WSTĘP

Człowiek od zawsze podpatrywał przyrodę, starał się poznać jej sekrety. Nie dla samej tylko satysfakcji poznania; znajomość jej praw ułatwiała mu pracę, nierzadko nawet umożliwiała istnienie. Co wiedza przyrodnicza ma wspólnego z matematyką? Przyroda, natura to coś żywego, dynamicznego, zmiennego, matematyka zaś wydaje się sucha, formalna, statyczna. Lecz u jej podłoża, u początków prawdziwie interesującego problemu matematycznego zazwyczaj leży jakieś dobrze postawione, istotne pytanie typu przyrodniczego, dotyczące własności lub wielkości przedmiotu z otaczającego nas świata.

Gdy w starożytnym Egipcie interesowano się geometrią, nie było to zainteresowanie czysto teoretyczne. Można się nawet spierać o to, czy w ogóle było ono teoretyczne. Systematyczne wylewy życiodajnych wód Nilu i związana z nimi konieczność ciągłego wymierzania gruntów stworzyły potrzebę rozwoju umiejętności dokonywania pomiarów ziemi.

Z drugiej strony, każda zorganizowana społeczność, gdzie dobra materialne nie występują w obfitości, narzuca konieczność ich liczenia. Tak więc mierzenie i liczenie legło u podstaw naszej cywilizacji w sposób dla nas zrozumiały i powszechnie akceptowany. Rozumiemy więc, że w dziedzinie matematyki mieści się teoria mierzenia i liczenia, ale czy tylko?

Przez wiele wieków, w zasadzie aż do początku wieku XX tak właśnie nieomal sądzono. Lecz matematyka zawsze chciała być pomocna w badaniu własności interesujących obiektów i na skutek tego z rzadka ogranicza swoje rejony do liczb oraz do ustalania związków między nimi.

Matematyka w ścisłym sensie zaczyna się tam, gdzie już, formalnie rzecz biorąc, nie mówi się o konkretnych przedmiotach. Poznawczo ważny etap interpretacji i wyboru aksjomatów dokonuje się w naukach przyrodniczych. Tezy, bądź hipotezy z tych nauk, przywędrowują często do matematyki w postaci wyabstrahowanych własności wprowadzonych pojęć. Tutaj zostają zaakceptowane jako tzw. aksjomaty. Tak w np. w genialnym, zastanawiająco dojrzałym wykładzie geometrii zaprezentowanym przez Euklidesa w jego “Elementach”, udoskonalonym przez wybitnego niemieckiego matematyka Dawida Hilberta, pierwotnymi pojęciami są pojęcia: punktu, prostej i płaszczyzny. O tych pojęciach wypowiada się pewne zdania zwane aksjomatami (pewnikami), a następnie ze zdań tych wyprowadza się w sposób logicznie poprawny inne zdania, zwane twierdzeniami.

Wiek XIX był okresem wspaniałego rozwoju fizyki co rzutowało w sposób pozytywny na ogromny postęp w dziedzinie matematyki. Nowe fakty wykryte i potwierdzone eksperymentalnie wymagały wyłuskania swojej istoty, obudowania stosowną teorią formalną, wyjaśnienia związków logicznych. W tym właśnie miejscu zaczyna się matematyka jako nauka żywa i sprężysta, o wysokich wymaganiach w zakresie ścisłości. Jej podstawowym walorem jest możliwość formalnego wyciągania wniosków z wcześniej zaakceptowanych tez, wykrywania sprzeczności i błędów w naszych rozumowaniach. W początku wieku XX matematycy poczęli sobie zdawać sprawę ze zmienionej funkcji uprawianej przez siebie dyscypliny i gwałtownego poszerzenia się pola

ich badań. Zaczęła się gruntować opinia, że nie tylko liczby i ich własności leżą w centrum zainteresowania matematyków, ale że główne miejsce we współczesnej matematyce zajmuje pojęcie zbioru i odwzorowania i że pojęcie własności, w szczególności własności liczb, jest w swojej istocie niczym innym jak pojęciem zbioru. Dalej zauważono, że pojęcie to jest niezwykle ogólne. Jego ogólność wywołała w początku naszego stulecia wiele przykrych refleksji u matematyków o nieco bardziej filozoficznym nastawieniu. Okazało się, że pozostając w nowo tworzonej teorii zbiorów na poziomie dotychczasowej ścisłości dochodzimy do zdań wewnętrznie sprzecznych, które musielibyśmy uznać za twierdzenia tej teorii. Sytuacja oczywiście nie do zaakceptowania. Narzuciła ona matematykom konieczność przeorania od podstaw całej uprawianej przez nich nauki i stała się przyczyną rozwoju logiki matematycznej oraz stworzenia nowej zupełnie gałęzi wiedzy zwanej podstawami matematyki.

ELEMENTY LOGIKI MATEMATYCZNEJ

def.

Zdaniem logicznym nazywamy wyrażenie, któremu można przyporządkować jedną z dwóch ocen. Albo wyrażenie jest prawdziwe, albo fałszywe. prawdę lub fałsz nazywamy wartością logiczną zdań.

przykład:

Niebo jest zielone. - zdanie logiczne o wartości fałszywej

Czy listonosz pogryzł psa? - przykład zdania, które nie jest zdaniem

logicznym, ponieważ nie można mu porządkować prawdy, ani fałszu

Treść zdania nie jest istotna. Abstrahując od niej będziemy zdania oznaczać małymi literami alfabetu, np.:p, q, r, s (zmienne zdaniowe).

Wartość logiczną zdania oznaczamy:

1 - zdanie prawdziwe
0 - zdanie fałszywe

def. (alternatywa-suma-zdań)

Jeżeli dane są dwa zdania: p, q, to zdanie "p lub q" nazywamy alternatywą zdań p i q i zapisujemy symbolicznie: $p \vee q$.

Wartości logiczne zdania $p \vee q$ w zależności od wartości logicznych zdań p i q podane są podane w tabelce:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Alternatywa $p \vee q$ jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy choć jedno ze zdań p, q jest prawdziwe.

def. (koniunkcja-iloczyn-zdań)

Koniunkcją zdań p, q nazywamy zdanie "p i q" i zapisujemy symbolicznie: $p \wedge q$. Wartości logiczne zdania $p \wedge q$ w zależności od wartości logicznych zdań p, q podane są w tabelce:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Koniunkcja $p \wedge q$ jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy oba zdania p i q są prawdziwe.

def.(implikacja zdań)

Ze zdań p, q można zbudować nowe zdanie postaci: “jeżeli p, to q”, które nazywamy implikacją i zapisujemy symbolicznie p => q. Zdanie p nazywamy poprzednikiem, zdanie q następnikiem. Tabela logicznych wartości implikacji jest następująca:

p	q	p=>q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Implikacja jest wtedy i tylko wtedy fałszywa, gdy jej poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy.

<u>def.</u>(równoważność zdań)

Zdanie: “p wtedy i tylko wtedy, gdy q”, nazywamy równoważnością zdań p i q i zapisujemy symbolicznie p<=>q.

Wartości logiczne zdania p<=>q przedstawia tabela:

p	q	p<=>q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Równoważność p<=>q jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy zdania p i q mają jednakową wartość logiczną.

<u>def.</u>(negacja-zaprzeczenie-zdania)

Jeśli p jest zdaniem, to zdanie: “ nieprawda, że p” nazywa się negacją zdania p i oznaczane jest symbolem ~p

p	~ p
1	0
0	1

Zaprzeczenie zdania prawdziwego jest zdaniem fałszywym i odwrotnie: zaprzeczenie zdania fałszywego jest zdaniem prawdziwym.

Zwroty *nieprawda, że, i, lub, jeżeli...to, wtedy i tylko wtedy, gdy* nazywamy <u>funktorami.</u> Posługując się funktorami możemy ze zmiennych zdaniowych tworzyć tzw. <u>wyrażenia rachunku zdań.</u>

przykład:

1) [(p v q)=>q]<=>p

2) [(p ^ q)=>(p<=>q)] v q

Wyrażenia rachunku zdań, z których zawsze otrzymujemy zdania prawdziwe niezależnie od wartości logicznych zmiennych zdaniowych, nazywamy <u>prawami rachunku zdań - tantiologami.</u>

Do sprawdzenia, czy dane wyrażenie jest prawem rachunku zdań, służy tzw. metoda 0-1 (zero-jedynkowa). Polega ona na rozpatrzeniu wszystkich układów wartości logicznych zmiennych zdaniowych występujących w danym wyrażeniu.

przykład:

Sprawdź, czy dane wyrażenia są prawem rachunku zdań.

a)p<=>~ (~ p)

p	~ p	~(~p)	p<=>~(~ p)
1	0	1	1
0	1	0	1

wyrażenie jest prawem rachunku zdań

b)(p v q)<=>(q v p)

p	q	p v q	q v p	(p v q)<=>(q v p)
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	0	0	1

wyrażenie jest prawem rachunku zdań

c)[(p=>q) ^ (q=>r)]<=>(p=>r)

p	q	r	p=>q	q=>r	(p=>q) ^ (q=>r)	p=>r	[(p=>q) ^ (q=>r)]<=> (p=>r)
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

wyrażenie nie jest prawem rachunku zdań

d)~(p=>q)<=>(p ^ ~q)

p	q	p=>q	~(p=>q)	~q	p ^ ~ q	~(p=>q)<=>(p ^ ~ q)
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1

wyrażenie jest prawem rachunku zdań

PRAWA LOGIKI:

Tw.(zasada wyłączonej sprzeczności)

Żadne zdanie nie jest jednocześnie prawdziwe i fałszywe. tj. ~(p ^~p)

Dowód:

p	~p	p ^ ~p	~(p ^ ~p)
1	0	0	1
0	1	0	1

Zatem twierdzenie jest prawdziwe.

Tw.(zasada wyłącznego środka)

Zdanie jest zawsze prawdziwe lub fałszywe; trzeciej możliwości nie ma.tj. $p \vee \sim p$

Dowód:

p	~p	p v ~p
1	0	1
0	1	1

Zatem twierdzenie jest prawdziwe**.**

Podstawowe reguły wnioskowania*:*

Tw.(prawo odrywania)

Jeśli prawdziwa jest implikacja p=>q oraz jej poprzednik p, to również następnik q jest prawdziwy.

Dowód:

p	q	p=>q
1	1	1

Zatem twierdzenie jest prawdziwe**.**

Tw. (prawo przechodniości implikacji)

Jeśli prawdziwe są implikacje p=>q oraz q=>r, to również prawdziwa jest implikacja p=>r.

Dowód**:**

p	q	r	p=>q	q=>r	(p=>q) ^ (q=>r)	p=>r	[(p=>q) ^ (q=>r) <=>(p=>r)
1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Zatem twierdzenie jest prawdziwe**.**

Tw.(prawo kontrapozycji)

Jeśli implikacja p=>q jest prawdziwa, to prawdziwa jest również implikacja ~q=>~p.

Dowód**:**

p	q	p=>q	~p	~q	~q=>~p
1	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1

Zatem twierdzenie jest prawdziwe**.**

Tw.(prawo podwójnego przeczenia)

Zdanie i podwójne zaprzeczenie zdania mają tę samą wartość logiczną.

~(~p)<=>p

Dowód**:**

p	~p	~(~p)	~(~p)<=>p
1	0	1	1
0	1	0	1

Zatem twierdzenie jest prawdziwe.

Tw.

Zaprzeczeniem implikacji p=>q jest koniunkcja p ^ ~q.

~(p=>q)<=>(p ^ ~q)

Dowód**:**

p	q	p=>q	~(p=>q)	~q	p ^ ~q	~(p=>q) <=>(p ^ ~q)
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1

Zatem twierdzenie jest prawdziwe.

Tw.(prawa de Morgana)

1)Zaprzeczeniem koniunkcji p ^ q jest alternatywa zaprzeczeń tych zdań**,** czyli zdanie ~p v ~q

~(p ^ q)<=>(~p v ~q)

Dowód**:**

p	q	p ^ q	~(p ^ q)	~p	~q	~p v ~q	~(p ^ q)<=> (~p v ~q)
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Zatem twierdzenie jest prawdziwe**.**

2)Zaprzeczeniem alternatywy p v q jest koniunkcja zaprzeczeń tych zdań**.**

~(p v q)<=>(~p ^ ~q)

Dowód:

p	q	p v q	~(p v q)	~p	~q	~p ^ ~q	~(p v q)<=>(~p ^ ~q)
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Zatem twierdzenie jest prawdziwe.

łamigłówka:

Od pewnego rozdroża jedna droga prowadzi do wsi M, a druga do N. W domku na rozdrożu mieszkają dwaj bracia. Jeden z nich jest prawdomówny, tj. mówiącym prawdę i tylko prawdę, drugi zaś jest kłamcą, tj. mówiącym zawsze nieprawdę. Doszliśmy do rozdroża i chcemy dalej pójść do wsi M. Na rozdrożu nie ma jednak drogowskazu. Pojawia się jeden z braci. Nie wiemy, czy jest to ten, który mówi prawdę, czy ten, który kłamie. Nie możemy oczywiście zapytać: "Która droga prowadzi do wsi M?", ponieważ otrzymaną odpowiedź można zinterpretować na cztery sposoby. Jakie więc należy zadać pytanie?

FORMY ZDANIOWE; KWANTYFIKATOR OGÓLNY i ZDANIOWY

Forma zdania jest wyrażeniem zawierającym zmienną. Wyrażenie to staje się zdaniem, gdy w miejsce zmiennej podstawimy nazwę odpowiedniego przedmiotu, np.

1) n jest podzielne przez 5
2) x był wybitnym poetą

1) 8 jest podzielne przez 5 -0
2) Mickiewicz był wybitnym poetą -1

def.

Dziedziną formy zdaniowej nazywamy zbiór wszystkich przedmiotów, mających te własności, że otrzymujemy zdanie sensowne, po podstawieniu nazwy przedmiotu w miejsce zmiennej.

Dziedziną pierwszej formy jest zbiór liczb całkowitych, a drugiej zbiór imion i nazwisk.

def.

Mówimy, że pewien element spełnia formę zdaniową, gdy podstawiając w formie zdaniowej nazwę tego elementu w miejsce zmiennej, otrzymamy zdanie prawdziwe, np.:

n=10 spełnia pierwszą formę zdaniową.

Każda forma zdaniowa wyznacza zbiór elementów, które ją spełniają, np. formę zdaniową 5/n spełnia zbiór A

$A=\{n \in C; 5/n\}$

$A=\{...-10, -5, 0, 5, 10...\}$

Ogólnie formy zdaniowe będziemy oznaczać p(x), q(x), s(x), a zbiór elementów ją spełniających będziemy oznaczali

$A=\{x: p(x)\}$

przykład:

p(x): 1+x=2 A={1}

(x+1)(x-1)=0 A={-1, 1}

Ważną rolę w fomułowaniu definicji i twierdzeń odgrywają słowa: <u>istnieje i każdy.</u>

<u>def.</u>

Zwrot "dla każdego x" nazywamy kwantyfikatorem ogólnym i oznaczamy $\bigwedge_x$

Zwrot "istnieje takie x" nazywamy kwantyfikatorem szczegółowym i oznaczamy $\bigvee_x$

przykład:

Dla każdej liczby rzeczywistej zachodzi(x-1)(x+1)+1 ≥ 0

$\bigwedge_{x\in R}(x-1)(x+1)+1 \geq 0$

Istnieje takie x, że zachodzi warunek x ≤ 5

$\bigvee_x x \leq 5$

Dla każdej liczby rzeczywistej istnieje takie x, że (x+1)(x+6)=4

$\bigwedge_{x\in R}\bigvee_x (x+1)(x+6)=4$

Zaprzeczenie zdań z kwantyfikatorami:

$\sim\bigwedge_x p(x) \Leftrightarrow \bigvee_x \sim p(x)$ $\sim\bigvee_x p(x) \Leftrightarrow \bigwedge_x \sim p(x)$

BUDOWA I DOWODZENIE TWIERDZEŃ

Twierdzenia matematyczne mają na ogół postać implikacji. Jeżeli implikacja p=>q jest twierdzeniem, to jej poprzednik p nazywamy założeniem, a następnik q tezą.

przykład:
Jeżeli n jest podzielne przez 6 - założenie
to n jest podzielne przez 3 - teza
6/n=>3/n

Jeżeli implikacja p=>q jest twierdzeniem, to p nazywamy <u>warunkiem wystarczającym na to, aby q</u>, a q <u>warunkiem koniecznym na to, aby p</u>.
przykład:
6/n jest warunkiem wystarczającym na to, aby 3/n
3/n jest warunkiem koniecznym na to, aby 6/n

<u>def.</u>
Dla danej implikacji p=>q, którą nazywamy <u>prostą</u>, implikację q=>p nazywamy <u>odwrotną</u>, ~p=>~q nazywamy <u>przeciwną</u>, a implikację ~q=>~p nazywamy <u>przeciwstawną</u>.

<u>Tw.</u>
1) (p=>q)<=>(~q=>~p) 2) (q=>p)<=>(~p=>~q)

prosta przeciwstawna odwrotna przeciwna

<u>**D**owód:</u>
1)

p	q	p=>q	~p	~q	~q=>~p	(p=>q)<=>(~q=>~p)
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1

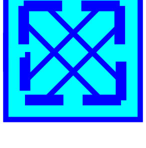
2)

q	p	q=>p	~q	~p	~p=>~q	(q=>p)<=>(~p=>~q)
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Zatem twierdzenie jest prawdziwe.

Zależności te można zilustrować tzw. kwadratem logicznym.

p=>q q=>p



~p=>~q ~q=>~p

Przy wierzchołkach kwadratu położonych wzdłuż tych samych przekątnych umieszczone są implikacje równoważne.

Każde twierdzenie matematyczne musi być udowodnione. Dowody matematyczne składają się z prostych kroków, polegających na uznaniu pewnych zdań za prawdziwe (wniosków) w logicznej konsekwencji zdań poprzednich (przesłanek). Te elementarne ogniwa dowodów opierają się na regułach wnioskowania (regułach dowodzenia). Każda z tych reguł jest implikacją związaną z pewnym prawem rachunku zdań, np. prawu przechodniości implikacji reguła dowodzenia, którą symbolicznie zapisujemy:

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow q & \\ \underline{q \Rightarrow r} & \text{przesłanki} \\ p \Rightarrow r & \text{wniosek} \end{array}$$

przykład:
Zbadaj, czy dany schemat jest regułą dowodzenia.

$$1)\ \begin{array}{l} p \\ \underline{p \Rightarrow q} \\ q \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{l} \underline{\ p\ .} \\ q \Rightarrow p \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{l} \sim q \Rightarrow r \\ \underline{\sim q \Rightarrow \sim r} \\ q \end{array}$$

1) [p ^ (p=>q)]=>q

p	q	p=>q	p ^ (p=>q)	[p ^ (p=>q)]=>q
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Schemat jest regułą dowodzenia.

2) p=>(q=>p)

p	q	q=>p	p=>(q=>p)
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

Schemat jest regułą dowodzenia.

3) [(~q=>r) ^ (~p=>~r)]=>q

q	r	~q	~q=>r	~r	~q=>~r	(~q=>r) ^ (~q=>~r)	[(q=>r) ^ (~q=>~r)]=>q
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1

Schemat jest regułą dowodzenia.

Dowody apagogiczne są to dowody, przez sprowadzenie do niedorzeczności (do sprzeczności). Metoda dowodów apagogicznych polega na tym, że zaprzeczamy twierdzeniu, które mamy udowodnić. Jeżeli z założenia, że twierdzenie jest fałszywe, wnioskujemy sprzeczność, to tym samym uznajemy, że twierdzenie jest prawdziwe. Dowody apagogiczne inaczej nazywamy dowodami nie wprost.
przykład:

Udowodnij, że liczba $\sqrt{3}$ jest liczbą niewymierną.

Zakładamy, że liczba $\sqrt{3}$ jest liczbą wymierną. Możemy ją więc przedstawić w postaci nieskracalnego ułamka.

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q}$$

$$3 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$3q^2 = p^2$$

Liczba $3q^2$ jest podzielna przez 3, zatem liczba p też jest podzielna przez 3.

$$3/p \Rightarrow p = 3k$$

Podstawiając, otrzymamy:

$$3q^2 = 9k^2$$

$$q^2 = 3k^2$$

Liczba $3k^2$ jest podzielna przez 3, zatem liczba q też jest podzielna przez 3.

$$3/q$$

Ponieważ liczby p i q są podzielne przez tą samą liczbę , ułamek $\frac{p}{q}$ jest skracalny.

Otrzymaliśmy sprzeczność wynikającą z założenia, że ułamek jest nieskracalny, zatem twierdzenie początkowe jest prawdziwe.

ALGEBRA ZBIORÓW

Zbiory oznaczamy dużymi literami alfabetu (A, B, C), natomiast elementy zbiorów małymi (a, b, c).

Zdanie "element a należy do zbioru A" zapisujemy: $a \in A$.

Zdanie "element a nie należy do zbioru A" zapisujemy: $a \notin A$.

Zbiór pusty to zbiór, który nie ma żadnych elementów i oznaczamy go " $\emptyset$ ".

Zbiór skończony to zbiór, który ma skończoną liczbę elementów i piszemy A={a, b, c}

def. (równość zbiorów)

Dwa zbiory A i B są równe (A= B), jeżeli każdy element zbioru A należy do B i każdy element zbioru B należy do A.

$$A=B \Leftrightarrow \bigwedge_{x} (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

przykład:

A = {3, 4, 7}

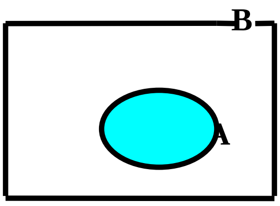
B = {3, 4, 7}

def. (podzbiory)

Mówimy, że zbiór A zawiera się w zbiorze B (jest podzbiorem zbioru B), jeżeli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B i piszemy $A \subset B$.

$$A \subset B \Leftrightarrow \bigwedge_{x} (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

przykład:



B = {1, 2, 3}

A = {1, 2}

$A \subset B$

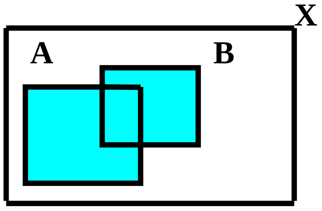
Dla każdego zbioru A: $\varnothing \in A$ i $A \in A$
Jeśli $A \subset B$ i $A \neq B$, to A jest podzbiorem właściwym zbioru B.

DZIAŁANIA NA ZBIORACH

def. (suma zbiorów)

Sumą (złączeniem) zbiorów A i B nazywamy zbiór wszystkich elementów, które należą do zbioru A lub do zbioru B.

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

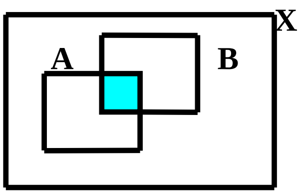


A ={1, 3, 5)
B ={ 7, 3, 2}
$A \cup B$ = {1, 2, 3, 5, 7}

def. (iloczyn zbiorów)

Iloczynem (częścią wspólną) zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą do zbioru A i do zbioru B; piszemy $A \cap B$.

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

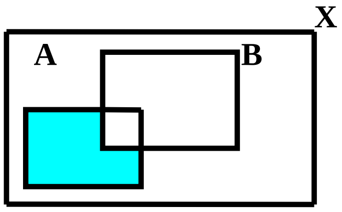


A = {1, 3, 5)
B = {2, 3, 7)
$A \cap B$ = {3}

def. (różnica zbiorów)

Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór wszystkich elementów, które należą do A i nie należą do B i zapisujemy A\B.

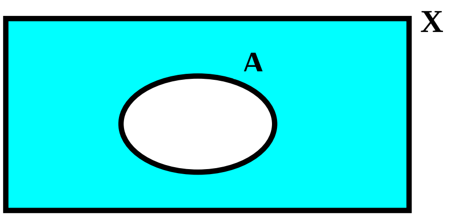
$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$



A={1, 2, 3, 4}
B= {2, 4, 5, 6, 7, 39}
A\B={1, 3}

def. (dopełnienie zbioru)

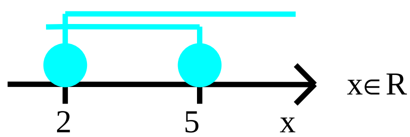
Jeżeli przez X oznaczymy całą przestrzeń, to dopełnieniem A\` zbioru A względem zbioru X nazywamy zbiór określony wzorem: A\`= X\A



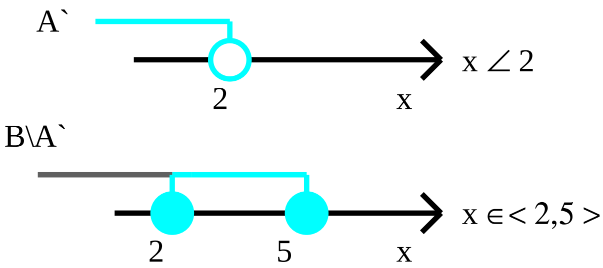
przykład:
A={x; $x \geq 2$} B={x; $x \leq 5$}
Wyznacz :

1) A∪B   2) A∩(B\A`)  3) A\B`

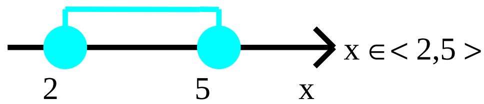
1) A∪B



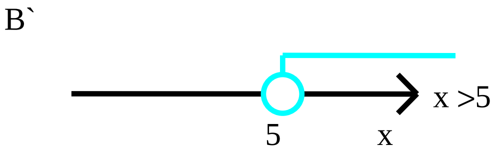
2) A∩(B\A`)

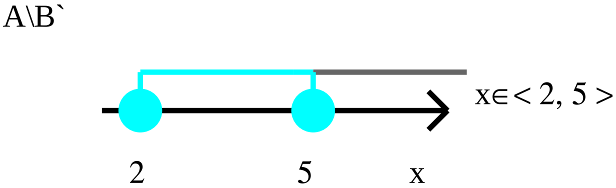


A∩(B\A`)



3)A\B`





ZBIORY I ZDANIA

Każde działanie w rachunku zbiorów ma odpowiednik w rachunku zdań i odwrotnie.
Sumie zbiorów odpowiada alternatywa zdań (w tym sensie, że $a \in A \cup B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in A$ lub $a \in B$).
Iloczynowi zbiorów odpowiada koniunkcja zdań.
Zawieraniu się zbioru w zbiorze odpowiada implikacja zdań.
Równości zbiorów odpowiada równoważność zdań.
Dopełnieniu zbioru do zbioru pełnego (przestrzeni) odpowiada negacja zdania.

PRAWA DZIAŁAŃ NA ZBIORACH

1) Przemienność dodawania dwu zbiorów $A \cup B = B \cup A$

<u>**D**owód:</u> (p v q) <=>(q v p)

p	q	p v q	q v p	(p v q)<=>(q v p)
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	0	0	1

Zatem twierdzenie jest prawdziwe.

2) Przemienność mnożenia dwu zbiorów $A \cap B = B \cap A$

<u>**D**owód:</u> (p ^ q)<=>(q ^ p)

p	q	p ^ q	q ^ p	(p ^ q)<=>(q ^ p)
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	0	0	1

Zatem twierdzenie jest prawdziwe.

3)Łączność sumy zbiorów
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

<u>**D**owód:</u> (p v q) v r <=> p v (q v r)

p	q	r	p v q	(p v q) v r	q v r	p v (q v r)	(p v q) v r<=>p v (q v r)
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1

Zatem twierdzenie jest prawdziwe.

4)Łączność iloczynu zbioru
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

<u>**D**owód: (p ^ q) ^ r <=> p ^ (q ^ r)</u>

p	q	r	p ^ q	(p ^ q) ^ r	q ^ r	p ^ (q ^ r)	(p ^ q) ^ r<=>p ^ (q ^ r)
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1

Zatem twierdzenie jest prawdziwe.

5) Rozdzielność mnożenia względem dodawania
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Dowód: p ^ (q v r)<=>(p ^ q) v (p ^ r)

p	q	r	q v r	p ^ (q v r)	p ^ q	p ^ r	(p ^ q) v (p ^ r)	p ^ (q v r)<=> (p ^ q) v (p ^ r)
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

Zatem twierdzenie jest prawdziwe.

6) Rozdzielność dodawania względem mnożenia $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Dowód: p v (q ^ c)<=>(p v q) ^ (p v c)

p	q	c	q ^ c	p v (q ^ c)	p v q	p v c	(p v q) ^ (p v c)	p v (q ^ c)<=> (p v q) ^ (p v c)
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

Zatem twierdzenie jest prawdziwe.

7) Prawa de Morgana

$(A \cup B)` = A` \cap B`$

$(A \cap B)` = A` \cup B`$

(prawa te zostały udowodnione wcześniej)

Zestawienie niektórych praw rachunku zbiorów i praw rachunku zdań:

ZBIORY	ZDANIA
przemienność sumy $A \cup B = B \cup A$	przemienność alternatywy (p v q)<=>(q v p)
przemienność iloczynu $A \cap B = B \cap A$	przemienność koniunkcji (p ^ q)<=>(q ^ p)
łączność sumy $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	łączność alternatywy [p v (q v c)]<=>[(p v q) v c]
łączność iloczynu $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	łączność koniunkcji [p ^ (q ^ c)]<=>[(p ^ q) ^ c]
prawa de Morgana $(A \cup B)` = A` \cap B`$ $(A \cap B)` = A` \cup B`$	prawa de Morgana ~(p ^ q)<=>~p v ~q ~(p v q)<=>

ZADANIA:

1)Sprawdź, czy wyrażenie jest prawem rachunku zdań:

a)[(p=>q) v r]<=>~p

b)[p v (q ^ r)]=>~(p<=>r)

c)[(p v q)=>(p<=>q)] ^ q

2) Dane są funkcje zdaniowe o argumencie $x \in R$

p(x) <=> x¿-3x+2>0 q(x) <=> x¿ -4x<0

Czy prawdziwe są zdania:

a) $\bigwedge_{x}$ [p(x) ^ q(x)]

b) $\bigwedge_{x}$ [p(x) v q(x)]

c) $\bigvee_{x}$ [p(x) v q(x)]

3) Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, A\`, B\`, $A \cup (B \setminus A`)$;

$A=\{x;\ x \in <-2 , 5) \cup (5 , 6)\}$

B={x; x¿-4 ≥ 0

4) Udowodnij “nie wprost”, że liczba $\sqrt{7}$ jest liczbą niewymierną.

Rozwiązanie łamigłówki:

Należy na przykład zadać pytanie: “którą drogę do wsi M wskazałby mi pański brat?”