc miejsce zerowe funkcji y = ax + b .

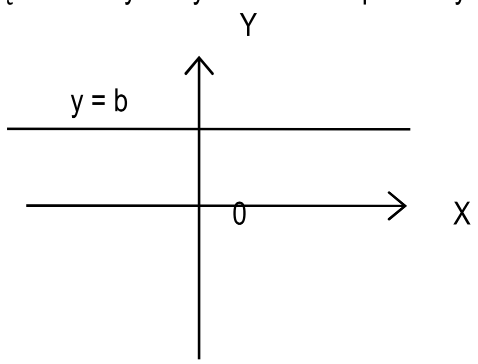
Istnienie i liczba rozwiązań równania liniowego ax + b = 0 .

1. Jeżeli a $\neq$ 0 , to równanie ma jedno rozwiązanie postaci x = $-\dfrac{b}{a}$.



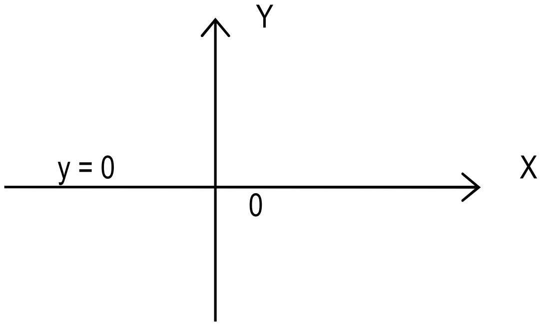
2. Jeżeli a = 0 i b $\neq$ 0 , to mamy :
0·x = –b
równanie nie ma rozwiązania .

Równanie które nie ma rozwiązania nazywamy równaniem sprzecznym .



3. Jeżeli a = 0 i b = 0 , to mamy :
$0 \cdot x = 0$
równanie spełnia każda liczba rzeczywista .

Równanie które spełnia każda liczba rzeczywista nazywamy tożsamościowym .



II. Równania liniowe z parametrem

PRZYKŁAD

$2x - 3 = 7$
$2x = 7 + 3$
$2x = 10$
$x = 5$

Zauważmy, że kiedy podstawimy do równania w miejsce liczby wielkość literową, jego rozwiązanie nie zmieni się.
$2x + a = 7$
$2x = 7 - a$
$x = \frac{7-a}{2}$

Wielkość taką nazywamy parametrem.

DEFINICJA
Parametrem nazywamy wielkość literową (literę), która w danym zadaniu zastępuje liczbę.

Uwaga !
Parametry oznaczamy pierwszymi liczbami alfabetu, natomiast zmienne ostatnimi.

III. Równania i nierówności z dwiema niewiadomymi

1. Wiadomości ogólne

Równanie (nierówność) w którym występują dwie niewiadome nazywamy równaniem (nierównością) z dwiema niewiadomymi.
Np.
a) $|x| + |y| = 0$

b) $(x - y)^2 - (x^2 - 2xy + y^2) = 0$

Każda para (x , y) spełniająca dane równanie (nierówność) jest jej rozwiązaniem.
Np.
a) $|x| + |y| = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego równania jest tylko jedna para liczb.

b) $(x - y)^2 - (x^2 - 2xy + y^2) = 0$
$(x - y)^2 - (x - y)^2 = 0$
$0 = 0$
Równanie to spełniają wszystkie pary liczb.

Wykresem równania (nierówności) z dwiema niewiadomymi nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają dane równanie (nierówność).
Np.
a) Wykresem równania $|x| + |y| = 0$ jest jeden punkt A (0 , 0).

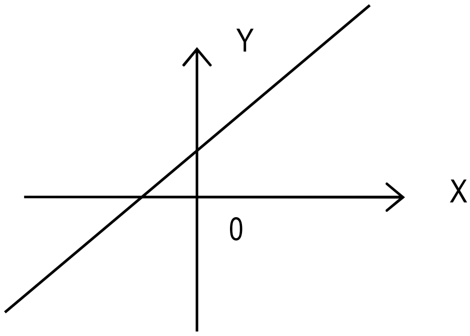
b) Wykresem równania $(x - y)^2 - (x^2 - 2xy + y^2) = 0$ jest cała płaszczyzna.

2. Równania i nierówności liniowe z dwiema niewiadomymi

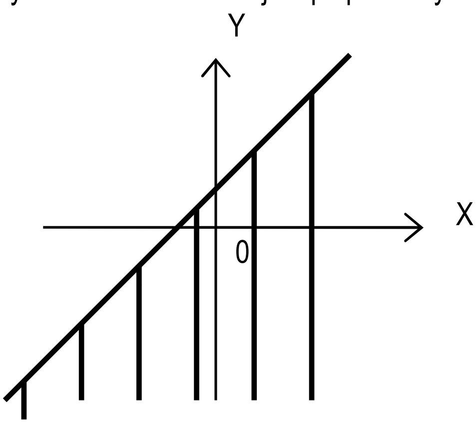
DEFINICJA
Równanie stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi ma postać $Ax + By + C = 0$.

Jeśli znak „=” zastąpimy jednym ze znaków : „ $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ ” , to otrzymamy nierówność stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi.

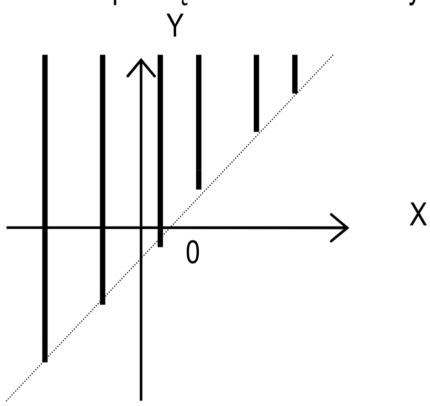
Wykresem takiego równania jest prosta



Wykresem nierówności jest półpłaszczyzna ograniczona prostą o równaniu $Ax + By + C = 0$.



$Ax + By + C \leq 0$



$Ax + By + C > 0$

PRZYKŁAD
Rozwiąż równanie
$3(x + 1) - 2(x - 2) = 6x - 4(2x + 5)$

3x + 3 – 2x + 4 = 6x – 8x – 20
3x = –27
x = –9

Odp.: rozwiązaniem równania jest x = –9 .

<u>ZADANIE 1</u>
Przedyskutuj istnienie i liczbę rozwiązań równania 2(x + a) = ax + 2a – 1 .

2x + 2a = ax + 2a – 1
2x – ax = –1
x (a – 2) = 1

a) jedno rozwiązanie

a – 2 $\neq$ 0
a $\neq$ 2

b) brak rozwiązań

a – 2 = 0
a = 0

c) nieskończenie wiele rozwiązań

$$\begin{cases} a-2=0 \\ 1=0 \end{cases}$$

ten przypadek nie zachodzi

Odp.: Dla parametru a $\neq$ 2 równanie ma jedno rozwiązanie .
Dla parametru a = 2 równanie nie ma rozwiązania .

<u>ZADANIE 2</u>
Rozwiąż :

$$\begin{cases} x\langle 1 \\ -x+3-x+1=5 \end{cases} \vee \begin{cases} 1\le x\langle 3 \\ -x+3+x-1=5 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 3 \\ x-3+x-1=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\langle 1 \\ 2x=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} 1\le x\langle 3 \\ 2=5 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 3 \\ 2x=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\langle 1 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{brak rozwiązań} \qquad \begin{cases} x\ge 3 \\ x=\frac{9}{2} \end{cases}$$

x = $-\frac{1}{2}$ $\vee$ x = $\frac{9}{2}$

Odp.: Rozwiązaniem równania są x = $-\frac{1}{2}$ lub x = $\frac{9}{2}$.

<u>ZADANIE 3</u>
Znajdź liczby spełniające nierówność i należące do podanego zbioru :

$\frac{5-4x}{3}+x\rangle-2x+\frac{1}{4}$, x ∈ R_+

$\frac{5-4x}{3}+x\rangle-2x+\frac{1}{4}$ / · 12

20 – 16x +12x > –24x + 3

20x > –17

x > $-\frac{17}{20}$

$\begin{cases} x\rangle-\frac{17}{20} \\ x \in R_+ \end{cases}$

x ∈ (0 , ∞)

Odp.: Rozwiązaniem nierówności są x ∈ (0 , ∞) .

ZADANIE 4

W ciągu ilu dni wykona pewną pracę trzech robotników pracujących równocześnie , jeśli wiadomo , że pracując samodzielnie pierwszy wykonałby ją przez 15 dni , drugi przez 12 dni , a trzeci przez 10 dni .

ZADANIE 5

Rozwiąż :

$|x-2| \le -|x|+2$

ZADANIE 6

Dla jakiego parametru a rozwiązaniem równania $|x-1|$ + 3x = a jest liczba 2 ?

ZADANIE 7

Rozwiąż graficznie :

y > $||x+2|-1|$

ZADANIE 8

W dwóch stopach miedzi i cynku stosunki wagowe tych metali wynoszą odpowiednio 4 : 1 i 1 : 3 . Po stopieniu 10 kg pierwszego stopu , 16 kg drugiego i pewnej ilości czystej miedzi otrzymano stop , w którym miedź i cynk pozostają w relacji 3 : 2 . Oblicz ciężar nowego stopu .

UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

Układ $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ nazywamy układem równań liniowych.

Rozwiązaniem układu jest każda para liczb (x , y), spełniająca każde z równań układu. Przy rozwiązywaniu układów równań korzystamy z twierdzeń o równaniach (układach) równoważnych.

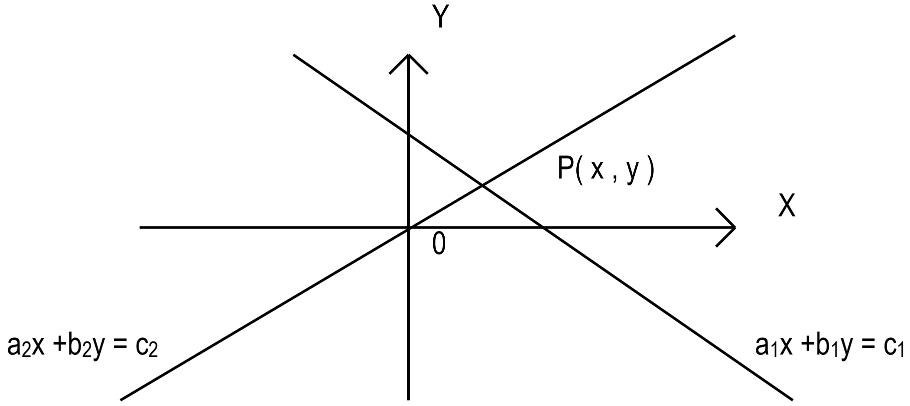
Metody rozwiązywania układów równań

I. Metoda graficzna

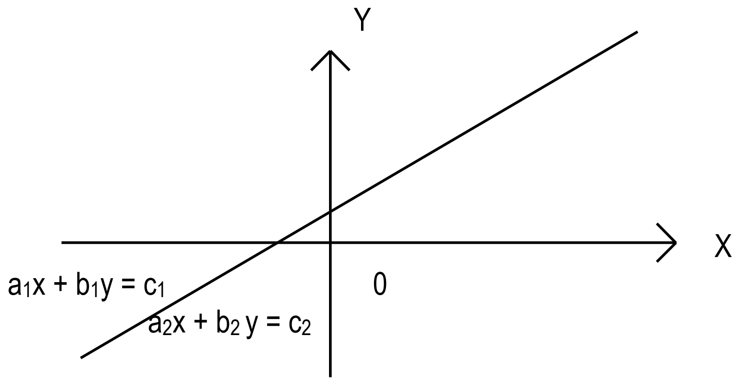
Każde z równań układu $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ przedstawia prostą. Metoda ta polega na wykreśleniu obu prostych i wyznaczeniu punktu ich przecięcia, który jest szukanym rozwiązaniem.

UWAGA !

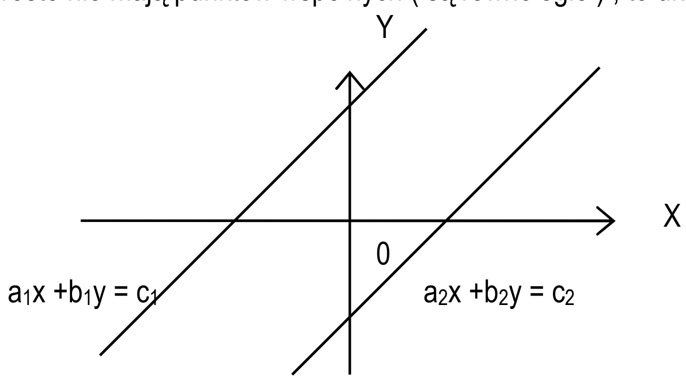
Jeśli proste przecinają się , to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie .



Jeśli proste pokrywają się , to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań .



Jeśli proste nie mają punktów wspólnych (są równoległe) , to układ nie ma rozwiązań .



II. Metoda podstawiania

Rozwiąż :

$$\begin{cases} 2x + 1 - y = 0 \\ x + 3 + 2y = 7x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ x + 3 + 2(2x + 1) = 7x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ x + 3 + 4x + 2 = 7x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 2x = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \cdot \frac{5}{2} + 1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = 6 \end{cases}$$

III. Metoda przeciwnych współczynników

Rozwiąż :

$$\begin{cases} 2x - 5y = -19 \ / \cdot 5 \\ -5x + 3y = 19 \ / \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x - 25y = -95 \\ -10x + 6y = 38 \end{cases} \quad / +$$

$$\begin{cases} -19y = -57 \\ 2x = 5y - 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ 2x = 5 \cdot 3 - 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ 2x = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

IV. Metoda wyznacznikowa

Niech dany będzie układ równań liniowych $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \ / \cdot b_2 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \ / \cdot (-b_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \ / \cdot (-a_2) \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \ / \cdot a_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2 \\ -a_2 b_1 x - b_1 b_2 y = -c_2 b_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -a_1 a_2 x - a_2 b_1 y = -c_1 a_2 \\ a_1 a_2 x + a_1 b_2 y = c_2 a_1 \end{cases}$$

$a_1b_2x – a_2b_1x = c_1b_2 – c_2b_1$ $\qquad$ $a_1b_2y – a_2b_1y = c_2a_1 – c_1a_2$

$x (a_1b_2 – a_2b_1) = c_1b_2 – c_2b_1$ $\qquad$ $y (a_1b_2 – a_2b_1) = c_2a_1 – c_1a_2$

DEFINICJA

Wyrażenie $a_1b_2 – a_2b_1$ nazywamy wyznacznikiem układu i zapisujemy w postaci :

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Wyrażenie $c_1b_2 – c_2b_1$ nazywamy wyznacznikiem ze względu na x i zapisujemy :

$$W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

Wyrażenie $c_2a_1 – c_1a_2$ nazywamy wyznacznikiem ze względu na y i zapisujemy :

$W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = c_2a_1 - c_1a_2$

$(a_1b_2 - a_2b_1)\,x = c_1b_2 - c_2b_1$ $\qquad$ $(a_1b_2 - a_2b_1)\,y = c_2a_1 - c_1a_2$

$W \cdot x = W_x$ $\qquad$ $W \cdot y = W_y$

1. Jeżeli $W \neq 0$, to układ ma jedno rozwiązanie postaci $\begin{cases} x = \dfrac{W_x}{W} \\ y = \dfrac{W_y}{W} \end{cases}$ i nazywa się układem oznaczonym , czyli układem równań niezależnych .

2. Jeżeli $W = W_x = W_y = 0$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań i nazywa się układem nieoznaczonym lub układem równań niezależnych .

3. Jeżeli $(W = 0 \wedge W_x \neq 0) \vee (W = 0 \wedge W_y \neq 0)$, to układ nie ma rozwiązania i nazywa się układem sprzecznym .

PRZYKŁAD

Oblicz metodą wyznacznikową :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ -4x + 3y = -2 \end{cases}$$

$W = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-4) = 9 + 8 = 17$

$W_x = \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 9 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) = 27 + 4 = 31$

$W_y = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 9 \cdot (-4) = -6 + 36 = 30$

$$\begin{cases} x = \dfrac{31}{17} \\ y = \dfrac{30}{17} \end{cases}$$

Odp.: Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $\left(\dfrac{31}{17}, \dfrac{30}{17}\right)$

ZADANIE 1

Przeprowadź dyskusję istnienia i podaj liczbę rozwiązań układu $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + my = 2m \end{cases}$ w zależności od parametru m .

$W = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & m \end{vmatrix} = 2m - 12$

$W_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2m & m \end{vmatrix} = 4m - 6m = -2m$

$W_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2m \end{vmatrix} = 4m - 16$

a) jedno rozwiązanie

$W \neq 0$
$2m - 12 \neq 0$
$2m \neq 12$
$m \neq 6$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-2m}{2m-12} \\ y = \dfrac{4m-16}{2m-12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-m}{m-6} \\ y = \dfrac{2m-8}{m-6} \end{cases}$$

b) brak rozwiązań

$(W = 0 \wedge W_x \neq 0) \vee (W = 0 \wedge W_y \neq 0)$

$$\begin{cases} 2m-12=0 \\ -2m \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2m-12=0 \\ 4m-16 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=6 \\ m \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m=6 \\ m \neq 4 \end{cases}$$

$m = 6$

c) nieskończenie wiele rozwiązań

$$\begin{cases} W = 0 \\ W_x = 0 \\ W_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2m-12=0 \\ -2m=0 \\ 4m-16=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=6 \\ m=0 \\ m=4 \end{cases}$$

układ jest sprzeczny , więc przypadek ten nie zachodzi

Odp.: Dla $m \neq 6$ układ ma jedno rozwiązanie postaci $\begin{cases} x = \dfrac{-m}{m-6} \\ y = \dfrac{2m-8}{m-6} \end{cases}$.

Dla m = 6 układ nie ma rozwiązania .

ZADANIE 2

Rozwiąż :

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y = 1 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ y \langle 0 \\ x - y = 1 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \langle 0 \\ y \geq 0 \\ -x + y = 1 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \langle 0 \\ y \langle 0 \\ -x - y = 1 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3y = 3 \\ x = 1 - y \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ y \langle 0 \\ y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \langle 0 \\ y \geq 0 \\ -y = -1 \\ x = y - 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \langle 0 \\ y \langle 0 \\ -3y = -1 \\ x = -y - 1 \end{cases}$$

brak rozwiązań

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \langle 0 \\ y \geq 0 \\ y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \langle 0 \\ y \langle 0 \\ y = \frac{1}{3} \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

brak rozwiązań brak rozwiązań

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Odp.: Rozwiązaniem układu równań jest para liczb (0 , 1) .

ZADANIE 3

Suma cyfr liczby dwucyfrowej wynosi 13 . Gdy zmienimy porządek cyfr , otrzymamy nową liczbę , która jest o 27 większa od poprzedniej . Jaka to liczba ?

x --- cyfra dziesiątek
y --- cyfra jedności

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ 10y + x + 27 = 10x + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 13 - y \\ -9(13 - y) + 9y = -27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 13 - y \\ 18y = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 13 - 5 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 5 \end{cases}$$

85

Odp.: Szukana liczba to 85 .

ZADANIE 4

Rozwiąż :

$$\begin{cases} |x+y| = 1 \\ |x| + |y| = 1 \end{cases}$$

ZADANIE 5

Rozwiąż układ równań :

$$\begin{cases} mx + (2m-1)y = 3m \\ x + my = m \end{cases}$$

Dla jakich wartości parametru m punkt przecięcia się prostych danych równaniami układu należy do prostej o równaniu x + 2y – 3 = 0 ?

ZADANIE 6

Dla jakich wartości parametru a rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} x + y = m \\ 3x - 2y = 2m - 1 \end{cases}$$

są takie x , y , że :

$|x| + |y| \leq 1$?

ZADANIE 7

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = m + 4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2m + 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 - 2m \end{cases}$.

Dla jakich wartości parametru m liczby x_1 , x_2 , x_3 , będące rozwiązaniem układu , tworzą ciąg geometryczny ?

ZADANIE 8

Suma dwóch liczb , różniących się o 2 co do bezwzględnej wartości , jest o 26 mniejsza od sumy kwadratów tych liczb . Jakie to liczby ?