ALGEBRA ZDARZEŃ

Podobnie jak inne działy matematyki np. geometria, rachunek prawdopodobieństwa wychodzi z pewnych pojęć pierwotnych. Pojęciem pierwotnym rachunku prawdopodobieństwa jest **zdarzenie elementarne**, które oznaczamy literą ω. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych będziemy oznaczali literą Ω i nazywali **przestrzenią zdarzeń elementarnych.**

PRZYKŁAD

1. Rzut monetą

   zdarzenie elementarne

   $\omega_1 = O$

   $\omega_2 = R$ $\qquad \Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{O, R\}$

2. Rzut kostką

   $\omega_1 = 1$

   $\omega_2 = 2$

   $\omega_3 = 3$ $\qquad \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   $\omega_4 = 4$

   $\omega_5 = 5$

   $\omega_6 = 6$

DEFINICJA Każdy podzbiór zbioru zdarzeń elementarnych Ω nazywamy zdarzeniem w zbiorze Ω. Zdarzenie oznaczamy dużymi literami A, B, C.....

PRZYKŁAD

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$

$A = \{\omega_1, \omega_2\}$

DEFINICJA Mówimy, że zdarzenie elementarne w sprzyja zdarzeniu A ($A \subset \Omega$), jeżeli $\omega \in A$

PRZYKŁAD

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$

$A = \{\omega_1, \omega_2\}$

ω_1 sprzyja zdarzeniu A

ω_2 nie sprzyja zdarzeniu A

Każde zdarzenie elementarne w sprzyja zdarzeniu będącemu całym zbiorem Ω. Mówimy wtedy o **zdarzeniu pewnym**.

Żadne darzenie elementarne w nie sprzyja zdarzeniu będącemu zbiorem pustym. Mówimy wtedy o **zdarzeniu niemożliwym**.

Na zdarzeniach elementarnych podobnie jak na zbiorach można wykonywać działania.

DEFINICJA Niech A i B będą dowolnymi podzbiorami zbioru Ω zdarzeń elementarnych.

- sumą zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \cup B$
- iloczynem zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \cap B$
- różnicą zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \setminus B$
- zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A nazywamy zdarzenie $A' = \Omega \setminus A$

PRZYKŁAD

Rozpatrzmy dwukrotny rzut kostką. Niech:

A będzie zdarzeniem: za drugim razem wypadło więcej oczek niż za pierwszym

B jest zdarzeniem: suma wyrzuconych oczek jest większa od 7

C zdarzenie: za pierwszym razem wypadła liczba parzysta, a za drugim nieparzysta.

Wyznacz zdarzenie: A, B, C, Ω, A’, B’, C’, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Ω = { (1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5) (6,6)

(1,2) (2,1) (3,1) (4,1) (5,1) (6,1)

(1,3) (2,3) (3,2) (4,2) (5,2) (6,2)
(1,4) (2,4) (3,4) (4,3) (5,3) (6,3)
(1,5) (2,5) (3,5) (4,5) (5,4) (6,4)
(1,6) (2,6) (3,6) (4,6) (5,6) (6,5) }

A = { (2,6) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6)
(2,3) (2,4) (2,5) (2,6)
(3,4) (3,5) (3,6)
(4,5) (4,6)
(5,6) }

A'= { (1,1) (2,1) (2,2) (3,1) (3,2) (3,3)
(4,1) (4,2) (4,3) (4,4)
(5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5)
(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6) }

B = { (2,6) (3,5) (3,6)
(4,4) (4,5) (4,6)
(5,3) (5,4) (5,5) (5,6)
(6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6) }

B' = { (1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6)
(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5)
(3,1) (3,2) (3,3) (3,4)
(4,1) (4,2) (4,3)
(5,1) (5,2)
(6,1) }

C = { (2,1) (2,3) (2,5) (4,1) (4,3)
(4,5) (6,1) (6,3) (6,5) }

C' = { (1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6)
(2,2) (2,4) (2,6)
(3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6)
(4,2) (4,4) (4,6)
(5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6)
(6,2) (6,4) (6,6) }

A∩B = {(2,6) (3,5) (3,6) (4,5) (4,6) (5,6) }

A\B = { (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6)
(2,3) (2,4) (2,5) (3,4) }

B\A = { (4,4) (5,3) (5,4) (5,5)
(6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6) }

STABILNOŚĆ CZĘSTOŚCI

Rachunek prawdopodobieństwa zajmuje się analizą praw rządzących zjawiskami przypadkowymi tj. takimi, których przebiegu (wyniku) nie można przewidzieć. Dzieje się tak dlatego, że na przebieg zjawiska losowego ma wpływ wiele przyczyn, z których jedynie część możemy kontrolować np. przy rzucie monety: prędkość obrotowa monety, siłą rzutu, prądy powietrza, sprężystość materiału itp.

Mówimy, że dwa doświadczenia przebiegają w identycznych warunkach (są identyczne), jeżeli mają te same zbiory kontrolowanych przyczyn.

Wyniku doświadczeń nazywamy **zdarzeniami**. Doświadczenie, które możemy przeprowadzić dowolnie wiele razy nazywamy **powtarzalnym** np. pomiar masy. Istnieją takie doświadczenia niepowtarzalne np. pomiar czasu palenia żarówki.

Zjawiska polegające na przeprowadzeniu (przebiegu) dużej ilości tych samych doświadczeń nazywamy **zjawiskami masowymi** np. ruch cząstek gazu. Zjawiska masowe mają swoje specyficzna prawidłowości.
Jeśli wśród N doświadczeń zdarzenie A zaszło n(A) razy, to liczbę

$$\boxed{\frac{n(A)}{N}}$$

nazywamy **częstością zdarzenia A**
W zjawiskach masowych częstości występowania każdego zdarzenia mają tę własność, że wraz ze wzrostem liczby N wykazują tendencję skupiania się dookoła pewnej liczby, zależnej od tego zdarzenia.

liczba rzutów monety N	liczba pojawień się orła n(A)	częstość zdarzenia się orła $\frac{n(A)}{N}$
200	116	0,5800
300	153	0,5100
500	251	0,5020
1000	504	0,5040
2000	1002	0,5010
10000	4993	0,4993

WŁASOŚCI CZĘSTOŚCI

Rozważmy doświadczenie polegające na jednokrotnym rzucie kostką, które wykonaliśmy N razy oraz :
n_a razy zaszło zdarzenie A np. wypadło 5 oczek
n_b zaszło zdarzenie B np. wypadło 1 oczko

Wtedy częstość zdarzenia A wyniesie $\frac{n_A}{N}$, a zdarzenie B - $\frac{n_B}{N}$

1. ponieważ $n_A \geqslant 0$ częstość spełnia warunek $\frac{n_A}{N} \geqslant 0$

2. ponieważ zdarzenie A i B wyłączają się ($A \cap B = \varnothing$)
   stąd liczba pojawień się zdarzenia $A \cup B$ będzie równa
   sumie częstości zdarzeń:

$$\frac{n_A + n_B}{N} = \frac{n_A}{N} + \frac{n_B}{N}$$

3. ponieważ Ω jest zdarzeniem pewnym, to zajdzie ono w każdym z N doświadczeń.
   Zatem $n_\Omega = N$. Wynika stąd, że częstość zdarzenia pewnego jest równa

$$\frac{n_\Omega}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwo jest teoretycznym odpowiednikiem częstości. Pierwszą definicję prawdopodobieństwa wprowadził Laplace.
Def.
Jeżeli wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo każdego zdarzenia jest ilorazem liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu przez liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych.

$$P(A) = \frac{n(A)}{N}$$

n- liczba zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A
N- liczba wszystkich zdarzeń

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} \qquad N = \overline{\overline{\Omega}},\ n(A) = \overline{\overline{A}}$$

Własności prawdopodobieństwa

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(A) + P(A') = 1$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
6. $A \subset \Omega \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$

Przykład 1.
Mamy 10 książek, wśród których są A, B. Ustawiamy je losowo na półce. Jakie jest prawdopodobieństwo, że książki A i B będą stały obok siebie?
Ω - zdarzenie polegające na losowym ustawieniu wszystkich książek na półce

$$\overline{\overline{\Omega}} = 10!$$

A – zdarzenie polegające na ustawieniu książek A i B obok siebie
(książki te traktujemy jako jedną ale ustawioną na dwa sposoby: AB i BA)

$$\overline{\overline{A}} = 9! \cdot 2$$

$$P(A) = \frac{9! \cdot 2}{10!} = \frac{9! \cdot 2}{9! \cdot 10} = \frac{1}{5}$$

Zad. 1. W urnie są 3 kule białe i 7 czarnych. Losujemy bez zwrotu 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A – wylosowano niemniej niż 2 czarne kule.
Zad. 2. W rzędzie jest 10 miejsc ponumerowanych od 1 do 10. Każdy z 10 uczniów losuje 1 miejsce. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia A – uczniowie Paweł i Gaweł nie będą siedzieć obok siebie?
Zad. 3. Dwudziestoosobowa klasa (6 dziewcząt) otrzymała 5 biletów do kina, które rozdzielono w wyniku losowania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że bilety otrzymały 3 dziewczęta?

Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

Def.
Niech Ω będzie skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych. Prawdopodobieństwem nazywamy funkcję, która każdemu elementowi A ($A \subset \Omega$) przyporządkowuje liczbę P(A) spełniającą następujące warunki (aksjomaty):

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Przykład 1.
Wykaż, ze: $P(A') = 1 - P(A)$
zauważmy, że $A + A' = \Omega$
wtedy: $1 = P(\Omega) = P(A \cup A') = P(A) + P(A')$

Przykład 2.
Wykaż, ze: $P(\emptyset)=0$
$P(\emptyset)=1-P(\emptyset')=1-P(\Omega)=1-1=0$

Zad. 1. Wykaż, że:
1. $0\leq P(A)\leq 1$
2. $P(B\backslash A)=P(B)-P(A\cap B)$
3. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)- P(A\cap B)$
4. $A\subset B\Rightarrow P(A)\leq P(B)$
5. $P(B\backslash A)\geq P(B)-P(A)$
6. $A\subset B\Rightarrow P(B\backslash A)= P(B)-P(A)$
7. $P(A\cap B)=1-P(A'\cup B')$
8. $P(A\cup B)=1-P(A'\cup B')$
9. $P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B')$

Zad. 2. Na loterii jest 10 losów, wśród których 1 wygrywa całą stawkę, 4 wygrywają po 1/3 stawki, a pozostałe są puste. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kupując jednocześnie 3 losy wygramy całą stawkę?
Zad. 3. Losujemy 1 liczbę od 1 do 1000. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 5 i 7 oraz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 5 lub przez 7?
Zad. 4. Przy okrągłym stole posadzono 10 osób, wśród których są osoby A i B. Jakie jest prawdopodobieństwo, że:
1. osoby A i B będą siedziały obok siebie?
2. osoby A i B nie będą siedziały obok siebie?
3. między nimi będą siedziały 2 osoby?

Prawdopodobieństwo warunkowe

Def.
$$P(A\backslash B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad , P(B)\neq 0$$

<u>Własności prawdopodobieństwa warunkowego:</u>
Prawdopodobieństwo warunkowe ma takie same właściwości jak prawdopodobieństwo bezwarunkowe. Spełnia wszystkie 3 aksjomaty Homogarowa.

1. $P(A\backslash B)\geq 0$, $P(B)\neq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. jeżeli $A\cap B = \emptyset$, to $P(A\backslash B\cup B) = P(A\backslash B) + P(B)$

Przykład 1. W pewnej grze musimy odgadnąć, czy zaszło zdarzenie A – wypadła parzysta liczba oczek w jednym rzucie symetryczną kostką.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{2, 4, 6\}$

$A' = \{1, 3, 5\}$

Zatem:
$$P(A)=\frac{1}{2}, P(A')=\frac{1}{2}$$

Bez względu na to, czy postawimy na A czy na A' szansę wygrania są równe. Czy szansa wygrania wzrośnie, gdy kupimy dodatkową wiadomość o tym, że zaszło zdarzenie B – liczba oczek jest większa od trzech?

Jeżeli wiemy, że zdarzenie B zaszło, to zdarzeniu A sprzyjają dwa wyniki: 4, 6 ze zbioru B = $\{4, 5, 6\}$ możliwych wyników rzutu. Ponieważ $A \cap B = \{4, 6\}$, prawdopodobieństwo zdarzenia A, gdy wiemy, że zaszło zdarzenie B, jest równe:

$$P(A \backslash B) = \frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{B}}} = \frac{2}{3}$$

Podobnie można obliczyć, że prawdopodobieństwo zdarzenia A', gdy wiemy, że zaszło zdarzenie B. Jest równe 1/3. Stąd wniosek, że stawiając na A zwiększamy dwa razy szansę na wygranie. Zatem opłaca się kupić wiadomość o zajściu zdarzenia B.

Zad. 1. Rzucamy kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia nieparzystej liczby oczek, jeśli wiadomo, ze wypadły co najmniej 3 oczka?
Zad. 2. Z talii 52 kart losujemy kolejno dwie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że druga karta jest asem, jeśli wiadomo, że pierwsza jest pikiem?

Prawdopodobieństwo całkowite

Rozpatrzmy: $A \subset \Omega$; $B_1, B_2, ..., B_n \subset \Omega$
$B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = \Omega$
$B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j$

$$\bigwedge_{i=1,...,n} P(B_i) \neq 0$$

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap \bigcup B_i) =$$
$$= P(\bigcup A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) \qquad \bigwedge_{i=1,...,n} P(A \cap B_i) = P(A \backslash B_i) \cdot P(B_i)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \backslash B_i) \cdot P(B_i)$$

Przykład
W pierwszej urnie są 3 kule białe i 2 czarne, a w drugiej 2 białe i 3 czarne. Rzucamy kostką do gry. Jeżeli wyrzucona liczba oczek jest parzysta, to losujemy po jednej kuli z każdej urny, w przeciwnym razie losujemy dwie kule z pierwszej urny. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul o różnych kolorach.
A – wylosowano kule różnych kolorów
B – w rzucie kostką wypadła liczba parzysta
C – w rzucie kostką wypadła liczba nieparzysta
$P(A) = P[(B \cap A) \cup (B' \cap A)] = P(B) \cdot P(A \mid B) + P(B') \cdot P(A \mid B') =$

$$= \frac{3}{6} \cdot \left[\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}\right] + \frac{3}{6} \cdot \frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2}$$

Zad. 1. Rzucamy kostką. Jeśli wypadną mniej niż 3 oczka, to wyciągamy kota z pierwszego worka, w przeciwnym wypadku – z drugiego. W pierwszym worku są 3 koty białe i 4 czarne, a w drugim 2 białe i 5 czarnych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągniemy czarnego kota?
Zad. 2. Wybieramy na chybił trafił liczbę naturalną od 1 do n, a następnie rzucamy n razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyrzucimy same szóstki?
Zad. 3. Do urny zawierającej n kul wrzucono białą kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wyciągnięcia białej kuli, jeżeli wszystkie przypuszczenia co do pierwotnego składu urny są jednakowo możliwe?

Niezależność zdarzeń

$$P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Jeżeli A nie zależy od B, to:

$$P(A \backslash B) = P(A)$$

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

Zad.1. Rzucamy 2 razy kostką. Zbadaj niezależność zdarzeń:
1. na pierwszej kostce wypadły 4 oczka
2. suma oczek wyrzuconych jest większa od 7.

Zad.2. Z talii 52 kart losujemy 1. Zbadaj niezależność zdarzeń:
1. wyciągnięto króla
2. wyciągnięto czerwoną kartę.

Zad. 3. Wykaż, ze jeśli A i B są niezależne oraz $(A \cup B) = \Omega$, to $P(A)=1$ lub $P(B)=1$.

Zad. 4. Wykaż, że jeżeli A i B są niezależne, to zdarzenia:
1. A' i B są niezależne
2. A' i B' są niezależne.

Prawdopodobieństwo geometryczne

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa znajduje zastosowanie w takich sytuacjach, gdy zbiór zdarzeń elementarnych Ω w danym doświadczeniu jest nieskończony, oraz gdy przez charakter doświadczeń zagwarantowane są jednakowe szansę zaistnienia dla każdego ze zdarzeń elementarnych zboru Ω.
Def.

Prawdopodobieństwo geometryczne zdarzenia A określamy jako iloraz miary zdarzenia A do miary zdarzenia Ω.

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

Miarą prostej jest długość, płaszczyzny pole, a przestrzeni objętość.

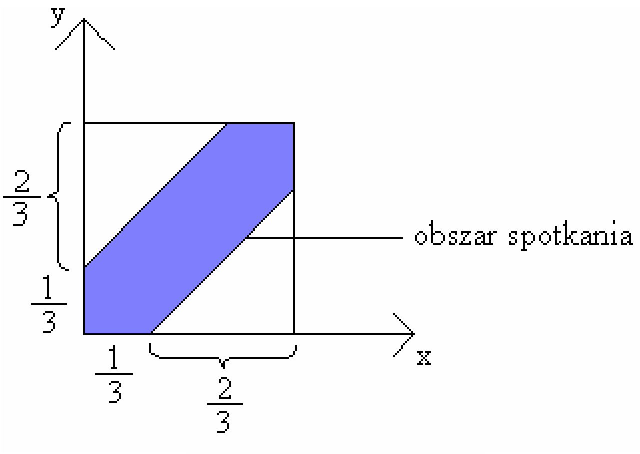
Przykład 1.
Dwie osoby X i Y umówiły się na spotkanie w umówionym miejscu między godz. 12:00 a 13:00 w ten sposób, że osoba, która przyjdzie pierwsza czeka jedynie 20 minut, po czym odchodzi. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że osoby X i Y spotkają się, jeżeli każda z nic przychodzi losowo w podanym przedziale czasowym niezależnie od siebie.
Oznaczmy:
x – czas odpowiadający momentowi przybycia I osoby (X)
y - czas odpowiadający momentowi przybycia II osoby (Y)

$$|x-y| \le \frac{1}{3}$$ (20 minut = 1/3 godziny)

stąd:

$$x - \frac{1}{3} \le y \le x + \frac{1}{3}$$

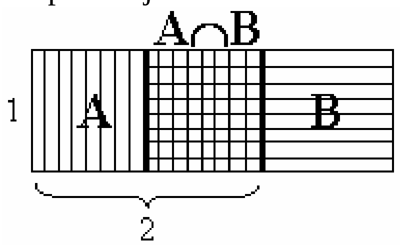
Obliczamy pole zaciemnionego obszaru :



$$P = 1 - 2\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2} = \frac{5}{9}$$

Odp. Prawdopodobieństwo spotkania wynosi $\frac{5}{9}$

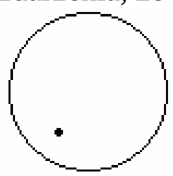
Przykład 2.
Strzelec strzela do tarczy. Tarczę stanowią dwa prostokąty o wymiarach 1m na 2m, nachodzące wzajemnie na siebie w połowie wielkości. Jeżeli strzelec strzelał na chybił trafił i podano informację, że kula tkwi w polu B, to prawdopodobieństwo, ze trafił w pole A obliczamy biorąc pod uwagę, że zdarzenie, iż kula tkwi w polu A jest równoważne zdarzeniu, że kula tkwi w polu A∩B.



m(Ω) – trafienie w tarczę B m(Ω) = 2
m(A) – miara trafienia w przekrój m(A) = 1

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1}{2}$$

Przykład 3.
Strzelec strzela do tarczy. Oblicz prawdopodobieństwo trafienia w ściśle określony punkt.
m(A) – miara zdarzenia, że strzelec trafi w ściśle określony punkt tarczy
m(Ω) – miara zdarzenia, że strzelec trafi w tarczę



m(A) = 0

$$P(A) = \frac{0}{m(\Omega)} = 0$$

pole punktu = 0

Odp. Jeżeli zero będzie w liczniku, to prawdopodobieństwo będzie równe zero, chociaż nie jest wcale niemożliwe trafienie w wybrany punkt.
Przykład 4.
Strzelec strzela do tarczy:

- promień największego okręgu $r_1 = 1m$
- promień średniego okręgu $r_2 = 0{,}5m$
- promień najmniejszego okręgu $r_3 = 0{,}1m$

Jakie jest prawdopodobieństwo strzału za 3 punkty, a jakie strzału za 2 punkty?

1. prawdopodobieństwo trafienia za 3 punkty

A – zdarzenie polegające na trafieniu za 3 punkty
Ω - trafienie w tarczę
$m(A) = \pi r_3^2 = \pi(0{,}1)^2 = 0{,}01\pi$
$m(\Omega) = \pi r_1^2 = \pi 1^2 = \pi$

$$P(A) = \frac{0{,}01\pi}{\pi} = 0{,}01$$

2. prawdopodobieństwo trafienia za 2 punkty

B- zdarzenie polegające na trafieniu za 2 punkty
Ω - trafienie w tarczę
$m(B) = \pi r_2^2 - \pi r_3^2 = 0{,}25\pi - 0{,}01\pi = 0{,}24\pi$
$m(\Omega) = \pi$

$$P(B) = \frac{0{,}24\pi}{\pi} = 0{,}24$$

Zad. 1. Drut o długości a przecięto w dwóch miejscach. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z trzech otrzymanych odcinków otrzymamy trójkąt?

Twierdzenie Bayesa

Dany jest układ zupełny zdarzeń $A_1, A_2, ..., A_n$ oraz zdarzenie B określone w tej samej przestrzeni Ω. Zdarzenie B zaszło. Interesuje nas w tym przypadku prawdopodobieństwo zdarzenia A_k (k=1, 2, ..., n). A_k obliczamy na podstawie otrzymanej już informacji o zajściu zdarzenia B.

Zagadnienie $P(A_k \backslash B)$ nazywamy **zagadnieniem Bayesa**. Zdarzenie A_k nazywamy przyczyną zajścia zdarzenia B, które określane jest także jako skutek. Wówczas, kiedy B zaszło ciekawi nas prawdopodobieństwo, że zdarzenie A_k było przyczyną zajścia zdarzenia B.
$P(B \cap A_k) = P(B) \cdot P(A_k \backslash B) = P(B \backslash A_k) \cdot P(A_k)$

$$P(A_k \backslash B) = \frac{P(B \cap A_k)}{P(B)} = \frac{P(B \backslash A_k) \cdot P(A_k)}{P(B)}$$

$P(B) = P(A_1 \cap B + A_2 \cap B + ... + A_n \cap B)$

Przykład
W magazynie znajdują się żarówki produkowane przez trzy zakłady produkcyjne. Zakład pierwszy wyprodukował 25%, zakłąd drugi 35%, zaś zakład trzeci40% ogólnej liczby żarówek znajdujących się w magazynie. Na 100 żarówek w pierwszym zakładzie trafiają się dwie zepsute, w zakładzie drugim – cztery zepsute, zaś w zakłądzie trzecim – pięć zepsutych. Wybraliśmy losowo jedną żarówkę, która jest dobra. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyprodukował ją zakład trzeci?
D – zdarzenie polegające na wylosowaniu żarówki dobrej
Z1 – zdarzenie polegające na wylosowaniu żarówki z zakładu pierwszego
Z2 – zdarzenie polegające na wylosowaniu żarówki z zakładu drugiego
Z3 - zdarzenie polegające na wylosowaniu żarówki z zakładu trzeciego
Z3 | D – wylosowana żarówka pochodzi z zakładu trzeciego pod warunkiem, że jest dobra

Wiedząc, że: $P(D) = P(D \mid Z_1) \cdot P(Z_1) + P(D \mid Z_2) \cdot P(Z_2) + P(D \mid Z_3) \cdot P(Z_3) =$

$$= \frac{98}{100} \cdot \frac{25}{100} + \frac{96}{100} \cdot \frac{35}{100} + \frac{95}{100} \cdot \frac{40}{100}$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia $Z_3 \mid D$ wyznaczamy ze wzoru:

$$P(Z_3 \mid D) = \frac{P(Z_3 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D \mid Z_3) \cdot P(Z_3)}{P(D)}$$

$$P(Z_3 \mid D) = \frac{380}{961}$$

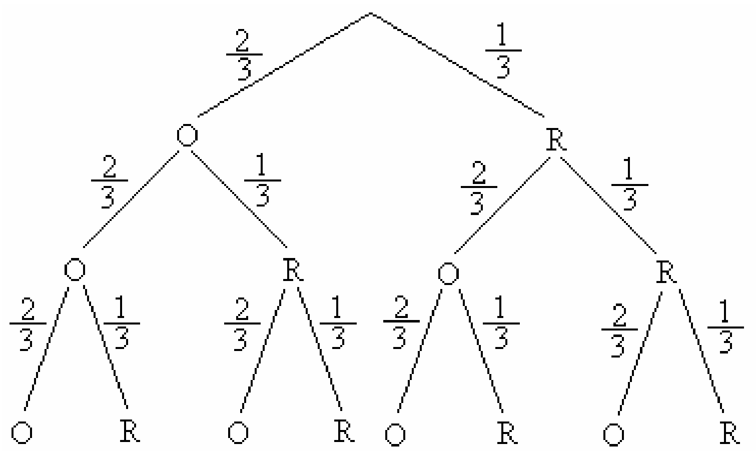
Zad. 1. Pewna choroba występuje u 1% ludności. Przygotowano test do jej wykrycia. Test daje wynik pozytywny u 98% chorych i 5% zdrowych. Wybrano losowo osobę i jej test dał wynik pozytywny. Oblicz prawdopodobieństwo, że ta osoba jest chora.

Zad. 2. Opisany wyżej test został ulepszony tak, aby tylko 0,1% osób zdrowych miało wynik pozytywny. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba jest chora, jeśli test wypadł pozytywnie.

Schemat Bernoulliego

Wśród doświadczeń wieloetapowych szczególne miejsce zajmują te, które polegają na n- krotnym powtórzeniu, w tych samych warunkach i niezależnie od siebie, doświadczenia cząstkowego kończącego się jednym z dwu możliwych wyników. Jeden z tych wyników nazywamy sukcesem, a drugi - porażką. Każde takie cząstkowe doświadczenie nazywamy próbą Bernoulliego, natomiast n- etapowe doświadczenie – schematem Bernoulliego.

Przykład 1.
Rozpatrzmy trzykrotny rzut niesymetryczną monetą, w której orzeł wypada dwa razy częściej niż reszka. Zbudujmy model probabilistyczny tego doświadczenia.
Zbiór zdarzeń elementarnych:
$\Omega = \{(O,O,O), (O,O,R), (O,R,O), (R,O,O), (R,R,O), (R,O,R), (O,R,R), (R,R,R)\}$
drzewko prawdopodobieństwa



Prawdopodobieństwo poszczególnych zdarzeń:

$$P((O,O,O)) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$P((R,O,O)) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$P((O,R,O)) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$P((O,O,R)) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$P((R,R,O)) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1$$

$$P((R,O,R)) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1$$

$$P((O,R,R)) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1$$

$$P((R,R,R)) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0$$

Niech k oznacza liczbę resztek.
Wtedy 3-k oznacza liczbę orłów.
Zauważmy, ze prawdopodobieństwo pojedynczego zdarzenia $\omega\in\Omega$ jest równe:

$$P(\omega) = \left(\frac{1}{3}\right)^k\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3-k}$$

Wzór ten przypisuje prawdopodobieństwo tym zdarzeniom, w których reszka (R) występuje dokładnie k razy.

Jest ich tyle, na ile sposobów można rozmieścić k wyrazów R na 3 miejscach, a więc tyle, ile k-elementowych kombinacji zbioru 3-elementowego, tj.

$$\binom{3}{k}$$

Zastępując liczbę 3 dowolną liczbą naturalną n i prawdopodobieństwo sukcesu (tj. wypadnięcia reszki) przez p oraz porażki (tj. wypadnięcia orła) przez q, otrzymamy:

Tw.
W schemacie n- prób Bernoulliego prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie k- sukcesów wyraża się wzorem:

$$P_n(k) = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$$

Przykład 1.
Rzucamy 5 razy symetryczną kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że szóstka wypadnie dokładnie 3 razy?

Mamy do czynienia ze schematem pięciu prób Bernoulliego, gdzie sukcesem jest wypadnięcie szóstki.

$p = \frac{1}{6}$ $n=5$

$q = \frac{5}{6}$ $k=3$

Niech A oznacza zdarzenie, że dokładnie 3 razy w 5 rzutach kostką wypadnie szóstka.

Na mocy twierdzenia:

$$P(A) = P_5(3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{216} \cdot \frac{25}{36}$$

Zad. 1. Z talii 24 kart losujemy 4 karty po jednej, za każdym razem zwracając wylosowaną kartę do talii. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:

1. 4 razy karty czerwonej
2. 3 razy figury
3. 2 razy trefla.

Zad. 2. W urnie jest 10 kul: 3 białe ii 7 czarnych. Losujemy 6 razy po jednej kuli, zwracając za każdym razem wylosowaną kulę do urny. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej 5 lub 6 razy?
Zad. 3. Co jest bardziej prawdopodobne w grze z równorzędnymi przeciwnikami: wygrać 3z4, czy 5 z 8 partii?
Zad. 4. W schemacie n-prób Bernoulliego prawdopodobieństwo zyskania sukcesu w 1 próbie wynosi p=1/3. Jakie musi być n, aby prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej jednego sukcesu przy n próbach było większe od 65/81?
Zad. 5. Każda z trzech jednakowych urn zawiera 21 kul, w tym k białych. Z każdej urny wyciągamy losowo 1 kulę. Zbadać, dla jakich k prawdopodobieństwo wyciągnięcia dokładnie 2 kul białych jest największe.

NAJBARDZIEJ PRAWDOPODOBNA LICZBA SUKCESÓW W SCHEMACIE BERNOULLIEGO

Liczbę k_0, dla której $P_n(k_0) > P_n(k)$ nazywamy **najbardziej prawdopodobną liczbą sukcesów** w schemacie Bernoulliego.
Tw.
1. Jeżeli $(n + 1) \cdot p$ nie jest liczbą całkowitą, to najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego jest część całkowita z tego iloczynu
   $k_0 = [(n + 1) \cdot p]$
2. jeżeli $(n + 1) \cdot p$ jest liczbą całkowitą, to
   $k_0 = [(n + 1) \cdot p - 1$ lub $k_0 = (n + 1) \cdot p$

Przykłady:

1. Prawdopodobieństwo trafienia do celu w jednym strzale wynosi 0,9. Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba trafień w serii 30 strzałów?
   $p = 0,9$
   $N = 30$
   $(N + 1) \cdot p = 0,9 \cdot 31 = 27,9$
   $[(N + 1) \cdot p] = [27,9] = 27$
2. Z talii 52 kart losujemy 5. Po jednej zwracając za każdym razem. Oblicz najbardziej prawdopodobną liczbę figur.
   Najpierw obliczamy prawdopodobieństwo

$$P(A) = \frac{16}{25}$$

$$N = 5$$

$$(N+1) \cdot p = 6 \cdot \frac{16}{52} = \frac{48}{26} = \frac{24}{13}$$

Na mocy twierdzenia

$$[(N+1) \cdot p] = \frac{24}{13} = 1$$

Zad 1. Rzucamy 9 razy monetą. Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba wyrzuconych orłów?
Zad 2. W I LO w Słupsku jest 627 uczniów. Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba uczniów mających urodziny w tym samym dniu?

Zmienna losowa, rozkład i wartość oczekiwana zmiennej losowej.

Def.

Zmienną losową X nazywamy dowolna funkcję, która każdemu zdarzeniu elementarnemu $\omega \in \Omega$ przyporządkowuje liczbą rzeczywistą, oznaczoną przez $X(\omega)$.

Każdą liczbę $X(\omega)$ nazywamy **wartością zmiennej losowej**: $X : \Omega \to R$

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X – zbiór par
$\left\{(x_i, p_i): x_i \in X(\Omega) \wedge p_i = P(\left\{\omega \in \Omega; X(\omega) = x_i\right\})\right\}$

$X(\Omega) = \left\{x_1, x_2, ..., x_n\right\}$

$(x_1, p_1), (x_2, p_2), ..., (x_n, p_n)$

Rozkładem zmiennej losowej nazywamy zbiór $\left\{(x_i, p_i), i = \left\{1, 2, 3, ..., n\right\}\right\}$, tzn. parę (x_i, p_i), gdzie x_i jest wartością zmiennej losowej X, a p_i jest prawdopodobieństwem, z jakim X przybiera wartość x_i.

$$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Jeżeli zmienna losowa przyjmuje swoje wartości z tym samym prawdopodobieństwem, to:

x_1	x_2	...	x_n
$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

$$EX = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Przykład 1.

W pudełku jest 10 losów ponumerowanych od 1 do 10. Na los nr 1 padła główna wygrana 10 złotych, na losy nr 2 i nr 3 – nagroda pocieszenia 1 złoty, a za wyciągnięcie pozostałych płacimy 2 złote. Doświadczenie polega na wyciągnięciu jednego los.

Niech X oznacza wygraną:
$X: \Omega \to R$
$\Omega = \left\{1, 2, ..., 10\right\}$

$X(1) = 10$ (zdarzenie elementarne polegające na tym, że wylosowaliśmy los nr 1)
$X(2) = X(3) = 1$
$X(k) = -2$, $k \in \left\{4, ..., 10\right\}$

X:

1	2	3	4	...	10
10	1	1	-2	-2	-2

rozkład zmiennej losowej:

$$\left(-2, \frac{7}{10}\right), \left(1, \frac{2}{10}\right), \left(10, \frac{1}{10}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

x_i	-2	1	10
p_i	$\frac{7}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$EX = -2 \cdot \frac{7}{10} + 1 \cdot \frac{2}{10} + 10 \cdot \frac{1}{10} = -\frac{2}{10}$$

Wariancja

Przykład 1. rzucamy monetą. Gdy wypadnie orzeł, to wygrywamy 1 złoty, gdy reszka – przegrywamy 1 złoty.

1	-1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

, $EX = 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$

Niech X będzie zmienną losową przyjmującą wartości $x_1, x_2, ..., x_n$ z prawdopodobieństwem $p_1, p_2, ..., p_n$.
$(p_1 + p_2 + ... + p_n = 1)$

Wariancją zmiennej losowej X nazywamy liczbę
VarX lub $D^2X = (x_1 - EX)^2 p_1 + ... + (x_n - EX)^2 p_n$

$D^2X = (1-0)^2 \cdot 0{,}5 + (-1-0)^2 \cdot 0{,}5 = 1$

$EX_n = np$

Zad. 1. Postanowiono rzucać albo zwykłą kostką, albo kostką 1, 1, 1, 6, 6, 6. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję liczby wyrzuconych oczek.
Zad. 2. Zmienna losowa X przyjmuje tylko dwie możliwe jednakowo prawdopodobne wartości a i b. Udowodnij, że wariancja zmiennej losowej X jest równa kwadratowi połowy tych możliwych wartości.