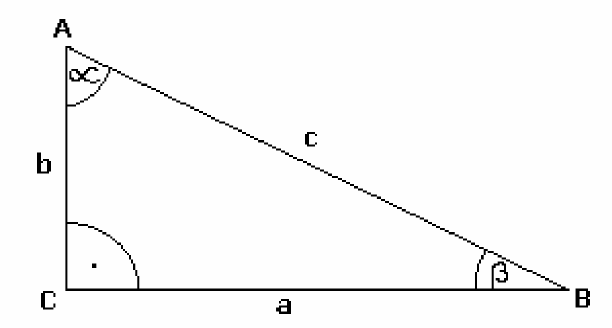
TRYGONOMETRIA

I. Funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym

Niech trójkąt ABC będzie dowolnym trójkątem prostokątnym (patrz rysunek)



Def.

1) Sinusem kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do długości przeciwprostokątnej.
2) Cosinusem kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie α do długości przeciwprostokątnej.
3) Tangensem kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do długości drugiej przyprostokątnej.
4) Cotangensem kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie α do długości drugiej przyprostokątnej.

Czyli funkcje trygonometryczne kąta α wyraża się wzorami:

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y}$.

Wartości funkcji trygonometrycznych ważniejszych kątów:

α	sin α	cos α	tg α	ctgα
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Rozwiązywanie trójkątów polega na obliczaniu długości wszystkich ich boków oraz wyznaczaniu miar ich kątów. Przy rozwiązywaniu trójkątów prostokątnych korzystamy z:

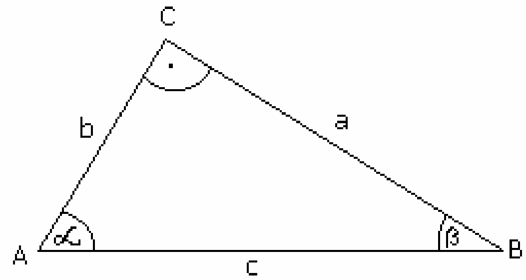
1) funkcji trygonometrycznych;
2) twierdzenia Pitagorasa;
3) twierdzenia o sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta prostokątnego:
   $\alpha + \beta = 90°$

Przykład:

W trójkącie prostokątnym dane są: kąt α=60° i długość boku a= $\sqrt{12}$. Rozwiąż ten trójkąt.

Dane:

$$a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$
$$\alpha = 60°$$



Korzystając z twierdzenia o sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta prostokątnego obliczamy miarę kąta β:

$\beta = 90° - \alpha$

$\beta = 90° - 60° = 30°$

Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych trójkąta prostokątnego obliczamy długość boku b:

$\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$ i $\text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,60° = \sqrt{3}$

czyli $b = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$b = \frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3} = 2$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość przeciwprostokątnej c:

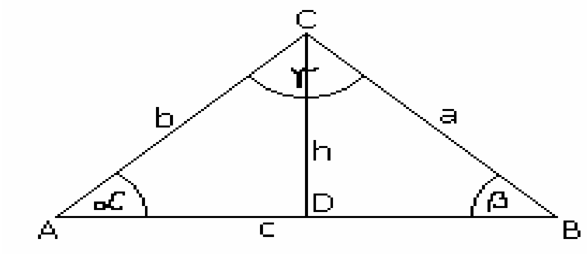
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$c = \sqrt{(\sqrt{12})^2 + 2^2} = 4$

Odp. Długości boków w danym trójkącie wynoszą odpowiednio $a=2\sqrt{3}$, $b=2$, $c=4$ natomiast miary kątów 30°, 60°, 90°.

Zadanie 1.1.

W trójkącie równoramiennym ABC dane są długość ramienia 4 i długość podstawy $4\sqrt{2}$.
Rozwiąż trójkąt.
Kreślimy szkic:



:

$a=b=4$ $c=4\sqrt{2}$

$\alpha=\beta$ $|AD|=0{,}5|AB|=2\sqrt{2}$

Korzystając z tw. Pitagorasa obliczamy h

$h=\sqrt{|AC|^2 - |AD|^2}$

$h=2\sqrt{2}$

Korzystając z definicji funkcji tangens wyznaczamy wartość kąta α (ΔABC)

$\text{tg}\alpha=\frac{|CD|}{|AD|}$ $\text{tg}\alpha=1$

Stąd $\alpha=\beta=45°$

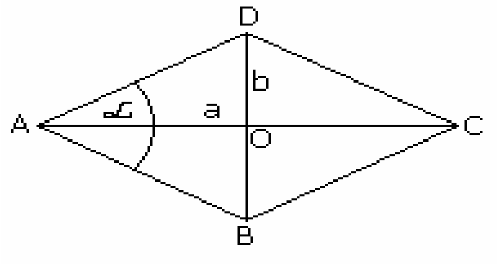
Z twierdzenia o sumie kątów wewnętrznych trójkąta otrzymujemy:

$\gamma=180°-\alpha-\beta$; $\gamma=90°$

Odp. Wartości miar kątów wewnętrznych trójkąta wynoszą odpowiednio $\alpha=45°$, $\beta=45°$, $\gamma=90°$.

Zadanie 1.2.

W rombie dane są bok długości 10 i kąt ostry 60°. Oblicz długość przekątnych i pole rombu.



$|AB|=|BC|=|CD|=|DA|=10$

$\alpha=60°$ $\quad 2|AO|=a \quad 2|BO|=b$

W rombie przekątne przecinają się pod kątem prostym i dzielą na pół. Otrzymujemy zatem cztery trójkąty przystające.

Z definicji funkcji sinus obliczamy długość $|OB|$

$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{|BO|}{|AB|}$ $\qquad |BO|=5$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość $|AO|$.

$|AO|=\sqrt{|AB|^2-|BO|^2}$ $\qquad |AO|=5\sqrt{3}$

Obliczamy długości przekątnych rombu:

$a=2|AO|$ $\quad a=10\sqrt{3}$

$b=2|OB|$ $\quad b=10$

Ze wzoru na pole rombu otrzymujemy:

$S=0,5\cdot a\cdot b$ $\quad S=50\sqrt{3}$

Odp. Przekątne rombu mają długość 10 i $10\sqrt{3}$, a jego pole wynosi $50\sqrt{3}$.

Zadanie 1.3. (tzw. DeSeR czyli zadanie Do Samodzielnego Rozwiązania)

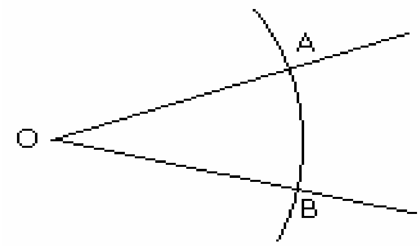
W trójkącie równoramiennym dane są długość podstawy 10 i kąt przy podstawie 30°. Oblicz długość promienia koła wpisanego w trójkąt i opisanego na trójkącie.

Zadanie 1.4. (DeSer)

W trójkącie prostokątnym długość przeciwprostokątnej wynosi 8, a kąt ostry 20°. Rozwiąż ten trójkąt.

<u>II. Miara łukowa kąta.</u>

Niech dany będzie kąt o wierzchołku O. Z punktu O jako środka zakreślamy okrąg o promieniu r. Część wspólną okręgu i kąta nazywamy łukiem, na którym opiera się kąt.



Zauważmy, że stosunek długości łuku, na którym oparty jest kąt do promienia tego łuku dla danego kąta jest wielkością stałą. Stosunek ten nazywamy **miarą łukową kąta.**

Jednostką miary łukowej kąta jest radian (rad).

1 rad jest to miara kąta opartego na łuku, którego długość równa jest jego promieniowi.

Kąt pełny oparty jest na łuku długości $2\pi r$, zatem jego miara łukowa wynosi 2π.

Czyli 360° odpowiada 2πrad.

Analogicznie: 180° - πrad

$90° \quad - \quad \frac{\pi}{2}$rad

$60° \quad - \quad \frac{\pi}{3}$rad

$1° \quad - \quad \frac{\pi}{180}$rad

Przykład

Oblicz miarę łukową kątów:

$10° \text{ - } \quad 10\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{18}$

$37° \text{ - } \quad 37\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{37\pi}{180}$

Oblicz miarę stopniową kątów:

$\frac{\pi}{9}\text{rad} \quad - \quad \frac{180}{\pi}\cdot\frac{\pi}{9}=18^0$

$\frac{2\pi}{15}\text{rad} \text{ - } \quad \frac{180}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{15}=24^0$

Zadanie 2.1.

Z wierzchołka kąta α jako ze środka zakreślono okrąg o promieniu r. Oblicz długość łuku AB, na którym opiera się kąt α, mając daną miarę kąta α w radianach i długość promienia r.

a) α=2 ; r=2

Obliczamy długość okręgu o promieniu r:

o=2πr o=4π

Układamy proporcję (długość całego okręgu odpowiada kątowi pełnemu, długość łuku AB zaś kątowi α)

$\frac{2\pi}{2}=\frac{4\pi}{AB}$

Stąd AB=4

Odp. Długość łuku AB wynosi 4.

b) (DeSeR) α=1,5 ; r=5

c) (DeSeR) α=1 ; r=6.

Zadanie 2.2. (DeSeR)

Wyznacz miarę łukową kątów: 23°, 123°, 150°, 1998°.

Zadanie 2.3. (DeSeR)

Oblicz miarę stopniową kątów: $\frac{7\pi}{8},\frac{3\pi}{4},\frac{1}{1998}$.

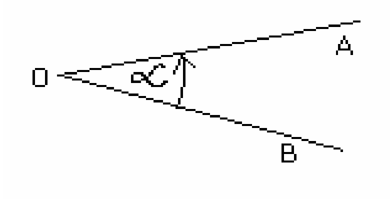
<u>III. Funkcje trygonometryczne kąta skierowanego.</u>

Def.

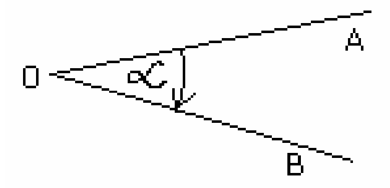
Kątem skierowanym nazywamy uporządkowaną parę półprostych o wspólnym początku. Pierwszą z półprostych nazywamy początkowym ramieniem kąta, drugą końcowym ramieniem kąta.

Przyjmujemy: jeśli kąt jest skierowany przeciwnie do ruchu wskazówek zegara (przypadek a), to jego miarę przyjmujemy ze znakiem +, w przeciwnym wypadku (przypadek b)ze znakiem -.

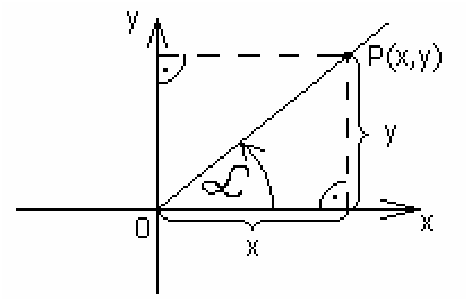
przypadek a:



przypadek b:



Niech α będzie dowolnym kątem skierowanym w układzie współrzędnych takim, że wierzchołek kąta leży w początku układu oraz ramię początkowe pokrywa się z dodatnią półosią OX (patrz rysunek poniżej).



Na końcowym ramieniu kąta obieramy dowolny punkt P różny od wierzchołka.
Niech r oznacza odległość punktu P od początku układu współrzędnych (odcinek r nazywamy promieniem wodzącym).

r = OP ; r $= \sqrt{x^2 + y^2}$

Stosunki: $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{x}{y}, \frac{y}{x}$ zależą wyłącznie od położenia końcowego ramienia kąta, nie zależą zaś od wyboru punktu P. Wynika to z twierdzenia Talesa.
Możemy więc każdemu kątowi skierowanemu α przyporządkować każdy z powyższych stosunków, a przyporządkowania te będą funkcjami.

Def.

sin α $= \frac{y}{r}$

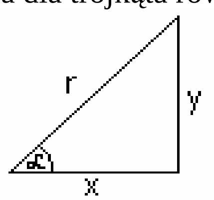
cos α $= \frac{x}{r}$

tg α $= \frac{y}{x}$ dla $x \neq 0$

ctg α $= \frac{x}{y}$ dla $y \neq 0$

<u>IV. Wartości funkcji trygonometrycznych dla niektórych kątów.</u>

1. $\alpha = 45°$
   Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta równoramiennego prostokątnego:



x=y

r $= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$

$\sin 45° = \frac{y}{r} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

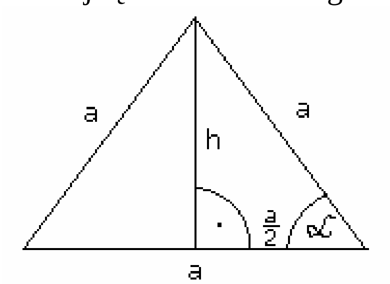
$\cos 45° = \frac{x}{r} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\mathrm{tg}\, 45° = \frac{y}{x} = 1$

$\mathrm{ctg}\, 45° = \frac{x}{y} = 1$

2. $\alpha = 60°$

   Korzystamy z tw. Pitagorasa dla trójkąta równobocznego:



$h = \sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\sin 60° = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\mathrm{tg}\, 60° = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$

$\cos 60° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$

$\mathrm{ctg}\, 60° = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3. Korzystamy z poprzedniego trójkąta:

$\sin 30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$

$\cos 30° = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\mathrm{tg}\, 30° = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\mathrm{ctg}\, 30° = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$

Tabela wartości funkcji trygonometrycznych dla wybranych kątów:

α	sin α	cos α	tg α	ctg α
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	1	0	nie istnieje	0
180°	0	-1	0	nie istnieje
270°	-1	0	nie istnieje	0
0°	0	1	0	nie istnieje

Zadanie 4.1.

Oblicz

a) $\frac{\mathrm{tg}\, 30^0 \cdot \cos 45^0}{\sin 270^0} \cdot \mathrm{ctg}\, 30^0 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{-1} \cdot \sqrt{3} = -\frac{3\sqrt{2}}{6}$

b) (DeSeR) $\left[\dfrac{\sin 45^0 - \operatorname{tg} 30^0}{\operatorname{ctg} 30^0}\right] \cdot \cos 90^0$

c) (DeSeR) $\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{3} \cdot (-\cos\pi)}\right]^{\cos\frac{\pi}{3}}$

V. Znaki funkcji trygonometrycznych.

Rozpatrując w układzie współrzędnych różne końcowe położenia ramienia kąta skierowanego możemy zauważyć, że:

a) jeśli $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, tzn. jest kątem ćwiartki pierwszej, wówczas znaki wszystkich funkcji trygonometrycznych są dodatnie;

b) jeśli $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, tzn. jest kątem ćwiartki drugiej, wówczas jedynie funkcja sinus przyjmuje wartości dodatnie – wartości pozostałych funkcji są ujemne;

c) jeśli $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, tzn. jest kątem trzeciej ćwiartki, to funkcje tangens i cotangens przyjmują wartości dodatnie, a sinus i cosinus ujemne;

d) jeśli $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, tzn. jest kątem ćwiartki czwartej, to jedynie funkcja cosinus przyjmuje wartości dodatnie – wartości pozostałych funkcji są ujemne.

Powyższe ilustruje tabelka:

α	I ćwiartka	II ćwiartka	III ćwiartka	IV ćwiartka
sin α	+	+	-	-
cos α	+	-	-	+
tg α	+	-	+	-
ctg α	+	-	+	-

VI. Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta.

Tw. (tzw. jedynka trygonometryczna)

Dla dowolnego kąta α zachodzi:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Dowód:

Z określenia funkcji trygonometrycznych:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

C.N.D.

Tw.

Dla dowolnego kąta α (dla którego lewe i prawe strony równania mają sens) zachodzi:

1) tg α= $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
2) ctg α= $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

3) tg α= $\frac{1}{\text{ctg}\,\alpha}$

4) ctg α= $\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$

5) tgα · ctgα=1

Dowód:

z określenia funkcji trygonometrycznych:

1) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{r} \cdot \frac{r}{x} = \frac{y}{x} = \text{tg}\,\alpha$ C.N.D.

2) j.w.

3) $\frac{1}{\text{ctg}\,\alpha} = \frac{1}{\frac{x}{y}} = \frac{y}{x} = \text{tg}\,\alpha$ C.N.D.

4) j.w.

5) $\text{tg}\,\alpha \cdot \text{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = 1$ C.N.D.

Przykład:

Wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α jeśli: sinα= $\frac{1}{2}$ i $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

a) Korzystając z „jedynki trygonometrycznej” wyznaczamy cosα:

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$\cos^2\alpha = 1 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$

stąd cosα= $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\vee$ cosα=- $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ponieważ α jest kątem ćwiartki drugiej, zatem cos α=- $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Korzystając z tw.(1) wyznaczamy tgα:

tgα= $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

tgα= $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) Korzystając z tw.(4) wyznaczamy ctgα:

ctgα= $\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$

ctgα= $1 \cdot (-\frac{3}{\sqrt{3}}) = -\sqrt{3}$

Odp. Wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α wynoszą odpowiednio:
cosα=- $\frac{\sqrt{3}}{2}$, tgα=- $\frac{\sqrt{3}}{3}$, ctgα=- $\sqrt{3}$.

Zadanie 6.1. (DeSeR)

Znajdź wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α wiedząc, że:

a) cosα=0,5 α∈(π,2π)

b) ctgα=1 α∈<0,π>

c) tgα=0,5 $\alpha \in$ <0,5π;1,5π>

Zadanie 6.2.

Oblicz

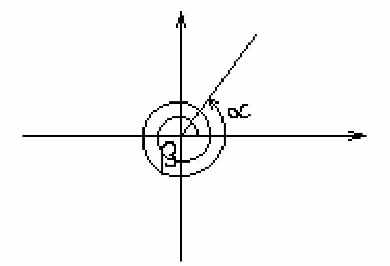
a) $\sin x + \sqrt{\mathrm{ctg}^2 x - \cos^2 x} = \sin x + \sqrt{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x} = \sin x + \sqrt{\frac{\cos^2 x(1-\sin^2 x)}{\sin^2 x}} =$

$\sin x + \sqrt{\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}} = \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x}$

b) (DeSeR) $\sqrt{\sin^2 x \cdot (1+\mathrm{ctg}\, x) + \cos^2 x \cdot (1+\mathrm{tg}\, x)}$

VII. Wzory redukcyjne:

1. Uogólnienie pojęcia kąta.



Dotychczas braliśmy pod uwagę kąty w zakresie od 0° do 360°, tj. takimi, dla których ramię końcowe wykonało co najwyżej jeden obrót. Wyobraźmy sobie jednak, że ramię końcowe wykonało więcej niż jeden obrót (np. trzy) i jeszcze obrót o jakiś kąt α (np. α=45°). Powiemy wtedy, że suma miar wszystkich zakreślonych kątów wynosi:
$3 \cdot 360° + 45° = 1125°$
Możemy więc mówić o kątach większych niż kąt pełny.

Zauważmy, że każdy kąt β możemy zapisać w postaci:
$\beta = \alpha + k \cdot 360$, gdzie k$\in$C, $\alpha \in$ <0° , 360°)
$\beta = \alpha + 2k\pi$, gdzie k$\in$ C, $\alpha \in$<0 , 2π)

Przykład:

Następującą liczbę stopni kątowych przedstawić w postaci $k \cdot 360° + \alpha$.
$435° = 1 \cdot 360° + 75°$
$1357° = 3 \cdot 360° + 277°$
$-685° = -2 \cdot 360° + 35°$
$-1080° = -3 \cdot 360° + 0°$

2. Okresowość funkcji trygonometrycznych.

Każdej liczbie β stopni kątowych przyporządkowaliśmy kąt α taki, że $\beta = k \cdot 360° + \alpha$. Zauważmy też, że:

Tw.

$\sin(k \cdot 360 + \alpha) = \sin\alpha$
$\cos(k \cdot 360 + \alpha) = \cos\alpha$
$\mathrm{tg}(k \cdot 360 + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}(k \cdot 360 + \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$

Wnioskujemy stąd, że funkcje trygonometryczne są funkcjami okresowymi. Wzory z powyższego twierdzenia nazywają się wzorami redukcyjnymi gdyż pozwalają redukować obliczenia funkcji dowolnej liczby stopni kątowych do obliczania funkcji kątów zawartych pomiędzy 0° a 360°. Dalsze wzory redukcyjne pozwalają sprowadzić wszelkie obliczenia do kątów pierwszej ćwiartki.

3. Wzory redukcyjne.

Tw.

Dla dowolnego kąta α zachodzi:

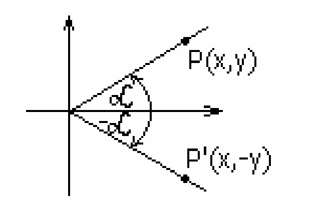
a) sin (-α) = -sin α

b) cos (-α)= cos α

c) tg (-α) = -tg α

d) ctg (-α) = -ctgα

Dowód:



Korzystamy z określenia funkcji trygonometrycznych:

sin (-α) = $\frac{-y}{r} = -\frac{y}{r}$ = -sin α

cos (-α) = $\frac{x}{r}$ = cos α

tg (-α) = $\frac{-y}{x} = -\frac{y}{x}$ = -tg α

ctg (-α) = $\frac{x}{-y} = -\frac{x}{y}$ = -ctg α

Wniosek:

Funkcja cos jest parzysta zaś pozostałe są nieparzyste.

Tw.

Dla dowolnego kąta α zachodzi:

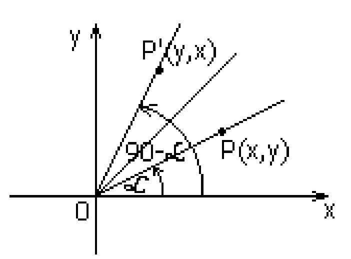
a) sin (90-α) = cos α

b) cos (90-α) = sin α

c) tg (90-α) = ctg α

d) ctg (90-α) = tg α

Dowód:



Zauważmy, że końcowe ramiona kątów α i 90-α są symetryczne względem dwusiecznej kąta XOY. Obierając punkt P (x,y) na końcowym ramieniu kąta α i punkt P’ o współrzędnych (x’,y’) na końcowym ramieniu kąta 90-α tak, aby |OP|=|OP’|=r , otrzymamy y’=x i x’=y. Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych otrzymujemy:

a) sin (90-α) = $\frac{y'}{r} = \frac{x}{r}$ = cos α

b) cos (90-α) = $\frac{x'}{r} = \frac{y}{r}$ = sin α

c) $\quad \text{tg}\,(90-\alpha) = \dfrac{y'}{x'} = \dfrac{x}{y} = \text{ctg}\,\alpha$

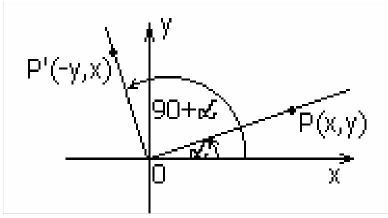
d) $\quad \text{ctg}\,(90-\alpha) = \dfrac{x'}{y'} = \dfrac{y}{x} = \text{tg}\,\alpha$

C.N.D.

Tw.

a) sin (90+α) = cos α
b) cos (90+α) = -sin α
c) tg (90+α) = -ctg α
d) ctg (90+α) = -tg α

Dowód:



x’=-y y’=x

a) $\quad \sin\,(90+\alpha) = \dfrac{y'}{r} = \dfrac{x}{r} = \cos\alpha$

b) $\quad \cos\,(90+\alpha) = \dfrac{x'}{r} = \dfrac{-y}{r} = -\sin\alpha$

c) $\quad \text{tg}\,(90+\alpha) = \dfrac{y'}{x'} = \dfrac{x}{-y} = -\text{ctg}\,\alpha$

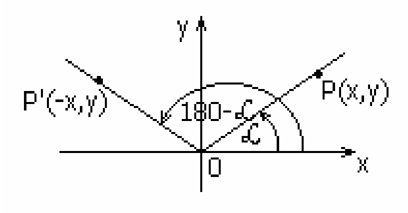
d) $\quad \text{ctg}\,(90+\alpha) = \dfrac{x'}{y'} = \dfrac{-y}{x} = -\text{tg}\,\alpha$

C.N.D.

Tw.

a) sin (180-α) = sin α
b) cos (180-α) = -cos α
c) tg (180-α) = -tg α
d) ctg (180-α) = -ctg α

Dowód:



a) $\quad \sin\,(180-\alpha) = \dfrac{y'}{r} = \dfrac{y}{r} = \sin\alpha$

b) $\quad \cos\,(180-\alpha) = \dfrac{x'}{r} = \dfrac{-x}{r} = -\cos\alpha$

c) $\quad \text{tg}\,(180-\alpha) = \dfrac{y'}{x'} = \dfrac{y}{-x} = -\text{tg}\,\alpha$

d) $\quad \text{ctg}\,(180-\alpha) = \dfrac{x'}{y'} = \dfrac{-x}{y} = -\text{ctg}\,\alpha$

C.N.D.

Tw.

a) $\sin(180+\alpha) = -\sin\alpha$
b) $\cos(180+\alpha) = -\cos\alpha$
c) $\mathrm{tg}(180+\alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$
d) $\mathrm{ctg}(180+\alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$

e) $\sin(270-\alpha) = -\cos\alpha$
f) $\cos(270-\alpha) = -\sin\alpha$
g) $\mathrm{tg}(270-\alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$
h) $\mathrm{ctg}(270-\alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$

i) $\sin(270+\alpha) = -\cos\alpha$
j) $\cos(270+\alpha) = \sin\alpha$
k) $\mathrm{tg}(270+\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$
l) $\mathrm{ctg}(270+\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$

m) $\sin(360-\alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
n) $\cos(360-\alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$
o) $\mathrm{tg}(360-\alpha) = \mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$
p) $\mathrm{ctg}(360-\alpha) = \mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$

Dowód jest analogiczny do powyższych.

Przykład.

Oblicz:

$$\frac{\cos(180^\circ-\alpha)\cdot\sin(-\alpha)\cdot\mathrm{ctg}(-\alpha-90^\circ)}{\mathrm{tg}(540^\circ+\alpha)\cdot\sin(\alpha-180^\circ)\cdot\mathrm{tg}(-\alpha)}$$

Korzystamy ze wzorów redukcyjnych.

$$\frac{\cos(180^\circ-\alpha)\cdot\sin(-\alpha)\cdot\mathrm{ctg}(-\alpha-90^\circ)}{\mathrm{tg}(540^\circ+\alpha)\cdot\sin(\alpha-180^\circ)\cdot\mathrm{tg}(-\alpha)}=\frac{(-\cos\alpha)\cdot(-\sin\alpha)\cdot\mathrm{ctg}[-(90^\circ+\alpha)]}{\mathrm{tg}(360^\circ+180^\circ+\alpha)\cdot\sin[-(180-\alpha)]\cdot(-\mathrm{tg}\,\alpha)}=$$

$$=\frac{\cos\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}(180^0+\alpha)[-\sin(180^0-\alpha)]\cdot\mathrm{tg}(-\alpha)}=\frac{\cos\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha(-\sin\alpha)(-\mathrm{tg}\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{\mathrm{tg}\alpha}=\cos\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$$

Zadanie 7.1.

Oblicz:

a) tg 10°· tg 20°· tg 30°· tg 40°· tg 50°· tg 60°· tg 70°· tg 80°· tg 90°=
=tg(90°-80°)·tg(90°-70°)·tg(90°-60°)·tg(90°-50°)·tg 50°·tg 60°·tg 70°·tg 80°·tg 90°=
=ctg 80°· tg 80°· ctg 70°· tg 70°· ctg 60°· tg 60°·ctg 50°· tg 50°· tg 90°=1
W przykładzie tym korzystamy z własności tgα · ctgα =1

b) (DeSeR) $\dfrac{9\sin150^0-4\cos240^0+12\sin600^0}{3\sin(-45^0)-2\cos(-420^0)}$

c) (DeSeR) $\dfrac{\sin^2(\frac{2\pi}{3})\cdot\cos(-\pi)}{\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{4})\cdot\mathrm{ctg}(\frac{9\pi}{4})}$

Zadanie 7.2.

Przedstaw w najprostszej postaci

a) $\dfrac{\sin(\alpha-180^0)\cdot\cos(450^0-\alpha)}{\sin(540^0+\alpha)\cdot\cos(-270^0+\alpha)}=\dfrac{\sin(180^0+\alpha)\cdot\cos(90^0-\alpha)}{\sin(180^0+\alpha)\cdot\cos(90^0+\alpha)}=\dfrac{\sin\alpha}{-\sin\alpha}=-1$

b) (DeSeR) $\sqrt{\dfrac{\mathrm{tg}(180^0-\alpha)\cdot\mathrm{tg}(450^0+\alpha)}{\sin(90-\alpha)-\cos(180+\alpha)}}$

VIII. Tożsamości trygonometryczne.

Tożsamość trygonometryczna jest to równość zawierająca zmienne występujące pod znakami funkcji trygonometrycznych, prawdziwa dla wszystkich wartości (z wyjątkiem co najwyżej tych, dla których wyrażenia występujące w równości tracą sens).

Aby udowodnić tożsamość poddajemy przekształceniom jedną ze stron (korzystając z odpowiednich wzorów) i staramy się doprowadzić ją do postaci, którą ma druga strona. Można też każdą z obu stron przekształcić oddzielnie tak, aby obie strony doprowadzić do tej samej postaci.

Przykład.

Sprawdź tożsamość:

$$\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\mathrm{ctg}^2\alpha$$

Korzystamy z twierdzeń funkcjach trygonometrycznych tego samego kąta:

$$L=\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2=\mathrm{ctg}^2\alpha$$

Tożsamość jest prawdziwa.

Zadanie 8.1.

Sprawdź tożsamość

a) $\dfrac{\sin x}{1+\cos}+\dfrac{1+\cos x}{\sin x}=\dfrac{2}{\sin x}$

L=$\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin^2 x+1+2\cos x+\cos^2 x}{(1+\cos x)(\sin x)}=\dfrac{2(1+\cos x)}{(1+\cos x)(\sin x)}=\dfrac{2}{\sin x}$=P.

Odp. Tożsamość jest prawdziwa.

b) $\cos^4 x+\sin^4 x=1-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x$

L=$\cos^4 x+\sin^4 x=(1-\sin^2 x)\cos^2 x+(1-\cos^2 x)\sin^2 x=\cos^2 x+\sin^2 x-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x=$

$=1-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x$=P.

Odp. Tożsamość jest prawdziwa.

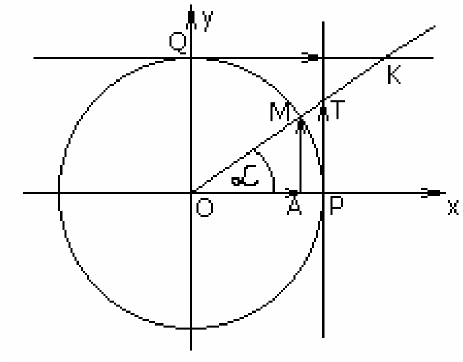
c) (DeSeR) $\dfrac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y}{\mathrm{ctg}\,x+\mathrm{ctg}\,y}=\mathrm{tg}\,x\cdot\mathrm{tg}\,y$

d) (DeSeR) $1-2\sin^2 x=\dfrac{1-\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$

e) (DeSeR) $\left(\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}\right)(\sin x+\cos x)=2+\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$

<u>IX. Wykresy funkcji trygonometrycznych.</u>

1) Koło trygonometryczne.
   Nakreślmy na płaszczyźnie okrąg o środku w punkcie 0 i promieniu r=1. Poprowadźmy dwie styczne do tego okręgu: styczną I przez punkt P. przecięcia okręgu z osią OX w dodatniej części i styczną II przez punkt Q przecięcia okręgu z osią OY. Niech α będzie dowolnym kątem skierowanym. Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.



$$\sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{|\overrightarrow{AM}|}{r} = |\overrightarrow{AM}| \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{OA}|} \overset{(*)}{=} \frac{|\overrightarrow{PT}|}{|\overrightarrow{OP}|} = \frac{|\overrightarrow{PT}|}{r} = |\overrightarrow{PT}|$$

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{|\overrightarrow{OA}|}{r} = |\overrightarrow{OA}| \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{PT}|} \overset{(*)}{=} \frac{|\overrightarrow{QK}|}{|\overrightarrow{OQ}|} = \frac{|\overrightarrow{QK}|}{r} = |\overrightarrow{QK}|$$

(*) trójkąty OAM, OQK, OPT są podobne

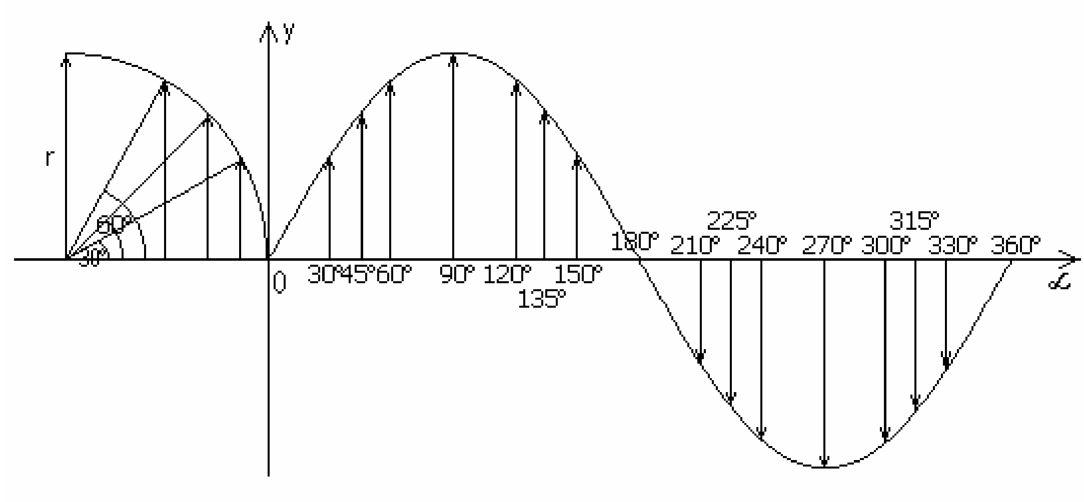
2) Przebieg funkcji sinus.

a) Ze zmian wektora $\overrightarrow{AM}$ w kole trygonometrycznym odczytujemy przebieg funkcji sinus:
- jeśli α rośnie od 0° do 90° to sinα jest dodatni i rośnie od 0 do 1;
- jeśli α rośnie od 90° do 180° to sinα jest dodatni i maleje od 1 do 0;
- jeśli α rośnie od 180° do 270° to sinα jest ujemny i maleje od 0 do -1;
- jeśli α rośnie od 270° do 360° to sinα jest ujemny i rośnie od -1 do 0.

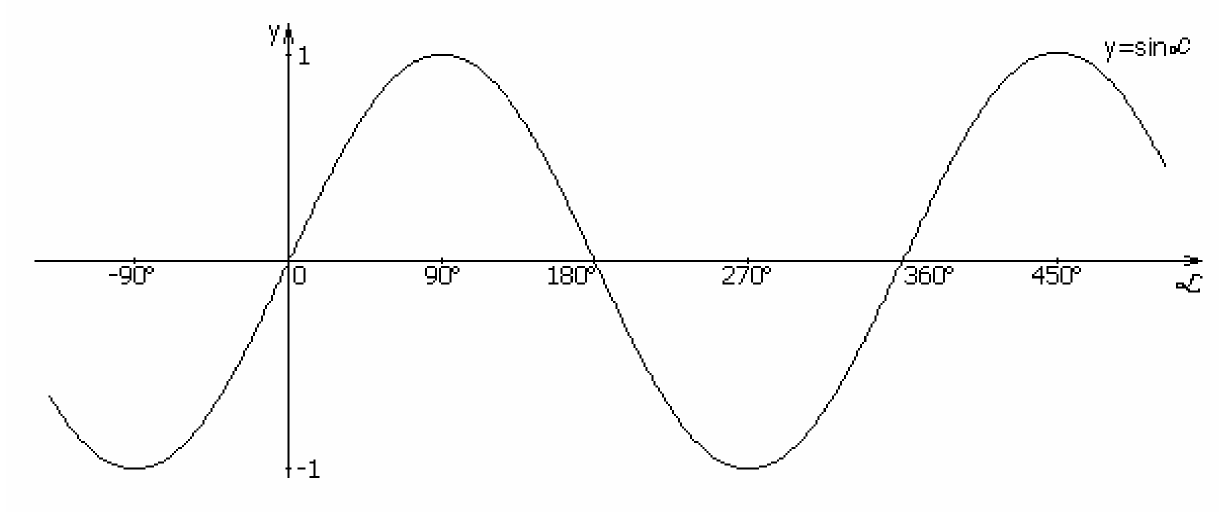
Pozwala nam to naszkicować wykres funkcji sinα w zakresie kątów od 0° do 360°. Dla uzupełnienia wykresu skorzystamy z tego, że:
- funkcja sin jest okresowa;
- funkcja sin jest nieparzysta;

Wykresem funkcji sin jest sinusoida. Aby ją nakreślić, odcinamy na osi OX miary kątów i w otrzymanych punktach tej osi zaczepiamy wektory prostopadłe, których miary równają się wartości funkcji sin (wektora $\overrightarrow{AM}$). Pamiętamy, że na osi OX możemy stosować różne jednostki (miara łukowa lub stopniowa).
Jednostkę na osi OY przyjmujemy równą promieniowi koła trygonometrycznego. Można wtedy wektory $\overrightarrow{AM}$ wprost „wyjmować” z koła i „rozstawiać” na osi OX. Linia łącząca końce tych wektorów jest wykresem funkcji sinus.

b) Konstrukcja sinusoidy



Korzystając z własności funkcji sinus uzupełniamy jej wykres.

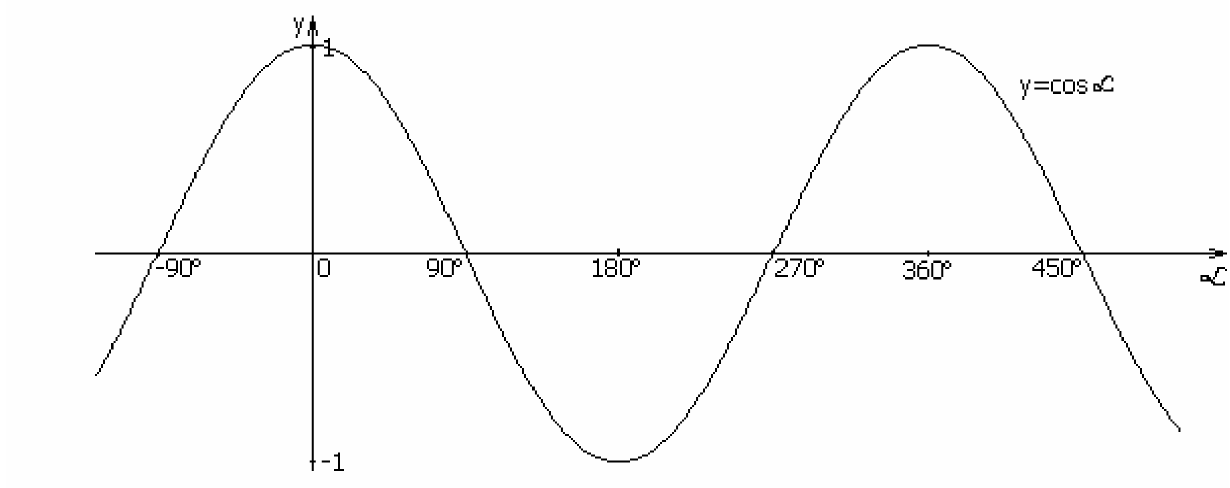


c) własności funkcji sinus:
- D=R ;
- f(D)=<-1,1> ;
- funkcja sinus jest okresowa (T=2π);
- miejsca zerowe funkcji mają postać kπ, k∈C;
- funkcja sinus jest nieparzysta;
- funkcja jest przedziałami monotoniczna;
  - rosnąca w przedziałach postaci $(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi)$;
  - malejąca w przedziałach postaci $(\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\ 3\frac{\pi}{2}+2k\pi)$.

3) W oparciu o koło trygonometryczne (analogicznie) konstruujemy pozostałe wykresy funkcji.

a) Wykres funkcji cosinus (cosinusoida).

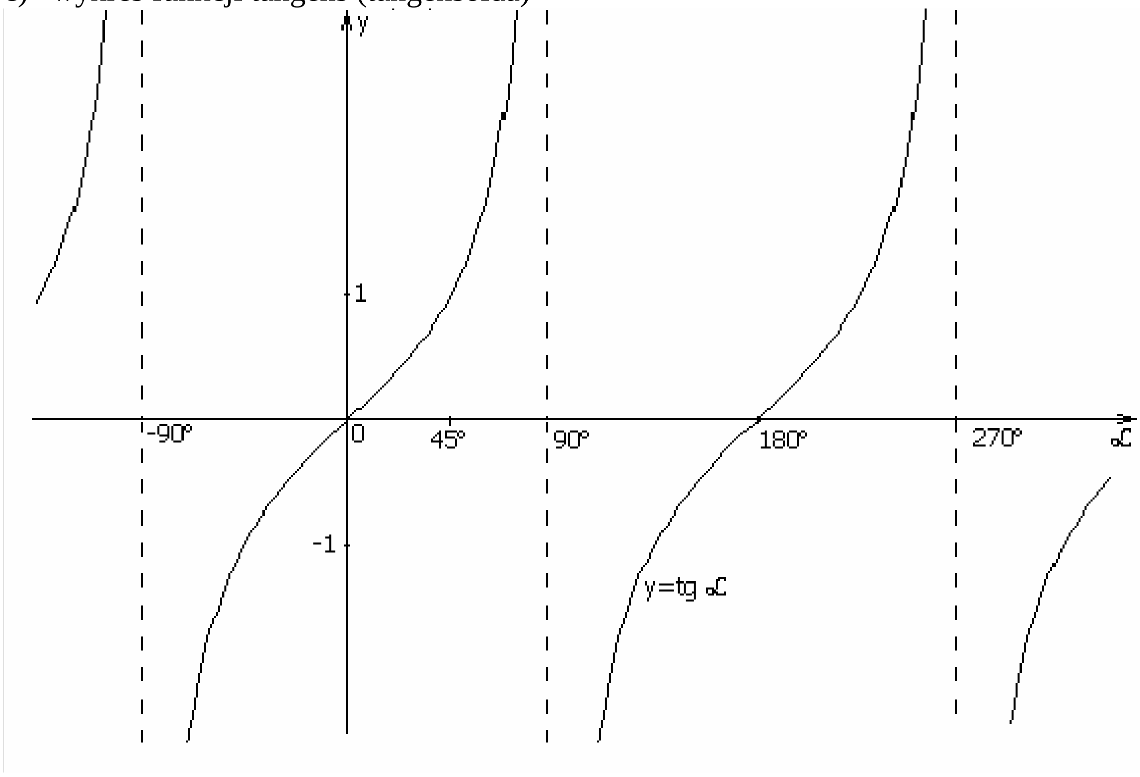
Korzystamy ze wzoru sin(90+α)=cosα



b) własności funkcji cosinus:

- D=R ;
- f(D)=<-1,1> ;
- funkcja cosinus jest okresowa (T=2π);
- miejsca zerowe funkcji mają postać $\frac{\pi}{2}$+kπ, k∈C;
- funkcja cosinus jest parzysta;
- funkcja jest przedziałami monotoniczna;
  - rosnąca w przedziałach postaci (-π+2kπ , 2kπ);
  - malejąca w przedziałach postaci (2kπ , π+2kπ).

c) wykres funkcji tangens (tangensoida)

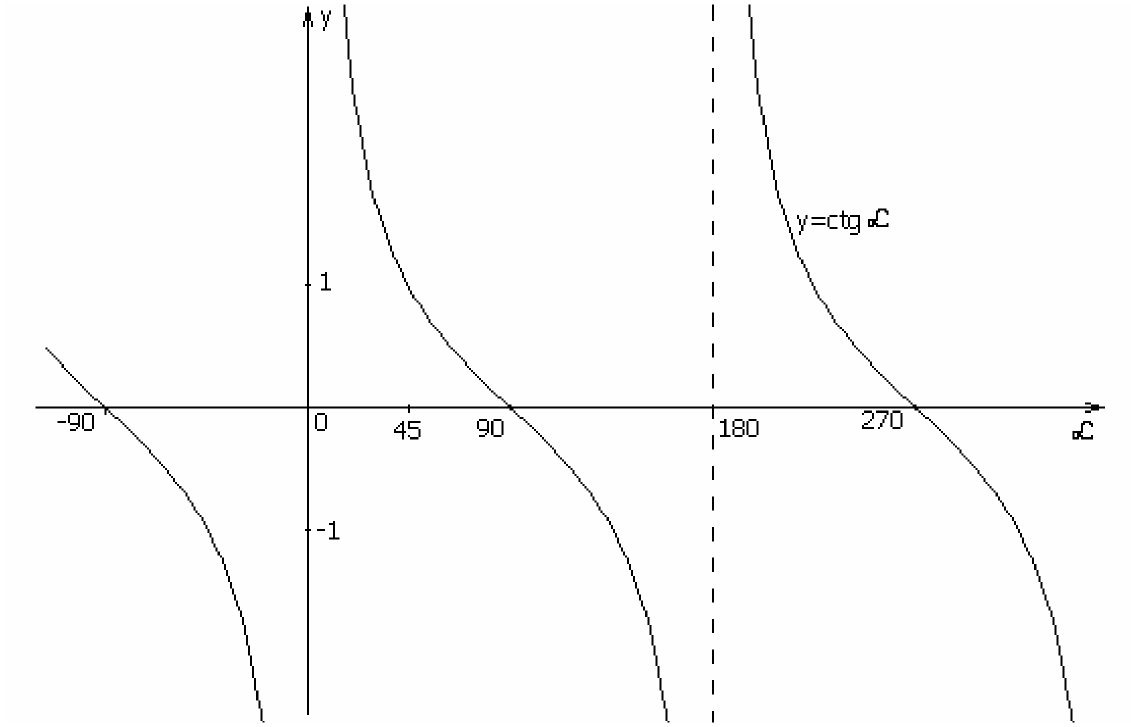


d) własności funkcji tangens:

- D=R ;
- f(D)=(-∞,+∞) ;
- funkcja cosinus jest okresowa (T=π);
- miejsca zerowe funkcji mają postać kπ, k∈C;
- funkcja tangens jest nieparzysta;

- funkcja jest rosnąca w przedziałach postaci ($-\frac{\pi}{2}+k\pi$, $\frac{\pi}{2}+k\pi$);

e) wykres funkcji cotangens (cotangensoida)



f) własności funkcji cotangens:

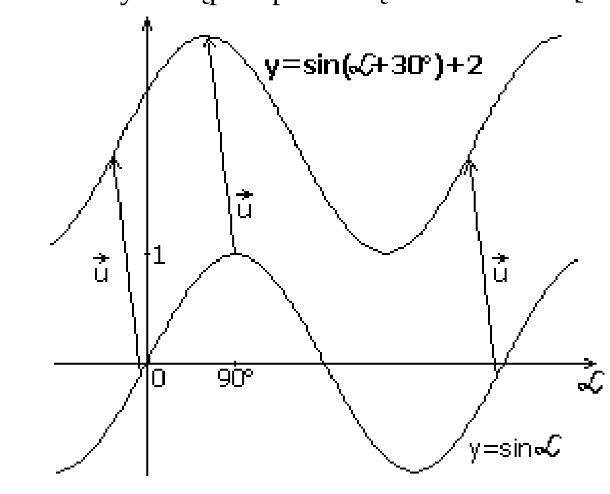
- D=R ;
- f(D)=($-\infty$,$+\infty$) ;
- funkcja cosinus jest okresowa (T=π);
- miejsca zerowe funkcji mają postać $\frac{\pi}{2}+k\pi$, k$\in$C;
- funkcja tangens jest nieparzysta;
- funkcja jest malejąca w przedziałach postaci (kπ , $\pi+k\pi$);

<u>X. Przekształcanie wykresów funkcji trygonometrycznych.</u>

Przykład:

Narysuj wykres funkcji f(α)=sin(α+30°)+2

W tym przypadku pierwszym krokiem jest narysowanie wykresu funkcji g(α)=sinα. Wykres ten należy następnie przesunąć o wektor $\vec{u}$ =[-30°,2].



Zadanie 10.1. (DeSeR)

Narysuj wykresy funkcji:

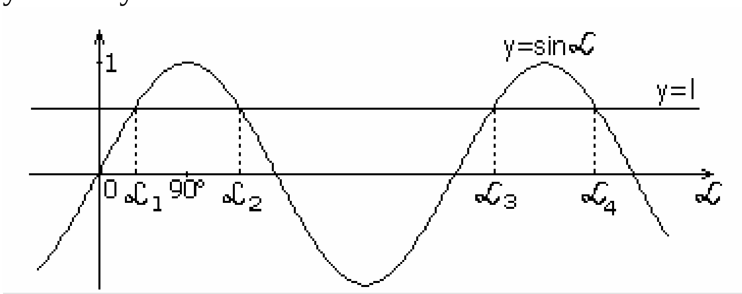
a) f(x)=sin(x-π)-1

b) f(x)=$\left|2\cos\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1\right|$

<u>XI. Równania trygonometryczne.</u>

Równaniami trygonometrycznymi elementarnymi nazywamy równania postaci: sinα=l, cosα=l, tgα=l, ctgα=l dla $l\in R$, np. sinα=0,5.

1) Równanie postaci sinα=l możemy rozwiązać graficznie „rozbijając" je na dwa równania: y=sinα i y=l.

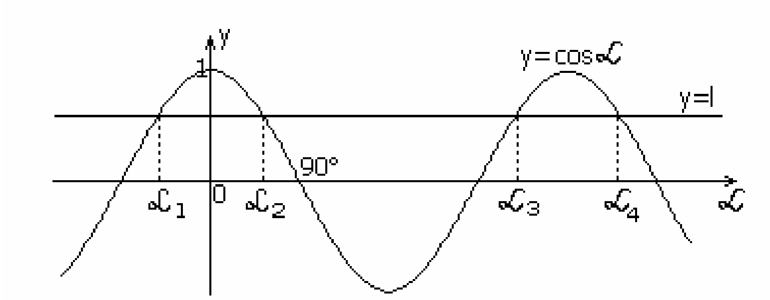


Rozwiązaniami podstawowymi tego równania są α_1 i α_2. Wszystkie inne rozwiązania (tzw. rozwiązania ogólne) mają postać $\alpha_1+k\cdot360°$ i $\alpha_2+k\cdot360°$ dla $k\in C$.

Zauważmy, że $\alpha_2=180°-\alpha_1$.

Stąd rozwiązania podstawowe to α_1 i $180°-\alpha_1$, ogólne: $\alpha_1+k\cdot360°$ i $(180-\alpha_1)+k\cdot360°$.

2) Jak wyżej dla równania cosα=l:



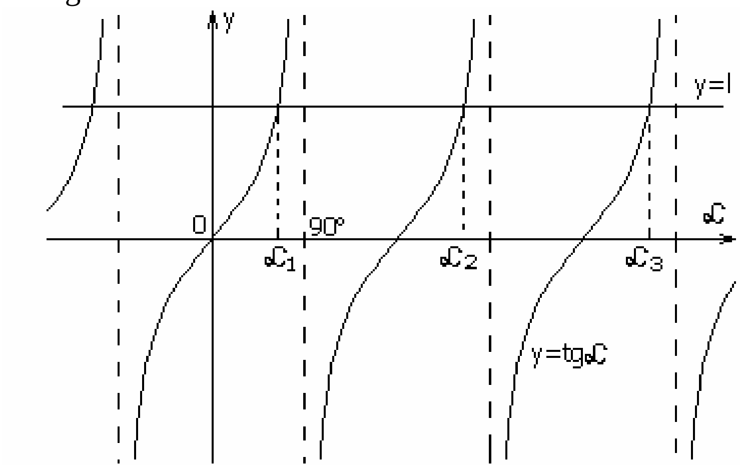
Rozwiązania podstawowe: α_1, α_2

Rozwiązania ogólne: $\alpha_1+k\cdot360°$, $\alpha_2+k\cdot360°$

ale $\alpha_2=-\alpha_1$, stąd

Rozwiązania podstawowe: $\alpha_1+k\cdot360°$, $-\alpha_1+k\cdot360°$.

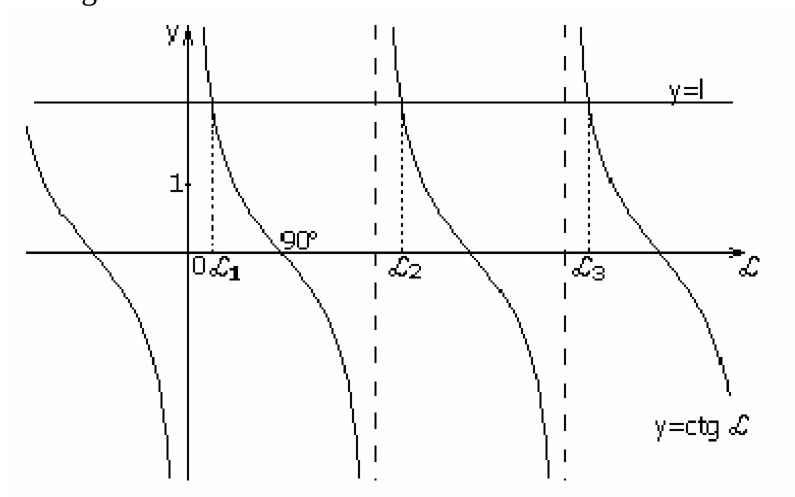
3) Dla tgα=l:



Rozwiązanie podstawowe: α_1

Rozwiązania ogólne: α_1+k·180°

4) Dla ctgα=l:



Rozwiązanie podstawowe: α_1
Rozwiązania ogólne: α_1+k·180°

Zbiór rozwiązań równań elementarnych ilustruje tabelka:

	sinα=l	cosα=l	tgα=l	ctgα=l
rozwiązania podstawowe:	α_1 α_2=180°-α	α_1 α_2=α_1	α_1	α_1
rozwiązania ogólne:	α_1+k·360° (180°-α_1)+k·360°	α_1+k·360° -α_1+k·360°	α_1+k·180°	α_1+k·180°

Przykład:

Rozwiąż równanie 2 cosα=1
cosα=0,5
Stąd rozwiązaniem podstawowym są α_1=60° $\vee$ α_2= -60°.
Rozwiązania ogólne mają postać α_1=60°+k·360° $\vee$ α_2= -60°+k·360°.

Zadanie 11.1.

Rozwiąż równanie:

a) 3sinα-$\sqrt{3}$=sinα
D=R
2sinα=$\sqrt{3}$
sinα=$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Stąd odp. rozwiązanie podstawowe α_1=60° $\vee$ α_2=120°
rozwiązania ogólne α_1=60°+k·360° $\vee$ α_2=120°

b) ctgx-cosx=$\frac{1-\sin x}{2\sin x}$
D: sinx≠0 $\Rightarrow$ x≠kπ

$$\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos x\cdot\sin x}{\sin x}=\frac{1-\sin x}{2\sin x}$$

$$\frac{2\cos x\cdot(1-\sin x)}{2\sin x}=\frac{1-\sin x}{2\sin x}$$

$$\frac{(1-\sin x)(2\cos x-1)}{2\sin x}=0$$

Stąd sinx=1 $\vee$ cosx=0,5

$$x=0{,}5\pi+2k\pi \quad \vee \quad x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad \vee \quad x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

Odp. Rozwiązaniem równania jest $x=0{,}5\pi+2k\pi \ \vee\ x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \ \vee\ x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$.

c) (DeSeR) sin x + cos x=1

d) (DeSeR) $\sin x+\cos x=\sqrt{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}$

XII. Nierówności trygonometryczne.

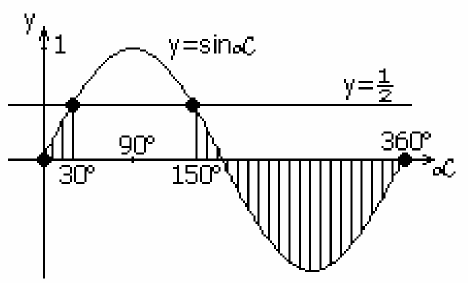
Nierówności trygonometryczne rozwiązujemy w oparciu o wykres.

Przykład

Rozwiąż nierówność

$\sin\alpha \le 0{,}5$ dla $\alpha\in\langle 0°,360°\rangle$

Sporządzamy wykresy równań $y=\sin\alpha$ oraz $y=0{,}5$.



Rozwiązaniem są, zgodnie z daną nierównością, punkty leżące na wykresie funkcji sinus i jednocześnie leżące pod lub na prostej y=0,5.

Stąd otrzymujemy rozwiązanie:

$\alpha\in\langle 0°,30°\rangle\cup\langle 150°,360°\rangle$

Odp. Rozwiązaniem nierówności jest $\alpha\in\langle 0°,30°\rangle\cup\langle 150°,360°\rangle$

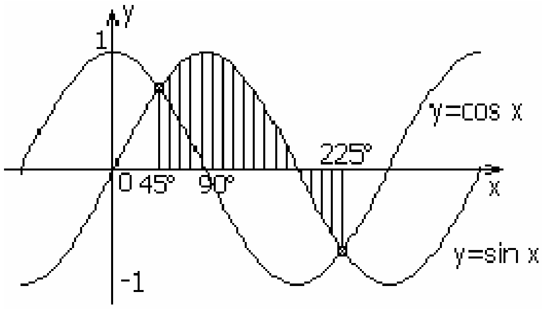
Zadanie 12.1.

Rozwiąż:

a) sin x > cos x

D=R

Sporządzamy rysunek



Najprościej mówiąc nierówność jest spełniona dla tych x, dla których wykres sinus znajduje się nad wykresem cosinus. Stąd:

$x\in(45°+k\cdot 360°,225°+k\cdot 360°)$

Odp. Rozwiązaniem równania jest $x\in(45°+k\cdot 360°,225°+k\cdot 360°)$.

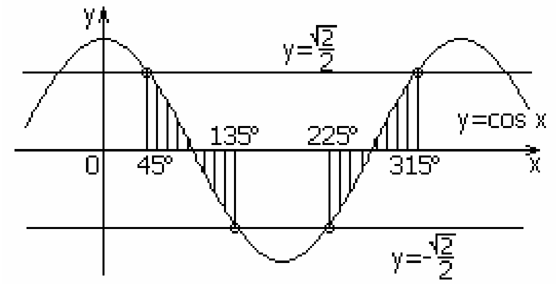
b) $\cos^2 x<\frac{1}{2}$

D=R

Powyższą nierówność możemy zapisać jako koniunkcję wyrażeń:

$\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\wedge$ $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Sporządzamy szkic:



Stąd $x \in (45° + 360° \cdot k, 135° + 360° \cdot k)$ $\vee$ $x \in (225° + 360° \cdot k, 315° + 360° \cdot k)$

czyli $x \in (45° + 180° \cdot k, 135° + 180° \cdot k)$

Odp. Rozwiązaniem równania jest $x \in (45° + 180° \cdot k, 135° + 180° \cdot k)$.

c) (DeSeR) $|\sin x| > \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) (DeSeR) $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x > \frac{2}{\sqrt{3}}$

e) (DeSeR) $\sin x \cdot \cos x > 0$, $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

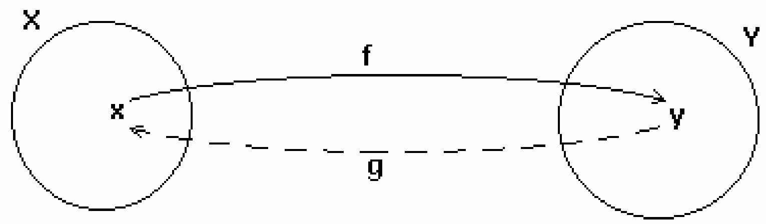
f) (DeSeR) $\operatorname{tg}(1110° + x) > \operatorname{tg}(45°)$

XIII. Funkcje cyklometryczne (kołowe).

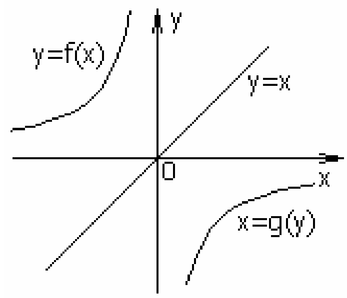
1. Funkcja odwrotna

Def.

Niech f: $X \to Y$. Mówimy, że funkcja g: $Y \to X$ jest odwrotna do funkcji f jeśli
$x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$



Wykresy funkcji wzajemnie odwrotnych są symetryczne względem prostej y=x, np.



Tw.

Funkcja odwrotna do funkcji f istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest różnowartościowa i „na”.

Przykład:

Wyznacz funkcję odwrotną do danej.

a) $f(x) = 2x + 3$

Aby wyznaczyć funkcję odwrotną należy doprowadzić wzór danej funkcji do postaci $x = ay + b$, a następnie zamienić miejscami x i y.

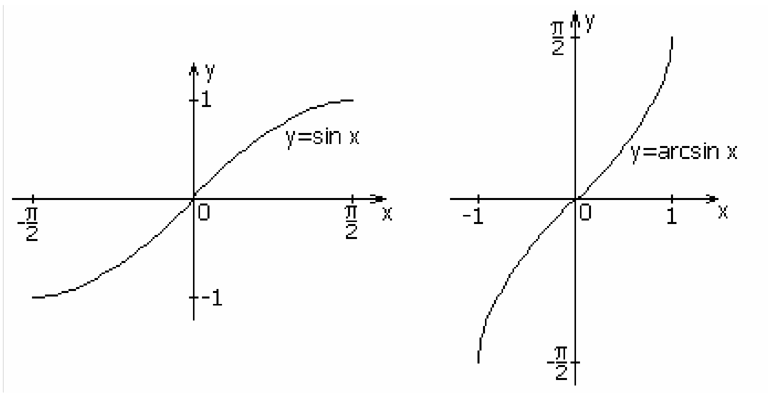
y= 2x + 3
2x= y - 3
x= $\frac{1}{2}$ y - $\frac{3}{2}$
g(x)= $\frac{1}{2}$ x - $\frac{3}{2}$
Odp. Funkcją odwrotną do f(x)= 2x + 3 jest g(x)= $\frac{1}{2}$ x - $\frac{3}{2}$.
b) f(x)= x ^{2} dla x∈ (0, +∞)
y= x ^{2}
x= $\sqrt{y}$
g(x)= $\sqrt{x}$
Odp. Funkcją odwrotną do f(x)= x ^{2} jest g(x)= $\sqrt{x}$.

Po zdefiniowaniu funkcji odwrotnej i sprawdzeniu poziomu przyswojonej wiedzy na wyżej wymienionych przykładach możemy przejść do zapoznania się z funkcjami cyklometrycznymi.

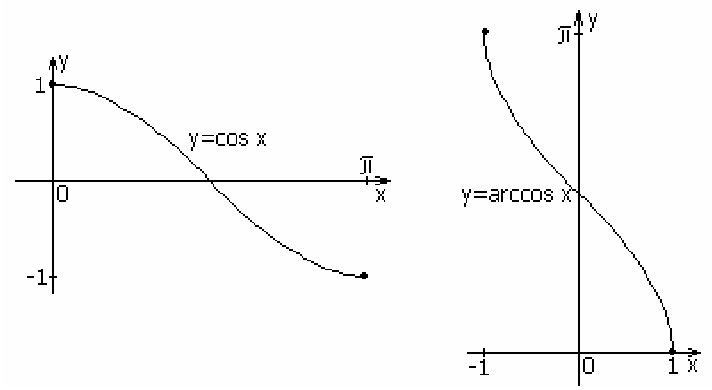
2. Funkcje cyklometryczne.

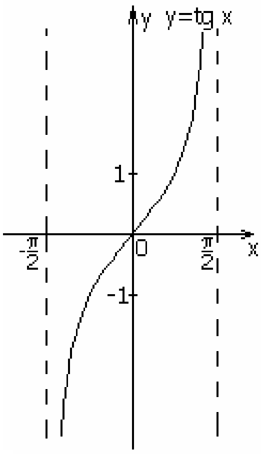
Def.

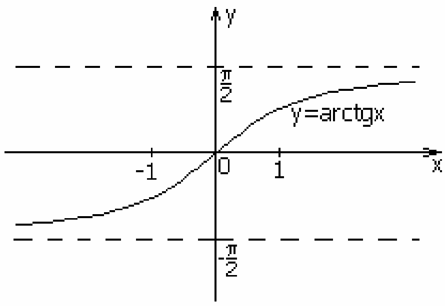
Rozpatrzmy funkcję y= sin x w przedziale <-$\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$>. Jest ona różnowartościowa i „na” przedział <-1, 1>. Istnieje zatem funkcja do niej odwrotna, określona na przedziale <-1, 1> i „na” przedział (-$\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$). Funkcję tą nazywamy arcus sinus (arcus - łuk).

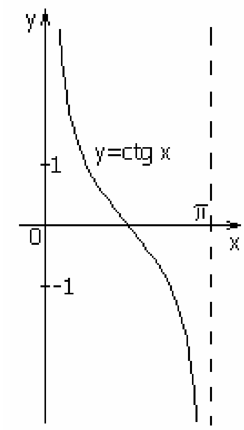


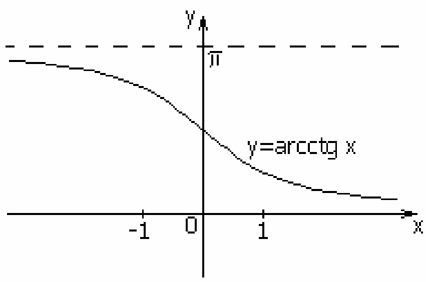
Podobnie określamy pozostałe funkcje odwrotne do cos, tg, ctg .
Przypatrzmy się wykresom pozostałych funkcji cyklometrycznych:











Def.

1. y= arcsin x $\Leftrightarrow$ x= sin y $\wedge$ y $\in$ $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$
2. y= arccos x $\Leftrightarrow$ x= cos y $\wedge$ y $\in$ $\langle 0, \pi \rangle$
3. y= arctg x $\Leftrightarrow$ x= tg y $\wedge$ y $\in$ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
4. y= arcctg x $\Leftrightarrow$ x= ctg y $\wedge$ y $\in$ $(0, \pi)$

Sprawdźmy pozyskaną w ramach tego tematu wiedzę na kilku trywialnych przykładach.

Przykład

a) Oblicz.

arcsin $\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, ponieważ sin $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ i $\frac{\pi}{6} \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$

arccos 0= $\frac{\pi}{2}$, ponieważ cos $\frac{\pi}{2}$= 0 i $\frac{\pi}{2} \in \langle 0, \pi \rangle$

arctg 1= $\frac{\pi}{4}$, ponieważ tg $\frac{\pi}{4}$= 1 i $\frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

arcsin (cos $\frac{\pi}{3}$)= arcsin $\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, ponieważ sin $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ i $\frac{\pi}{6} \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ cos $\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

cos (2 arcsin 1)= cos $(2 \cdot \frac{\pi}{2})$= cos π= -1 arcsin 1= $\frac{\pi}{2}$

b) Rozwiąż równanie.

- 3 sin x + 1= 2
  3 sin x= 1
  sin x= $\frac{1}{3}$
  x= arcsin $\frac{1}{3}$

- arcsin x - arccos x = 0
  arcsin x = arccos x

Korzystając z twierdzenia, że sin x = cos ($\frac{\pi}{2}$ - x) piszemy :

arccos ($\frac{\pi}{2}$ - x) = arccos x

$\frac{\pi}{2}$ - x = x

$\frac{\pi}{2}$ = 2x

$x = \frac{\pi}{4}$

c) Wyznacz dziedzinę funkcji y= arcsin $\frac{x-2}{1-3x}$, przy czym funkcja sinus jest określona na przedziale <-1, 1>.

Zapiszmy powyższą zależność w postaci nierówności

$$-1 \le \frac{x-2}{1-3x} \le 1$$

Abyśmy w ogóle mogli mówić o takim ułamku jego mianownik musi być różny od zera, więc po prostych obliczeniach, które pozostawiamy czytelnikowi stwierdzamy, iż

$$D = R / \{ \tfrac{1}{3} \}$$

Dopiero po takim zapisie możemy przystąpić do rozwiązywania zadania

$-1 \le \frac{x-2}{1-3x} \quad \wedge \quad \frac{x-2}{1-3x} \le 1$

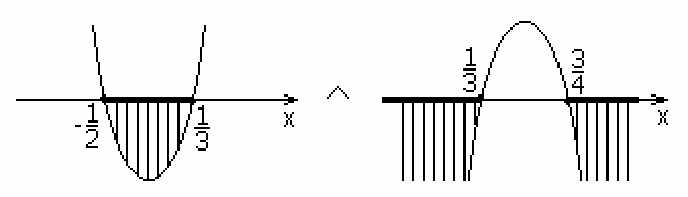
$\frac{x-2}{1-3x} + 1 \ge 0 \quad \wedge \quad \frac{x-2}{1-3x} - 1 \le 0$

$\frac{x-2+1-3x}{1-3x} \ge 0 \quad \wedge \quad \frac{x-2-1+3x}{1-3x} \le 0$

$\frac{-2x-1}{1-3x} \ge 0 \quad \Big| \cdot(1-3x)^2 \quad \wedge \quad \frac{4x-3}{1-3x} \le 0 \quad \Big| \cdot(1-3x)^2$

$(1-3x)(-2x-1) \ge 0 \quad \wedge \quad (1-3x)(4x-3) \le 0$

Teraz należy zreasumować powyższe wyniki i przedstawić je na rysunku (dla ułatwienia):



$x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \rangle \quad \wedge \quad x \in (-\infty, \frac{1}{3} \rangle \cup \langle \frac{3}{4}, +\infty)$

Stąd $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \rangle$

Uwzględniając warunek $x \neq \frac{1}{3}$

$x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

Odp. Dziedziną danej funkcji jest $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

4. Wykaż, że: arcsin x + arccos x = $\frac{\pi}{2}$

Niech $x = \cos y$

Wówczas zachodzi $\sin(\frac{\pi}{2} - y) = \cos y = x$

Po prostych obliczeniach arc cos x= y i arc sin x= $\frac{\pi}{2}$-y

$$\text{arc sin } x + \text{arc cos } x = \frac{\pi}{2} - y + y$$

$$\text{arc sin } x + \text{arc cos } x = \frac{\pi}{2}$$

C.N.D

Zadanie 13.1. (DeSeR)

Wyznacz funkcję odwrotną do danej:

a) f(x)=3x+5
b) f(a)=-5,5x+3
c) $g(q)=\frac{1+q}{1-q}$

Zadanie 13.2. (DeSeR)

Narysuj wykres funkcji:

a) y=arcsin(x-1)+0,5π
b) y=2|arctg(x-0,5)|

Zadanie 13.3. (DeSeR)

Rozwiąż równanie

a) $\frac{\cos x}{3\sin x} = 1$

b) $2tg(\pi+x)\cdot\cos(-x)=k$

XIV. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

Nie zawsze mamy do czynienia z funkcjami trygonometrycznymi jednego kąta (np. α) . Często musimy obliczyć wartość funkcji trygonometrycznej dla sumy lub różnicy dwóch różnych kątów (np. α i β). Aby obliczyć wartość tak wyrażonej sumy lub różnicy kątów musimy skorzystać z twierdzeń.

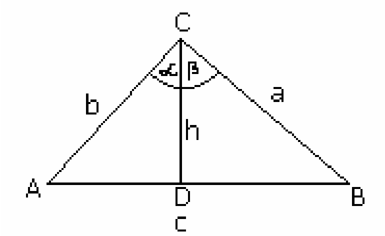
Tw.

Funkcje trygonometryczne sumy dwóch kątów wyrażają się wzorami:

1. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\cdot\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$
2. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$
3. $tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$
4. $ctg(\alpha+\beta) = \frac{ctg\alpha ctg\beta - 1}{ctg\alpha + ctg\beta}$

Dowód:

1.



Z trójkąta ADC :

$\cos\alpha = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b\cos\alpha$

Z trójkąta BDC :

$\cos\beta = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a\cos\beta$

Przypatrzmy się polu trójkąta ABC:

$S = \frac{1}{2} a b \sin(\alpha+\beta)$

Biorąc pod uwagę trójkąty ADC oraz BDC możemy zapisać:

$S_{ACD} = S_1 = \frac{1}{2} b h \sin\alpha$

$S_{BCD} = S_2 = \frac{1}{2} a h \sin\beta$

Zauważmy (z łatwością), że :

$S = S_1 + S_2$

Podstawiając odpowiednie wyrażenia otrzymamy:

$\frac{1}{2} a b \sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2} b h \sin\alpha + \frac{1}{2} a h \sin\beta$

$\frac{1}{2} a b \sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2} b (a\cos\beta)\sin\alpha + \frac{1}{2} a (b\cos\alpha)\sin\beta$

$\frac{1}{2} a b \sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2} a b \cos\beta\sin\alpha + \frac{1}{2} a b\cos\alpha\sin\beta$

$\frac{1}{2} a b \sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2} a b (\cos\beta\sin\alpha + \cos\alpha\sin\beta) \quad \Big| : \frac{1}{2} a b$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

C.N.D

2. Korzystając ze wzorów redukcyjnych piszemy

$\cos(\alpha+\beta) = \sin[90-(\alpha+\beta)] = \sin[(90-\alpha)+(-\beta)] = \sin(90-\alpha)\cdot\cos(-\beta) + \cos(90-\alpha)\cdot\sin(-\beta) =$
$= \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$

C.N.D

3. Korzystając ze wzoru na tangens kąta piszemy:

$tg(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$

Podstawiając otrzymamy :

$tg\ (\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

Dzieląc licznik i mianownik otrzymanego ułamka przez ($\cos\alpha\cdot\cos\beta$) uzyskamy następującą postać :

$$tg\ (\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$*\ \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=tg\ \alpha$

$**\ \frac{\sin\beta}{\cos\beta}=tg\ \beta$

Podstawiając za powyższe wyrażenia oraz redukując wyrażenie w mianowniku uzyskujemy:

$tg\ (\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$

C.N.D

4. Korzystając ze wzoru na cotangens kąta piszemy :

$ctg\ (\alpha+\beta)=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$

Podstawiając otrzymamy :

$ctg\ (\alpha+\beta)=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$

Dzieląc licznik i mianownik otrzymanego ułamka przez ($\sin\alpha\cdot\sin\beta$) uzyskamy następującą postać :

$$ctg\ (\alpha+\beta)=\frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}-1}{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}$$

Dokonując stosownych redukcji w mianowniku powyższego ułamka uzyskujemy :

$ctg\ (\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha ctg\beta-1}{ctg\beta+ctg\alpha}$

C.N.D

Tw.

Funkcje trygonometryczne różnicy dwóch kątów wyrażają się wzorami :

1. $\sin\ (\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
2. $\cos\ (\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
3. $tg\ (\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$
4. $ctg\ (\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$

Dowód.

Aby udowodnić powyższe twierdzenia należy podstawić we wzorach na funkcje trygonometryczne sumy $-\beta$ w miejsce β, a następnie skorzystać z parzystości lub nieparzystości odpowiedniej funkcji trygonometrycznej .

1. $\sin\ [\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cos(-\beta)+\sin(-\beta)\cos\alpha=$[1] $\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$
2. $\cos\ [\alpha+(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)=$[2]$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
3. $tg\ [\alpha+(-\beta)]=\frac{tg\alpha+tg(-\beta)}{1-tg\alpha tg(-\beta)}=$[3] $\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$
4. $ctg\ [\alpha+(-\beta)]=\frac{ctg\alpha ctg(-\beta)-1}{ctg\alpha+ctg(-\beta)}=$[4] $\frac{-ctg\alpha ctg\beta-1}{ctg\alpha-ctg\beta}$ C.N.D.

Przykład

Na podstawie powyższych twierdzeń dotyczących funkcji trygonometrycznych sumy i różnicy kątów spróbujmy rozwiązać kilka przykładów.

[1] Sin $(-\beta)=-\sin\beta$
[2] Cos $(-\beta)=\cos(\beta)$
[3] tg $(-\beta)=-tg\ \beta$
[4] ctg $(-\beta)=-ctg\ \beta$

1. Oblicz.

a) $\cos 15° = \cos(45°-30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

b) $\sin 75° = \sin(45°+30°) = \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

c) $\cos \frac{5}{12} \pi = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2. Wyznacz $\sin(\alpha+\beta)$ i $\cos(\alpha+\beta)$, wiedząc, że :

$\cos \alpha = \frac{1}{2}$ dla $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\cos \beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ dla $\beta \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$

Korzystając ze wzoru na jedynkę trygonometryczną :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Stosując odpowiednie przekształcenia otrzymujemy :

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{3}{4}$$

Ponieważ $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ to $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Stosując analogicznie dla kąta β zapisujemy :

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \frac{3}{4}$$

$$\sin^2 \beta = \frac{1}{4}$$

$$\sin \beta = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \sin \beta = -\frac{1}{2}$$

Podstawiając za odpowiednie wartości otrzymamy :

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) + (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = -1$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

Odp. $\sin(\alpha+\beta) = -1$, natomiast $\cos(\alpha+\beta) = 0$

Zadanie 14.1. (DeSeR)

Oblicz

a) tg 15°
b) ctg 105°
c) sin 255°

Zadanie 14.2. (DeSeR)

Wyznacz $\cos(\alpha-\beta)$ wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta = 0{,}25$ oraz $\alpha \in (0; 0{,}5\pi)$, $\beta \in (1{,}5\pi; 2\pi)$.

Zadanie 14.3. (DeSeR)

Wyznacz $tg(\beta-\gamma)$ jeśli $\cos(-\beta) = 0{,}2$, $ctg(1{,}5\pi-\gamma) = 5$ oraz kąty β i γ są kątami ćwiartki pierwszej.

XV. Funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta

Oprócz funkcji trygonometrycznych sumy i różnicy kątów pojawiają się także funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta. Aby rozwiązać takie zadanie nie możemy zastosować poznanych dotąd metod. Musimy skorzystać z twierdzeń dotyczących funkcji trygonometrycznych takich kątów.

Tw.

1. $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$
2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
3. $\mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$
4. $\mathrm{ctg}\, 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}$

Dowód.

Aby udowodnić przedstawione powyżej twierdzenia należy rozpisać wyrażenie 2α na $(\alpha+\alpha)$

1. $\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

C.N.D

2. $\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

C.N.D

3. $\mathrm{tg}\, 2\alpha = \mathrm{tg}(\alpha+\alpha) = \frac{tg\alpha+tg\alpha}{1-tg\alpha tg\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

C.N.D

4. $\mathrm{ctg}\, 2\alpha = \mathrm{ctg}(\alpha+\alpha) = \frac{ctg\alpha ctg\alpha-1}{ctg\alpha+ctg\alpha} = \frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}$

C.N.D

Przykład

Spróbujmy teraz na podstawie powyższych wzorów prześledzić sposób rozwiązywania zadań charakterystycznych dla tego tematu.

1. Wykaż, że :

a) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

Aby udowodnić takie stwierdzenie należy rozpisać bardziej rozbudowaną stronę równości, w tym przypadku prawą i transformujemy ją w celu uzyskania postaci strony l

P.$=2\cos^2\alpha-1=2\cos^2\alpha-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos2\alpha=$L

b) $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

P.$= 1- 2\sin^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha =$ L

2. Wyprowadź wzór na:

a) $\sin 3\alpha=$

W celu wyprowadzenia wzoru na funkcję trygonometryczną wielokrotności kąta należy pogrupować odpowiednie wyrazy.

$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos2\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cdot\sin\alpha=$
$=2\sin\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) - \sin^3\alpha=$
$=3\sin\alpha - 3\sin^3\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

3. Uzależnij $\sin 2\alpha$ oraz $\cos 2\alpha$ od funkcji $\mathrm{tg}\,\alpha$.

a) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

Dzieląc licznik i mianownik otrzymanego ułamka przez $\cos^2\alpha$ otrzymamy :

$$\frac{\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha+1}$$

b) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{1} = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

Dzieląc licznik i mianownik przez otrzymanego ułamka przez $\cos^2\alpha$ otrzymamy

$$\frac{\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1-tg^2\alpha}{tg^2\alpha+1}$$

Dla zainteresowanych:

Wzory na funkcje sinus i cosinus wielokrotności kąta x bardzo łatwo jest obliczyć korzystając z liczb zespolonych. Pomocny nam przy tym będzie wzór de Moirre'a:

$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$

Gdy chcemy na przykład znaleźć wzór na sinus pięciokrotności kąta x, podstawiamy:

$(\cos x + i\sin x)^5 = \cos 5x + i\sin 5x$

Korzystając dla ułatwienia ze wzoru dwumianowego Newtona otrzymamy:

$\cos^5 x + 5i\cos^4 x\sin x - 10\cos^3 x\sin^2 x - 10i\cos^2 x\sin^3 x + 5\cos x\sin^4 x + iy^5 = \cos 5x + i\sin 5x$

Grupujemy wyrazy:

$(\cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x) + i(5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + y^5) = \cos 5x + i\sin 5x$

Ponieważ dwie liczby są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich części rzeczywiste i urojone są takie same, zatem:

$\sin 5x = 5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x$

$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x$

Zadanie 15.1. (DeSeR)

Wyprowadź wzory na:

a) tg (4x)

b) cos (6x)

XVI. Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych

Kolejnym tematem dotyczącym funkcji trygonometrycznych są sumy i różnice funkcji trygonometrycznych. Również przy rozwiązywaniu zadań dotyczących tego tematu nie możemy skorzystać z twierdzeń i sposobów poznanych na wcześniejszych lekcjach. Musimy zatem skorzystać z twierdzeń bezpośrednio dotyczących interesującego nas zagadnienia.

Tw.

Zależności dotyczące sum i różnic funkcji trygonometrycznych określają wzory :

1. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
2. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
3. $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
4. $\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$

Dowód

1. Dla każdej pary kątów α i β istnieją takie U i V, że :

$\alpha = U+V$

$\beta = U-V$

Są nimi :

$U = \frac{\alpha+\beta}{2}$

$V = \frac{\alpha-\beta}{2}$

Podstawiając za α i β otrzymamy :

$\sin\alpha + \sin\beta = \sin(U+V) + \sin(U-V) = \sin U\cos V + \cos U\sin V + \sin U\cos V - \cos U\sin V = 2\sin U\cos V =$

$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

C.N.D

Pozostałe, łatwe do wyprowadzenia dowody, oparte na powyższych relacjach pozastawiamy czytelnikowi

Przykład

Oblicz

$\sin 15° + \sin 75° = 2 \sin \frac{90}{2} \cos \frac{60}{2} = 2 \sin 45° \cos 30° = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Tw.

1. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
2. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
3. $\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
4. $\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$

Ufając inteligencji czytelnika, wierzymy, że udowadnianie powyższych twierdzeń byłoby niepotrzebnym marnowaniem czasu, który z większym pożytkiem może zostać przeznaczony na rozwiązywanie problemów praktycznych zamieszczonych na końcu tego działu.

Przykład

Oblicz

$$\mathrm{tg}\,60° - \mathrm{tg}\,30° = \frac{\sin(60-30)}{\cos 60\cos 30} = \frac{\sin 30}{\cos 60\cos 30} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

<u>XVII. Równania trygonometryczne (2)</u>

Równania trygonometryczne nieelementarne rozwiązujemy przez sprowadzenie do równań elementarnych lub ich alternatywy.

Przykład

1. Rozwiąż

   $2\sin(x-\frac{\pi}{3}) = 1$

   Podstawiamy: $t = x - \frac{\pi}{3}$

   $2\sin t = 1$

   $\sin t = \frac{1}{2}$

   $t_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad t_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

   $x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

   $x = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Odp. rozwiązaniem równania jest $x = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

Zadanie 17.1.

Rozwiąż równanie:

a) cos3x=cosx

D=R

Ze wzoru na cosinus trzykrotności kąta otrzymujemy:

$\cos^3 x - 3\sin^2 x\cdot\cos x = \cos x$

$\cos x(\cos^2 x - 3\sin^2 x - 1) = 0$

Stąd:

$\cos^2 x - 3\sin^2 x - 1 = 0 \quad \vee \quad \cos x = 0$

$\cos^2 x + \sin^2 x - 4\sin^2 x - 1 = 0$

sinx=0

x=kπ $\qquad\qquad\qquad\qquad \vee \qquad$ x=0,5π+kπ

Odp. Rozwiązaniem równania jest x=k·0,5π

b) (DeSeR) $3\sin x = 2\cos^2 x$

c) (DeSeR) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$

d) (DeSeR) cosx-cos3x=sinx-sin3x

e) (DeSeR) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$

f) (DeSeR) tgx+tg(α-x)=2tgα

g) (DeSeR) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \operatorname{tg} x = 0$

h) (DeSeR) tgx+tg2x=tg3x

i) (DeSeR) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$

XVIII. Tożsamości trygonometryczne (2).

Zadanie 18.1.

Sprawdź tożsamość

a) $\frac{\cos x - \cos 3x}{\sin 3x - \sin x} = \frac{\sin 2x}{1 - 2\sin^2 x}$

$$L = \frac{\cos x - \cos 3x}{\sin 3x - \sin x} = \frac{\cos x - \cos^3 x + 3\sin^2 x \cdot \cos x}{3\sin x - 4\sin^3 x - \sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1 - \cos^2 x + 3\sin^2 x}{3 - 4\sin^2 x - 1} =$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{4\sin^2 x}{2 - 4\sin^2 x} = \frac{2\sin x \cdot \cos x}{1 - 2\sin^2 x} = \frac{\sin 2x}{1 - 2\sin^2 x} = P.$$

Odp. Tożsamość jest prawdziwa.

b) (DeSeR) cos2α·cosα-sin4α·sinα=cos3α·cos2α

c) (DeSeR) $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 y} - \frac{2\cos(x-y)}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin^2(x-y)}{\sin^2 x \cdot \sin^2 y}$

d) (DeSeR) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$

XIX. Zadania różne. (DeSeR)

Zadanie 19.1.

Rozwiąż układ równań:

a) $\begin{cases} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} y \\ x - y = 30^0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x + y = 120^0 \end{cases}$

Zadanie 19.2.

Dla jakich wartości a układ równań

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4} \\ \cos x \cos y = a \end{cases}$$

ma rozwiązanie ?

Zadanie 19.3.

Wyznacz maksimum funkcji

y=sinx+cosx

Zadanie 19.4.

Wykaż, że jeśli α+β+γ=π, to

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\chi}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\chi} = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$$

Zadanie 19.5.

Wykaż, że jeśli α+β+γ=0,5π , to

$$\sin\beta + \sin\chi - \cos\alpha = 4\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\chi}{2}$$

Zadanie 19.6.

Oblicz bez pomocy tablic

$$\frac{1 - 4\sin 10^0 \sin 70^0}{2\sin 10^0}$$