FUNKCJE WYMIERNE

Temat 1 : Pojęcie funkcji wymiernej

Niech $W_1(x)$ i $W_2(x) \not\equiv 0$ będą wielomianami.
Niech A będzie zbiorem pierwiastków wielomianu $W_2(x)$ i D=R/A.

Def.

Funkcję F:D→R daną wzorem $F(x)=\frac{W_1(x)}{W_2(x)}$ nazywamy funkcją wymierną.

Przykład:

$F(x)=\frac{x^2+5x-1}{x^2+2}$ D=R

$F(x)=\frac{2x^{2222}-x^{222}}{x^2-1}$ D=R/{-1,1}

Uwaga:

1) Każdy wielomian jest funkcją wymierną:

   $F(x)=\frac{W(x)}{1}=W(x)$

2) Funkcje $F_1(x)=\frac{x^2}{x}$ i $F_2(x)=x$ <u>nie są równe</u> bo mają różne dziedziny.

   $F_1(x)=\frac{x^2}{x}$ D=R/{0}

   $F_2(x)=x$ D=R

3) Analogicznie określa się funkcję wymierną wielu zmiennych, np.:

   $F(x,y)=\frac{x^2+y-xy}{x-y}$ $x\neq y$

Zadanie 1.

Wyznacz dziedzinę funkcji

1) $F(x)=\frac{x^{99}-x^9+1}{x^2-5x+6}$

   D: $x^2-5x+6\neq 0$

   zatem $x\neq 2 \wedge x\neq 3$

   czyli D=R/{2,3}

2) $F(x)=\frac{x}{x^3+x^2+x+1}$

   D: $x^3+x^2+x+1\neq 0$

   $x^2(x+1)+(x+1)\neq 0$

   $(x^2+1)(x+1)\neq 0$

   $x\neq -1$

   D=R/{-1}

Funkcje wymierne (podobnie jak wielomiany) tworzą zbiór, w którym można określić działania +, -, ·, : .

Zadanie 2.

Wyznaczyć sumę, różnicę, iloczyn i iloraz funkcji:

1) $F_1(x)=\frac{x+10}{x^2-25}$ i $F_2(x)=\frac{1}{2x+10}$

$D_1=R/\{-5,5\}$ $D_2=R/\{-5\}$

$F_1(x)+F_2(x)=\frac{x+10}{x^2-25}+\frac{1}{2x+10}=\frac{x+10}{(x-5)(x+5)}+\frac{1}{2(x+5)}=\frac{2(x+10)}{2(x-5)(x+5)}+\frac{(x-5)}{2(x-5)(x+5)}=$

$=\frac{2x+20+x-5}{2(x-5)(x+5)}=\frac{3x+15}{2(x-5)(x+5)}=\frac{3(x+5)}{2(x-5)(x+5)}=\frac{3}{2x-10}$ D=R/{-5,5}

$F_1(x)-F_2(x)=\frac{x+10}{x^2-25}-\frac{1}{2x+10}=\frac{x+10}{(x-5)(x+5)}-\frac{1}{2(x+5)}=\frac{2(x+10)}{2(x-5)(x+5)}-\frac{(x-5)}{2(x-5)(x+5)}=$

$=\frac{2x+20-x+5}{2(x-5)(x+5)}=\frac{x+25}{2(x-5)(x+5)}$ D=R/{-5,5}

$F_1(x)\cdot F_2(x)=\frac{x+10}{x^2-25}\cdot\frac{1}{2x+10}=\frac{x+10}{2(x-5)(x+5)(x+5)}$ D=R/{-5,5}

$F_1(x):F_2(x)=\frac{x+10}{x^2-25}:\frac{1}{2x+10}=\frac{x+10}{(x-5)(x+5)}\cdot\frac{2(x+5)}{1}=\frac{2(x+10)}{x-5}$ D=R/{-5,5}

2) $F_1(x)=\frac{2}{x-7}$ i $F_2(x)=\frac{1}{3x+3}$

$D_1=R/\{7\}$ $D_2=R/\{-1\}$

$F_1(x)+F_2(x)=\frac{2}{x-7}+\frac{1}{3x+3}=\frac{2(3x+3)}{(x-7)(3x+3)}+\frac{x-7}{(x-7)(3x+3)}=\frac{6x+6+x-7}{3(x-7)(x+1)}=\frac{7x-1}{3(x-7)(x+1)}$

D=R/{-1,7}

$F_1(x)-F_2(x)=\frac{2}{x-7}-\frac{1}{3x+3}=\frac{2(3x+3)}{(x-7)(3x+3)}-\frac{x-7}{(x-7)(3x+3)}=\frac{6x+6-x+7}{3(x-7)(x+1)}=\frac{5x+13}{3(x-7)(x+1)}$

D=R/{-1,7}

$F_1(x)\cdot F_2(x)=\frac{2}{x-7}\cdot\frac{1}{3x+3}=\frac{2}{(x-7)(3x+3)}=\frac{2}{3(x-7)(x+1)}$ D=R/{-1,7}

$F_1(x):F_2(x)=\frac{2}{x-7}:\frac{1}{3x+3}=\frac{2}{x-7}\cdot\frac{3x+3}{1}=\frac{6x+6}{x-7}$ D=R/{-1,7}

3) $F_1(x)=\frac{1}{x}$ i $F_2(x)=\frac{z}{x^2-x}$

$D_1=R/\{0\}$ $D_2=R/\{0,1\}$

$F_1(x)+F_2(x)=\frac{1}{x}+\frac{z}{x^2-x}=\frac{x-1}{x(x-1)}+\frac{z}{x(x-1)}=\frac{x+z-1}{x(x-1)}$ D=R/{0,1}

$F_1(x)-F_2(x)=\frac{1}{x}-\frac{z}{x^2-x}=\frac{x-1}{x(x-1)}-\frac{z}{x(x-1)}=\frac{x-z-1}{x(x-1)}$ D=R/{0,1}

$F_1(x)\cdot F_2(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{z}{x^2-x}=\frac{z}{x^2(x-1)}$ D=R/{0,1}

$F_1(x):F_2(x)=\frac{1}{x}:\frac{z}{x^2-x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2-x}{z}=\frac{x-1}{z}$ D=R/{0,1}, z≠0

Zadanie 3.

Doprowadź do najprostszej postaci:

1) $\dfrac{7x^3y^5a+bx^37y^5}{21x^2y^3(a+b)}=\dfrac{7x^3y^5(a+b)}{21x^2y^3(a+b)}=\dfrac{xy^2}{3}$

D: $21x^2y^3(a+b)\neq 0$

$x^2\neq 0 \quad \wedge \quad y\neq 0 \quad \wedge \quad a+b\neq 0$

D={ (x,y) ; x≠0 ∧ y≠0 } , a≠-b

2) $\dfrac{x^2-2xy}{xy-2y^2}=\dfrac{x(x-2y)}{y(x-2y)}=\dfrac{x}{y}$

D: $xy-2y^2\neq 0 \quad \Rightarrow \quad y(x-2y)\neq 0$

y≠0 ∧ x≠2y

D= { (x,y) ; y≠0 ∧ x≠2y }

Zadanie 4.

Wykonaj działania:

1) $\dfrac{2a-c}{4c}-\dfrac{3a^2-2bc}{6ac}-\dfrac{3a}{b}+\dfrac{5a-b}{2b}-\dfrac{4b-a}{8b}=\dfrac{(2a-c)6ab}{24abc}-\dfrac{(3a^2-2bc)4b}{24abc}-\dfrac{72a^2c}{24abc}+\dfrac{(5a-b)12ac}{24abc}-\dfrac{(4b-a)3ac}{24abc}=$

$=\dfrac{12a^2b-6abc-12a^2b+8b^2c-72a^2c+60a^2c-12abc-12abc+3a^2c}{24abc}=\dfrac{8b^2c-9a^2c-30abc}{24abc}=\dfrac{8b^2-9a^2-30ab}{24ab}$

a,b,c ≠ 0

2) $\dfrac{3c-2b}{8bc}+\dfrac{a-4b}{12ab}+\dfrac{5a-c}{6ac}-\dfrac{2c-3b}{3bc}-\dfrac{3}{4a}=\dfrac{(3c-2b)3a}{24abc}+\dfrac{(a-4b)2c}{24abc}+\dfrac{(5a-c)4b}{24abc}-\dfrac{(2c-3b)8a}{24abc}-\dfrac{18bc}{24abc}=$

$=\dfrac{9ac-6ab+2ac-8bc+20ab-4bc-16ac+24ab-18bc}{24abc}=\dfrac{-5ac+38ab-30bc}{24abc}$

a,b,c ≠ 0

3) $(\dfrac{5a}{a+x}+\dfrac{5x}{a-x}+\dfrac{10ax}{a^2-x^2}):(\dfrac{a}{a+x}+\dfrac{x}{a-x}-\dfrac{2ax}{a^2-x^2})=(\dfrac{5a(a-x)}{(a-x)(a+x)}+\dfrac{5x(a+x)}{(a-x)(a+x)}+\dfrac{10ax}{a^2-x^2}):(\dfrac{a(a-x)}{(a-x)(a+x)}+\dfrac{x(a+x)}{(a-x)(a+x)}-\dfrac{2ax}{a^2-x^2}=$

$(\dfrac{5a^2-5ax+5ax+5x^2+10ax}{a^2-x^2})\cdot(\dfrac{a^2-x^2}{a^2-ax+ax+x^2-2ax})=\dfrac{5(a^2+2ax+x^2)}{a^2-2ax+a^2}=\dfrac{5(a+x)^2}{(a-x)^2}$

Zadanie 5. (do samodzielnego rozwiązania)

Doprowadź do najprostszej postaci:

1) $\dfrac{4a-5b}{12}-\dfrac{3a-2b}{18}$

2) $\dfrac{a^2+a-2}{a^{n+1}-3a^n}\left[\dfrac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\dfrac{3}{a^2-a}\right]=$

Zadanie 6. (do samodzielnego rozwiązania)

Wykonaj działania:

1) $\dfrac{3a}{a^3-8}:\dfrac{a^2-4}{4a^2+2a+4}=$

2) $\dfrac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}}+\dfrac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}=$

Temat 2 : Równania wymierne.

Def.

Niech f: D→R będzie funkcją wymierną. Równanie F(x)=0 nazywamy równaniem wymiernym.

Przykład:

$$\frac{x^7+x}{1-x}=0$$

Uwaga

1) Jeśli znak „=” zastąpimy jednym ze znaków: „<” , „>” , „≤” , „≥” to otrzymamy nierówność wymierną.
2) Równania wymierne rozwiązujemy według ustalonego porządku:
   a) wyznaczamy dziedzinę równania;
   b) sprowadzamy do wspólnego mianownika;
   c) rozwiązujemy równanie równoważne;
   d) sprawdzamy, czy rozwiązanie należy do dziedziny;
   e) podajemy odpowiedź.

Zadanie 1.

Rozwiąż równanie:

1) $\frac{2m-3}{m}+\frac{5m-3}{m^2}-\frac{2m^2+m-6}{m^2}=2$

D=R/{0}

$$\frac{2m^2-3m}{m^2}+\frac{5m-3}{m^2}-\frac{2m^2+m-6}{m^2}-\frac{2m^2}{m^2}=0$$

$$\frac{-2m^2+m+3}{m^2}=0$$

$$-2m^2+m+3=0$$

$m_1=-1 \quad \vee \quad m_2=1{,}5$

Odp. Rozwiązaniem równania jest m=-1 lub m=1,5.

2) $\frac{1}{x^3-x^2+x-1}-\frac{4}{x+1}=\frac{x^2+10x}{x^4-1}-\frac{4x^2+21}{x^3+x^2+x+1}$

D: $x^3-x^2+x-1\neq0 \quad\wedge\quad x+1\neq0 \;\wedge\quad x^4-1\neq0 \quad\wedge\quad x^3+x^2+x+1\neq0$

$(x-1)(x^2+1)\neq0 \quad\wedge\quad x\neq-1 \;\wedge\quad (x-1)(x+1)(x^2+1)\neq0 \wedge (x+1)(x^2+1)\neq0$

D=R/{-1,1}

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}-\frac{4}{x+1}=\frac{x^2+10x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}-\frac{4x^2+21}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)(x+1)}-\frac{4(x^2+1)(x-1)}{(x+1)(x^2+1)(x-1)}=\frac{x^2+10x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}-\frac{(4x^2+21)(x-1)}{(x+1)(x^2+1)(x-1)}$$

$$\frac{x+1-4x^3+4x^2-4x+4}{x^4-1}=\frac{x^2+10x-4x^3+4x^2-21x+21}{x^4-1}$$

$$\frac{-x^2+8x-16}{x^4-1}=0$$

$$-x^2+8x-16=0$$

x=4

Odp. Rozwiązaniem równania jest x=4.

3) $\frac{20+x}{2x-2}-\frac{9x^2+x+2}{6x^2-6}=\frac{5-3x}{x+1}-\frac{10-4x}{3x+3}$

D: 2x-2≠0 $\wedge$ 6 x^2-6≠0 $\wedge$ x+1≠0 $\wedge$ 3x+3≠0
x≠1 $\wedge$ x≠1 $\wedge$ x≠-1 $\wedge$ x≠-1 $\wedge$ x≠-1
D=R/{-1,1}

$$\frac{20+x}{2(x-1)}-\frac{9x^2+x+2}{6(x-1)(x+1)}=\frac{5-3x}{x+1}-\frac{10-4x}{3(x+1)}$$

$$\frac{(20+x)(x+1)3-9x^2+x+2}{6(x-1)(x+1)}=\frac{6(x-1)(5-3x)-2(x-1)(10-4x)}{6(x+1)(x-1)}$$

60x+60+3 $x^2+3x-9x^2+x+2=30x-18x^2-30+18x-20x+8x^2+20-8x$

$-6x^2+64x+62=-10x^2+20x-10$

$x^2+11x+18=0$

Stąd $x_1=-9$ $\vee$ $x_2=-2$

Odp. Rozwiązaniem równania są $x_1=-9$ $\vee$ $x_2=-2$.

Zadanie 2 (do samodzielnego rozwiązania)

Rozwiązać równanie:

1) $\frac{12}{1-9x^2}=\frac{1-3x}{1+3x}+\frac{1+3x}{3x-1}$

2) $5+\frac{96}{x^2-16}=\frac{2x-1}{x+4}-\frac{3x-1}{4-x}$

Temat 3 : Równania wymierne z wartością bezwzględną

Zadanie 1.

Rozwiąż równanie:

1) $\frac{|x-1|+x^2}{x+1}=1$

D=R/{-1}

I. x-1≥0

x≥1

$\frac{x-1+x^2}{x+1}=1$

$\frac{x-1+x^2-x-1}{x+1}=0$

$\frac{x^2-2}{x+1}=0$

x^2-2=0

x=$\sqrt{2}$ $\vee$ x=-$\sqrt{2}$

nie spełnia warunku x≥1

II. x-1<0

x<1

$\frac{-x+1+x^2}{x+1}=1$

$\frac{-x+1+x^2-x-1}{x+1}=0$

$\frac{x^2-2x}{x+1}=0$

x^2-2x=0

x=0 $\vee$ x=2

nie spełnia warunku x<1

Odp. Rozwiązaniem równania jest x=$\sqrt{2}$ lub x=0.

2) $\frac{|x+1|-|x-1|}{x}=2$

D=R/{0}

I. x+1≥0 ∧ x-1≥0
x≥-1 ∧ x≥1
x≥1
$$\frac{x+1-x+1}{x}=2$$
$$\frac{2}{x}=2$$
x=1

II. x+1≥0 ∧ x-1<0
x≥-1 ∧ x<1
$$\frac{x+1+x-1}{x}=2$$
$$\frac{2x}{x}=2$$
0=0
równanie tożsamościowe

III. x+1<0 ∧ x-1≥0
x<-1 ∧ x≥1
nie zachodzi

IV. x+1<0 ∧ x-1<0
x<-1 ∧ x<1
x<-1
$$\frac{-x-1+x-1}{x}=2$$
$$\frac{-2}{x}=2$$
x=-1 nie spełnia x<-1

Odp. Równanie jest spełnione dla x∈<-1,1>/{0}.

3) $\left|\frac{|x+1|-2}{x}\right|=\frac{1}{2}$

D=R/{0}

$\frac{\lvert x+1\rvert-2}{x}=\frac{1}{2}$		$\frac{\lvert x+1\rvert-2}{x}=-\frac{1}{2}$	
x+1≥0 **x≥-1** $\frac{x+1-2}{x}=\frac{1}{2}$ **2x-2=x** **x=2**	x+1<0 x<-1 $\frac{-x-1-2}{x}=\frac{1}{2}$ -2x-6=x x=-2	x+1≥0 x≥-1 $\frac{x+1-2}{x}=-\frac{1}{2}$ 2x-2=-x x=$\frac{2}{3}$	x+1<0 x<-1 $\frac{-x-1-2}{x}=-\frac{1}{2}$ -2x-6=-x x=-6

Odp. Równanie jest spełnione dla x=2, x=-2, x=$\frac{2}{3}$ i x=-6.

Zadanie 2. (do samodzielnego rozwiązania)

Rozwiąż:
$$\left|\frac{|x+1|-2}{x}\right|=\frac{1}{2}$$

Zadanie 3. (do samodzielnego rozwiązania)

Rozwiąż
$$\frac{|x|+1}{|x^2-4|}=x-2$$

Temat 4 : Nierówności wymierne.

Zadanie 1.

Rozwiąż nierówność:

1) $\frac{x^2-2}{x}\le 1$

D=R/{0}
$$\frac{x^2-2}{x}-1\le 0$$
$$\frac{x^2-x-2}{x}\le 0$$

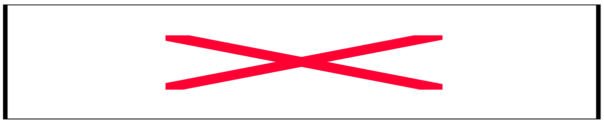
Uwaga:

Podczas rozwiązywania nierówności wymiernych (w przypadku gdy niewiadome znajdują się z jednej strony nierówności) mnożymy obie strony zawsze przez kwadrat mianownika.

$$\frac{x^2-x-2}{x} \le 0 \qquad \Big| \cdot x^2$$

$$x(x^2-x-2) \le 0$$

x(x+1)(x-2)≤0



czyli x∈(-∞,-1>∪<0,2>

Uwzględniając dziedzinę x∈(-∞,-1>∪(0,2>

Odp. Rozwiązaniem nierówności jest x∈(-∞,-1>∪(0,2>.

3) $0 < \dfrac{x}{x^2-x+1} < 1$

D=R

$$0 < \frac{x}{x^2-x+1} \qquad \wedge \qquad \frac{x}{x^2-x+1} < 1$$

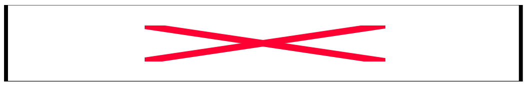
0< x(x^2-x+1)

x>0

$$\frac{x-x^2+x-1}{x^2-x+1} < 0$$

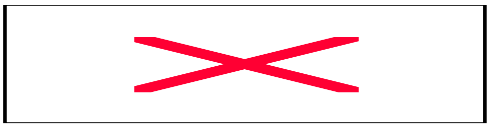
$$\frac{-(x^2-2x+1)}{x^2-x+1} < 0$$

$$-(x-1)^2(x^2-x+1) < 0$$



x∈(-∞,1)∪(1,∞)

x>0 ∧ x∈(-∞,1)∪(1,∞)



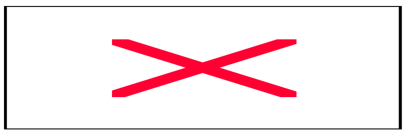
zatem x∈(0,1)∪(1,∞)

Odp. Rozwiązaniem nierówności jest x∈(0,1)∪(1,∞).

4) $\dfrac{|x-1|}{x} \le 1$

D=R/{0}

x-1≥0 x≥1 $\dfrac{x-1}{x} \le 1$ $\dfrac{x-1-x}{x} \le 0$ x≥0 uwzględniając warunek x≥1 x∈<1,+∞)	x-1<0 x<1 $\dfrac{-x+1}{x} \le 1$ $\dfrac{-x+1-x}{x} \le 0$ (1-2x)x≤0 -2(x-0,5)x≤0



$x \in (-\infty,0> \cup <0,5;\infty)$

$x \in <1,+\infty)$ $\vee$ $x \in (-\infty,0> \cup <0,5;\infty)$

czyli $x \in (-\infty,0> \cup <0,5;\infty)$

Uwzględniając dziedzinę: $x \in (-\infty,0) \cup <0,5;\infty)$

Odp. Rozwiązaniem nierówności jest $x \in (-\infty,0) \cup <0,5;\infty)$.

Zadanie 2. (do samodzielnego rozwiązania)

Rozwiąż nierówność:

$$-1 < \frac{x+1}{x-1} < \frac{3}{x-3}$$

Zadanie 3. (do samodzielnego rozwiązania)

Wykazać, że jeśli m>0, to $m + \frac{4}{m^2} \geq 3$

Temat 5 : Równanie wymierne z parametrem.

Zadanie 1.

Rozwiąż równanie, zbadaj istnienie i liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru m.

$$\frac{m-x}{3} = \frac{x-3}{m}$$

D=R

Jeśli m=0 , to równanie nie ma rozwiązania.

Jeśli $m \neq 0$, to:

m(m-x)=3(x-3)

m^2-mx=3x-9

3x+mx=m^2+9

x(m+3)= m^2+9

jedno rozwiązanie	brak rozwiązań	nieskończenie wiele rozwiązań
$m+3 \neq 0 \wedge m \neq 0$ $m \neq -3 \wedge m \neq 0$	$(m+3=0 \wedge m^2+9 \neq 0) \vee m=0$ $m=-3 \vee m=0$	$m+3=0 \wedge m^2+9=0$ nie zachodzi

Odp. Dla parametru $m \neq 0$ i $m \neq -3$ równanie ma jedno rozwiązanie postaci $x = \frac{m^2+9}{m+3}$.

Dla parametru m=-3 lub m=0 równanie nie ma rozwiązań.

Zadanie 2.

Rozwiąż równanie, zbadaj istnienie i liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru m.

$$\frac{2x+1}{2x-1} = \frac{m-1}{m+1}$$

D=R/{(0,5)}

Jeżeli m=-1, to równanie nie ma rozwiązania.

Jeżeli $m \neq -1$, to:

(2x+1)(m+1)=(2x-1)(m-1)

2mx+m+2x+1=2mx-2x-m+1

x=-0,5m

jedno rozwiązanie	brak rozwiązań	nieskończenie wiele rozw.
$m \neq -1$ uwzględniając dziedzinę: $x \neq 0{,}5 \Rightarrow -0{,}5m \neq 0{,}5$ $m \neq -1$	m=-1	nie zachodzi

Odp. Dla parametru $m \neq -1$ równanie ma jedno rozwiązanie postaci x=-0,5m.

Dla parametru m=-1 równanie nie ma rozwiązań.

Zadanie 3.

Rozwiąż równanie, zbadaj istnienie i liczbę rozwiązań równania w zależności od parametrów a i b.

$$\frac{x+a}{x-b}=\frac{x-2a}{x+b}$$

D=R/{-b,b}

(x+a)(x+b)=(x-b)(x-2a)
3ax + 2bx=2b
x(3a+2b)=2b

jedno rozwiązanie	brak rozwiązań	nieskończenie wiele rozw.
$2b+3a\neq 0$ $a\neq -\frac{2}{3}b$ wtedy rozwiązanie ma postać: $x=\frac{ab}{2b+3a}$ uwzględniając dziedzinę: $b\neq \frac{ab}{2b+3a} \wedge -b\neq \frac{ab}{2b+3a}$ $b(b+a)\neq 0 \wedge b(b+2a)\neq 0$ czyli: $b\neq 0 \wedge a\neq -\frac{2}{3}b \wedge a\neq -b \wedge a\neq -0{,}5b$	$2b+3a=0 \wedge ab\neq 0$ $a=-\frac{2}{3}b \wedge a\neq 0 \wedge b\neq 0$ $x=b \vee x=-b$	$2b+3a=0 \wedge ab=0 \wedge x\neq b \wedge x\neq -b$ zatem: $a=0,\ b=0,\ x\neq 0$

Odp. Równanie ma jedno rozwiązanie postaci $x=\frac{ab}{2b+3a}$ dla parametrów a i b takich, że $b\neq 0$, $a\neq -\frac{2}{3}b$, $a\neq -b$, $a\neq -0{,}5b$.

Równanie nie ma rozwiązań dla $a=-\frac{2}{3}b \wedge a\neq 0 \wedge b\neq 0$.

Równanie jest tożsamościowe dla a=0, b=0.

Zadanie 4 (do samodzielnego rozwiązania)

Rozwiąż równanie z niewiadomą x. Przedyskutuj istnienie i liczbę rozwiązań równania w zależności od parametrów a i b .

1) $\frac{x}{x-a}=\frac{b}{x}+1$

2) $\frac{a}{x}=\frac{b}{x+a}$

Temat 6 : Rozwiązywanie zadań tekstowych.

Zadanie 1.

Samochód przebył w pewnym czasie drogę 210 km. Gdyby jechał za średnią prędkością o 10 km/h większą, to czas skróciłby się o 0,5h. Jaka była prędkość samochodu?

Analiza:

droga, jaką przejechał samochód	s=210 km
średnia prędkość samochodu	V
czas przejazdu	t
nowa prędkość samochodu	(V+10)km/h
nowy czas przejazdu	(t-0,5)h

Korzystamy ze wzoru na drogę:

$s_1=V\cdot t$

$210=V\cdot t \Rightarrow t=210:V$

Jak wyżej dla nowych prędkości i czasu:

$s_2=(V+10)(t-0,5)$

Ponieważ przebyta droga była taka sama, to $s_1= s_2$

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} V\cdot t=(V+10)(t-0,5) \\ t=210:v \end{cases}$$

Podstawiając otrzymamy równanie:

$$V^2 +10V - 4200 = 0$$

Stąd mamy:

$V_1=-70 \quad \vee \quad V_2=60$

$V_1=-70$ nie spełnia warunków zadania

Odp. Samochód jechał z prędkością V=60km/h.

Zadanie 2.

Mianownik ułamka będącego ilorazem dwóch liczb całkowitych jest mniejszy o 1 od kwadratu licznika tego ułamka. Jeżeli do licznika i mianownika ułamka dodamy 2, to wartość ułamka będzie większa od $\frac{1}{4}$, jeżeli zaś od licznika i mianownika odejmiemy 3, to wartość ułamka będzie mniejsza od $\frac{1}{10}$. Znaleźć ten ułamek.

Niech danym ułamkiem będzie $\frac{x}{x^2-1}$. Wtedy musi być spełniony ikład nierowności

$$\frac{x+2}{x^2+1} > \frac{1}{4} \quad \text{i} \quad \frac{x-3}{x^2-4} < \frac{1}{10}$$

Układ ten jest spełniony przez liczby $2<x<2+\sqrt{11}$. Ponieważ x jest liczbą całkowitą , więc stąd otrzymamy trzy ułamki spełniające warunki zadania, a mianowicie $\frac{3}{8}, \frac{4}{15}, \frac{5}{24}$.

Odp. Istnieją trzy ułamki spełniające warunki tego zadania : $\frac{3}{8}, \frac{4}{15}, \frac{5}{24}$.

Zadanie 3

Trzech robotników kopałoby rów :pierwszy o 7 dni dłużej, drugi o 15 dni dłużej, a trzeci trzy razy dłużej niż gdyby pracowali razem. W jakim czasie wykopią ten rów wspólnymi siłami?

Analiza:

czas w jakim I robotnik kopałby rów – x+7

czas w jakim II robotnik kopałby rów – x+15

czas w jakim III robotnik kopałby rów – 3x

czas w jakim razem wykopaliby rów – x

wydajność pracy pierwszego robotnika - $\frac{1}{x+7}$

wydajność pracy drugiego robotnika - $\frac{1}{x+15}$

wydajność pracy trzeciego robotnika - $\frac{1}{3x}$

łączna wydajność $\frac{1}{x}$

Rozwiązanie :

$$\frac{1}{x+7} + \frac{1}{x+15} + \frac{1}{3x} = \frac{1}{x} \quad | \cdot 3x(x+7)(x+15)$$

3x(x+15)+3x(x+7)+(x+7)(x+15)= 3(x+7)(x+15)
Stąd otrzymujemy równanie kwadratowe:
$2x^2 + 11x - 105 = 0$
$x_1 = -10 \quad \vee \quad x_2 = 5$
nie spełnia
warunków zadania
Odp. Robotnicy razem kopaliby rów w ciągu 5 dni.

Zadanie 4 (do samodzielnego rozwiązania)
Iloczyn pewnych trzech liczb pierwszych równa się ich pięciokrotnej sumie. Co to za liczby?
Zadanie 5 (do samodzielnego rozwiązania)
Pociąg był zatrzymany przez 16 min. i nadrobił spóźnienie na drodze 80 km, jadąc z prędkością o 10 km/h większą niż przewidziano w rozkładzie jazdy. Jaka była prędkość pociągu według rozkładu jazdy ?
Temat 7: Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste.

Def. Funkcje wymierne postaci $\frac{A}{(x-a)^n}$ nazywamy ułamkiem prostym.

np. $\frac{3}{x-5}, \frac{1}{(x+1)^2}$

Zadanie 1
Przedstaw w postaci sumy ułamków prostych.
g(x)= $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{Ax+2A+Bx+B}{(x+1)(x+2)} = \frac{(A+B)x+2A+B}{(x+1)(x+2)}$$

(A+B)x+2A+B=1

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-B \\ -2B+B=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{(x+2)}$$

Tw.
Jeżeli (x-a) jest k-krotnym czynnikiem mianownika funkcji wymiernej $\frac{P(x)}{Q(x)}$, to można przedstawić ją w postaci $\frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$

Zadanie 2.
Przedstaw w postaci sumy ułamków prostych.

g(x)= $\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x+1}$

g(x)= $\frac{x^2-4x+3}{(x-1)^2}$

Po odpowiednim przekształceniu funkcji g(x) wyznaczamy szukaną sumę.

$$\frac{x^2-4x+3}{(x-1)^2}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}.$$

Zadanie 3.

Oblicz:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{15\cdot 16}$$

Rozkładając dane elementy na ułamki proste otrzymamy:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{A}{1}+\frac{B}{2}=\frac{2A+B}{2}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$ 2A+B=1

$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{6}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{15\cdot 16}=\frac{1}{15}-\frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{16}\right)=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

$$\boxed{\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}=\frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)}=\frac{(A+B)n+A}{n(n+1)}}$$

Zadanie 4 (do samodzielnego rozwiązania)

Przedstaw w postaci sumy ułamków prostych.

h(x)= $\frac{x+1}{x^2+x-2}$

Zadanie 5 (do samodzielnego rozwiązania)

Oblicz:

$$\frac{1}{11\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 15}+\frac{1}{15\cdot 17}+...+\frac{1}{29\cdot 31}$$

Temat 8 :Funkcja $y=\frac{a}{x}$.

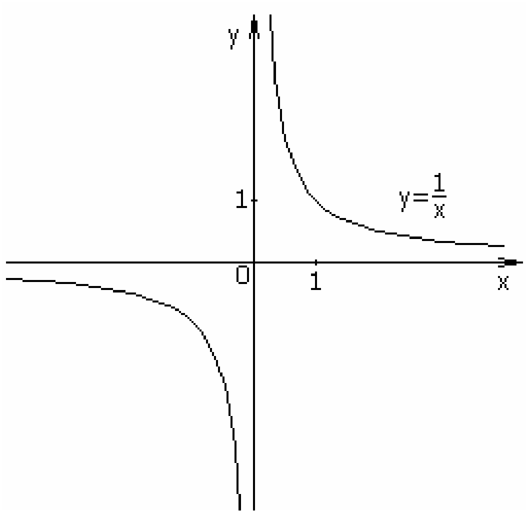
W zależności od współczynnika **a** rozpatrujemy dwa przypadki:

a>0

(np. a=1)

y= $\frac{1}{x}$

D=R/{0}

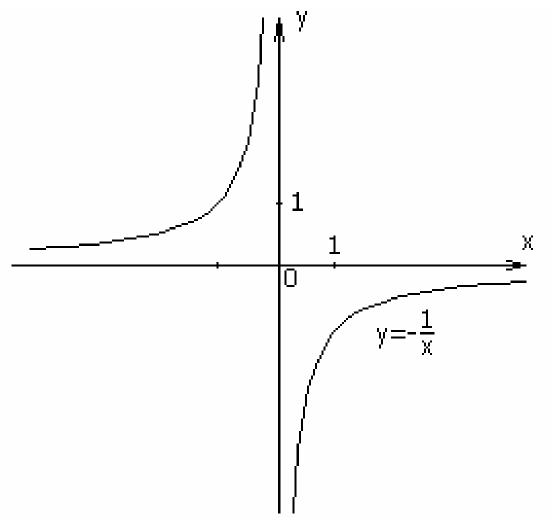


a<0

(np.a=-1)

y=- $\frac{1}{x}$

D=R/{0}



1) Wykresem funkcji jest hiperbola.
2) Zbiorem wartości funkcji jest R/{0}
3) Dla x>0 funkcja przyjmuje wartości dodatnie.
4) Dla x<0 funkcja przyjmuje wartości ujemne.
5) Funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów (-∞, 0) i (0, ∞)
6) Proste x=0 i y=0 są asymptotami wykresu funkcji.
7) Funkcja jest nieparzysta.

1) Wykresem funkcji jest hiperbola.
2) Zbiorem wartości funkcji jest R/{0}
3) Dla x<0 funkcja przyjmuje wartości dodatnie.
4) Dla x>0 funkcja przyjmuje wartości ujemne.
5) Funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów (-∞, 0) i (0, ∞)
6) Proste x=0 i y=0 są asymptotami wykresu funkcji.
7) Funkcja jest nieparzysta.

Przekształcenia wykresów funkcji.

Aby narysować wykres funkcji $y = \frac{a}{x-p} + q$ należy:

a) narysować wykres funkcji y=$\frac{a}{x}$

b) przesunąć o wektor $\vec{u} = [p, q]$

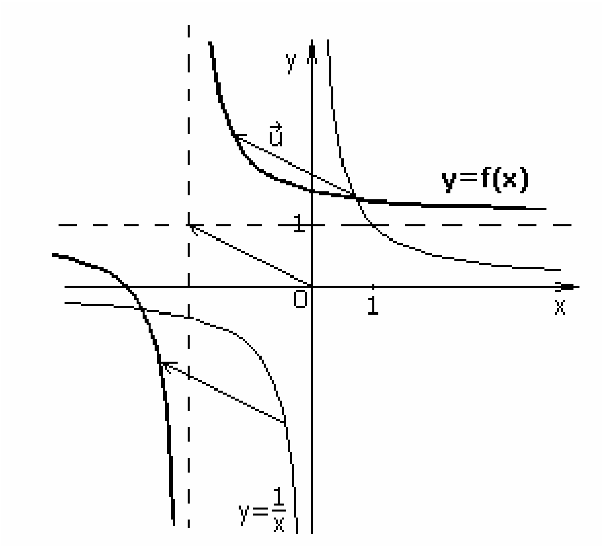
Zadanie 1

Narysuj wykres funkcji: f(x)=$\frac{1}{x+2}+1$

Korzystając z powyższego schematu otrzymamy:

a) y=$\frac{1}{x}$

b) y=$\frac{1}{x+2}+1$ $\vec{u}$ =[-2,1]



Zadanie 2.

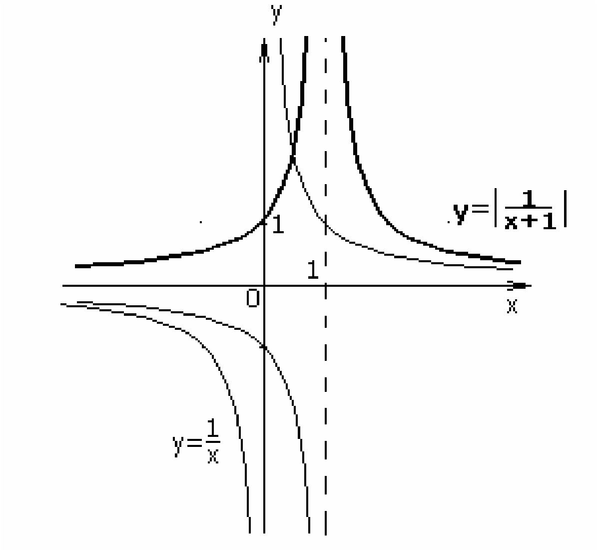
Narysuj wykres funkcji f(x) = $\left|\frac{1}{x-1}\right|$

Korzystając ze schematu otrzymamy:

a) y=$\frac{1}{x}$

b) y= $\frac{1}{x-1}$ $\vec{u}$ =[1, 0]

c) y=| $\frac{1}{x-1}$ |



Zadanie 3 (do samodzielnego rozwiązania)

Narysuj wykres funkcji:

1) $y=\left|\left|\frac{2}{x-1}\right|-3\right|$

2) $y=-\left|\left|\frac{1}{x-2}-3\right|-1\right|$

Temat 9 : Funkcja homograficzna.

Def.

Funkcję f:D→R daną wzorem f(x)=$\frac{bx+a}{cx+d}$, gdzie D=R/{-$\frac{d}{c}$ }nazywamy funkcją homograficzną ,gdy funkcja ta nie jest stałą i gdy c≠0.

np. f(x)=$\frac{x-1}{x+1}$ D=R/{-1}

Uwaga:

1) Jeśli c=0 to f(x)= $\frac{bx+a}{0\cdot x+d}=\frac{bx+a}{d}=\frac{b}{d}x+\frac{a}{d}$, zatem f jest funkcją liniową.

2) Jeśli bx+a=k·(cx+d), to f(x)= $\frac{bx+a}{cx+d}=\frac{k\cdot(cx+d)}{cx+d}=k$

3) Funkcja y=$\frac{a}{x}$ jest szczególnym przypadkiem funkcji homograficznej, gdzie b=d=0 i c=1.

Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola. Aby narysować jej wykres trzeba sprowadzić ją do postaci f(x)=$\frac{a}{x-p}+q$

Zadanie 1.

Narysuj wykres funkcji:

f(x)=$\frac{x}{x+1}$ D=R/{-1}

Przekształcając wzór funkcji f(x) otrzymamy:

f(x)= $\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{-1}{x+1} = \frac{-1}{x+1} + 1$

Korzystając z odpowiedniego schematu kreślimy kolejno:

a) y=-$\frac{1}{x}$

b) $\vec{u}$ =[-1, 1]

Zadanie 2.

Narysuj wykres funkcji :f(x)=$\frac{-2x-3}{x+2}$

D=R/{-2}

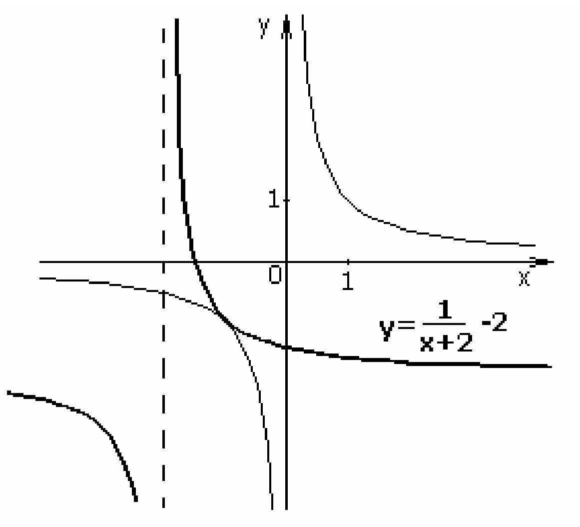
Przekształcając wzór funkcji f(x) otrzymamy:

f(x)= $\frac{-2x-3}{x+2} = \frac{-2(x+2)+1}{x+2} = \frac{1}{x+2} - 2$

Korzystając z odpowiedniego schematu kreślimy kolejno:

a) y=$\frac{1}{x}$

b) $\vec{u}$ =[-2, -2]



Zadanie 3 (do samodzielnego rozwiązania)

1) h(x)=$\frac{3x+1}{x}$

2) h(x)=$\frac{-3x+4}{x-2}$

Temat 10 :Wykresy funkcji z wartością bezwzględną.

Zadanie 1.

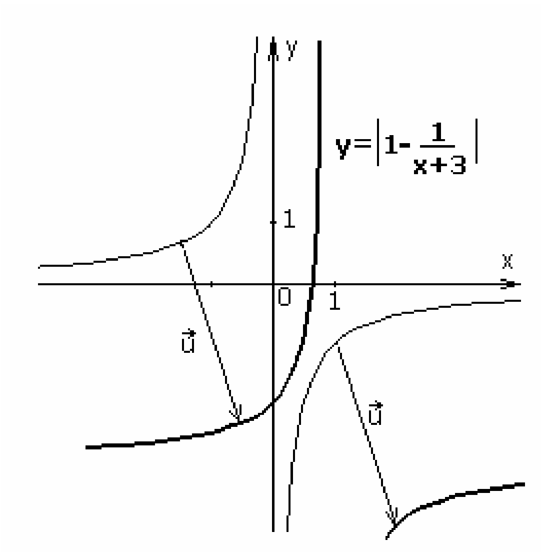
Narysuj wykres funkcji f(x)=$\left|\frac{2x+4}{2x+6}\right|$

f(x)=$\left|\frac{2x+4}{2x+6}\right| = \left|\frac{x+2}{x+3}\right| = \left|\frac{x+3-1}{x+3}\right| = \left|-\frac{1}{x+3}+1\right|$

Korzystając z odpowiedniego schematu kreślimy kolejno:

a) y=-$\frac{1}{x}$

b) $\vec{u}$ =[-3, 1]



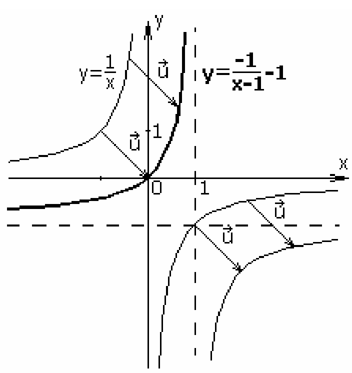
c) y=$\left|-\frac{1}{x+3}+1\right|$

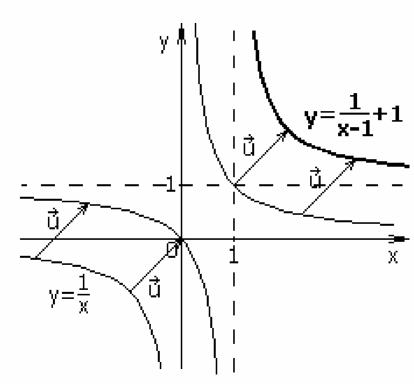
Zadanie 2

Narysuj wykres funkcji f(x)=$\frac{x}{|x-1|}$

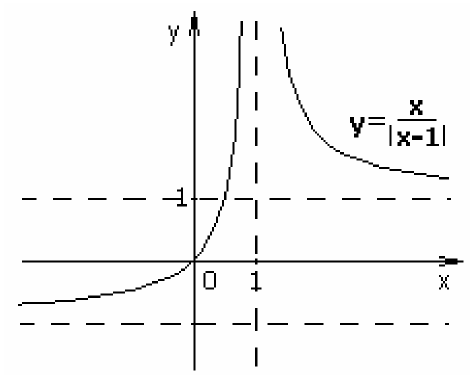
Rozpatrujemy funkcję f(x) dwa przypadki .

x-1≥0 x≥1	x-1<0 x<1
y=$\frac{x}{x-1}$ y=$\frac{x-1+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+1$ a) y=$\frac{1}{x}$ b) $\vec{u}$ =[1,1]	y=$\frac{x}{-(x-1)}$ y=$\frac{-x}{x-1}=\frac{-(x-1)}{x-1}+\frac{-1}{x-1}=\frac{-1}{x-1}-1$ a) y=$\frac{1}{x}$ b) $\vec{u}$ =[1,-1]





Po połączeniu otrzymamy:



Temat 11 (dla pasjonatów) :Ciało funkcji wymiernych i ułamki proste .

Def.

Funkcją wymierną względem ciała liczb zespolonych (rzeczywistych) nazywamy funkcję zmiennej zespolonej postaci f(z)=$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$,gdzie φ(z) ,ψ(z) są wielomianami względem ciała liczb zespolonych (rzeczywistych).Funkcję wymierną f(z)= $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ nazywamy właściwą , gdy stopień wielomianu φ(z) jest mniejszy od stopnia wielomianu ψ(z).Każdą funkcję wymierną f(z) można przedstawić w postaci f(z)=g(z)+ $\frac{h(z)}{\psi(z)}$, gdzie g(z) jest wielomianem, a $\frac{h(z)}{\psi(z)}$ funkcją wymierną właściwą.

Def.

Ułamkiem prostym względem ciała liczb zespolonych nazywamy funkcję wymierną postaci $\frac{A}{(z-z_0)^k}$, gdzie A, z_0 są liczbami zespolonymi, k zaś liczbą naturalną. Każdą funkcję wymierną właściwą f(z)=$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ można przedstawić w postaci f(z)

$=\frac{A_1^{(1)}}{z-z_1}+ ... + \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(z-z_1)^{k_1}}+ ...+ \frac{A_1^{(i)}}{z-z_i}+...+\frac{A_{k_1}^{(i)}}{(z-z_i)^{k_i}}$, gdzie $A_1^{(1)},..., A_{k_1}^{(1)},..., A_1^{(i)},..., A_{k_i}^{(i)}$ są liczbami rzeczywistymi, oraz φ(z)= $(z-z_1)^{k_1}...(z-z_i)^{k_i}$

Def.

Ułamkiem prostym I rodzaju względem ciała liczb rzeczywistych nazywamy funkcję wymierną postaci $\frac{A}{(z-x_0)^k}$, gdzie A, x_0 są liczbami rzeczywistymi, zaś k liczbą naturalną.

Ułamkiem prostym II rodzaju nazywamy funkcję postaci $\frac{Az+B}{(z^2+pz+q)^k}$, gdzie A, B, p ,q są liczbami rzeczywistymi i $p^2-4q<0$, a k jest liczbą naturalną. Każdą funkcję wymierną właściwą względem ciała liczb rzeczywistych f(z)=$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ można przedstawić jako sumę ułamków prostych I i II rodzaju, przy czym czynnikowi $(z-x_i)^{k_i}$ z rozkładu funkcji ψ(z) na czynniki o współczynnikach rzeczywistych odpowiadają w tej sumie składniki

$\frac{A_1}{z-x_i}+...+\frac{A_{k_i}}{(z-x_i)^{k_i}}$, a czynnikowi $(z^2+p_iz+q_i)^{k_i}$ odpowiadają w tej sumie składniki

$$\frac{A_1z+B_1}{z^2+p_iz+q_i}+...+\frac{A_{k_i}z+B_{k_i}}{(z^2+p_iz+q_i)^{k_i}}$$

Zadanie 1.

Przedstawić funkcję wymierną f(z)=$\frac{4z}{z^4-1}$ w postaci sumy ułamków prostych względem ciała liczb zespolonych.

Rozwiązanie:
Rozkładamy mianownik funkcji f(z) na czynniki liniowe z^4-1=(z-1)(z+1)(z-j)(z+j). Funkcję f(z) przedstawiamy w postaci f(z)=$\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+1}+\frac{C}{z-j}+\frac{D}{z+j}$. W celu wyznaczenia współczynników A, B, C, D korzystamy z tożsamości

$$\frac{4z}{z^4-1}\equiv\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+1}+\frac{C}{z-j}+\frac{D}{z+j}$$

Sprowadzamy prawą stronę równości do wspólnego mianownika i porównujemy liczniki
4z≡ A(z+1)(z-j)(z+j)+B(z-1)(z-j)(z+j)+C(z-1)(z+1)(z+j)+D(z-1)(z+1)(z-j)
Do równości powższej wstawiamy kolejno za z liczby 1, -1, j, -j i otrzymujemy
4=A2(1-j)(1+j), -4=B(-2)(-1-j)(-1+j), 4j=C(j-1)(j+1)(2j), -4j=D(-j-1)(-j+1)(-2j).Stąd
A=1, B=1, C=1, D=1.

Otrzymujemy rozkład funkcji f(z) na sumę ułamków prostych f(z)= $\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-j}+\frac{1}{z+j}$

Odp. $\frac{4z}{z^4-1}\equiv\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-j}+\frac{1}{z+j}$.

Zadanie 2

Przedstawić funkcję wymierną f(z)= $\frac{4z}{z^4+1}$ w postaci sumy ułamków prostych względem ciała liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie :
Rozkładamy mianownik funkcji f(z) na czynniki względem liczb rzeczywistych.
$z^4+1=(z^2+\sqrt{2}z+1)(z^2-\sqrt{2}z+1)$. Funkcję f(z) przedstawiamy w postaci

f(z)=$\frac{Az+B}{z^2+\sqrt{2}z+1}+\frac{Cz+D}{z^2+\sqrt{2}z+1}$. Otrzymujemy tożsamość:

$$\frac{4z}{z^4+1}=\frac{Az+B}{z^2+\sqrt{2}z+1}+\frac{Cz+D}{z^2+\sqrt{2}z+1}$$

po doprowadzeniu prawej strony powyższej równości do wspólnego mianownika i po porównaniu liczników mamy
4z≡(Az+B)($z^2-\sqrt{2}z+1)+(Cz+D)(z^2+\sqrt{2}z+1)$
Po prawej stronie tej równości wykonujemy działania i grupujemy składniki według potęg zmiennej z
4z≡(A+C)$z^3+(B-\sqrt{2}A+D+\sqrt{2}C)z^2+(A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D)z+B+D$
Porównujemy współczynniki przy jednakowych potęgach zmiennej z w wielomianach równych tożsamościowo według równości
⎧ A+C=0

$$\begin{cases} B-\sqrt{2}\,A+\sqrt{2}\,C=0 \\ A-\sqrt{2}\,B+C+\sqrt{2}\,D=4 \\ B+D=0 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy A=0, B=$-\sqrt{2}$, C=0, D=$\sqrt{2}$, a więc

$$f(z)=\frac{-\sqrt{2}}{z^2+\sqrt{2}z+1}+\frac{\sqrt{2}}{z^2-\sqrt{2}+1}.$$

Odp. $\dfrac{4z}{z^4+1}\equiv\dfrac{-\sqrt{2}}{z^2+\sqrt{2}z+1}+\dfrac{\sqrt{2}}{z^2-\sqrt{2}+1}$.

Zadanie 3 (do samodzielnego rozwiązania)

Rozłożyć funkcję wymierną f(z) na sumę ułamków prostych względem ciała liczb zespolonych.

$$f(z)=\frac{2z+2}{z^2+2z+2}$$

Zadanie 4 (do samodzielnego rozwiązania)

Przedstawić funkcję wymierną f(z) w postaci sumy wielomianu i ułamków prostych względem ciała liczb rzeczywistych:

$$f(z)=\frac{z^2+z-1}{z^2-1}$$