Pochodna

Pochodna. Iloraz różnicowy

Niech dana będzie funkcja $f:D:\rightarrow R$. Weźmy punkt x_0 taki ,że zawiera się w dziedzinie wraz ze swoim otoczeniem. Weźmy teraz dowolne $x_1 \neq x_0$ należące do otoczenia punktu x_0 : $x_1 \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

Różnicę $x_1 - x_0$ nazywamy przyrostem argumentu od x_0 do x_1 i oznaczamy Δx (h) odpowiadającą mu różnicę $f(x_1) - f(x_0)$ nazywamy przyrostem wartości i oznaczamy Δy

Def.

Iloraz

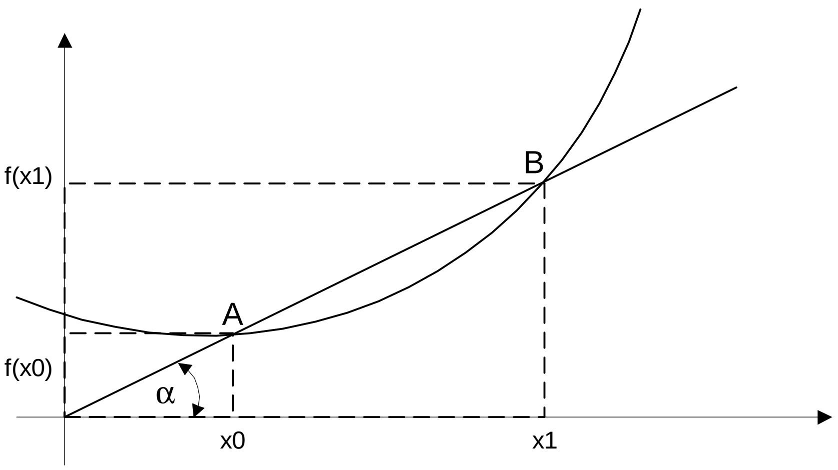
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

nazywamy **ilorazem różnicowym** funkcji f odpowiadającym przyrostowi argumentu od x0 do x1

Przykład

$$f(x) = 5 - x^2; x_0 = 3, x_1 = 5$$
$$f(x_0) = f(3) = 5 - 9 = -4$$
$$f(x_1) = f(5) = 5 - 25 = -20$$
$$\Delta y = f(x_1) - f(x_0) = -20 + 4 = -16$$
$$\Delta x = x_1 - x_0 = 5 - 3 = 2$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-16}{2} = -8$$

<u>Interpretacja geometryczna</u>



Przez punkty A(x_0, $f(x_0)$) i B(x_1, $f(x_1)$) przechodzi prosta y = ax + b zwana sieczną.

Z trójkąta ABC $\begin{matrix} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BC}{AC} \\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \end{matrix}$ ponieważ a = tg α, więc $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, gdzie a – współczynnik kierunkowy prostej.

Iloraz różnicowy jest równy **współczynnikowi kierunkowemu** siecznej.

Ponieważ każdemu punktowi x1 ∈ (x_0 - ε, x_0 + ε) odpowiada jeden iloraz różnicowy możemy mówić o funkcji

Def.

Funkcję g: ∈ (x_0 - ε, x_0)∪ (x_0, x_0+ε)→R określoną wzorem :

$g(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nazywamy ilorazem różnicowym.

UWAGA:

Przyjmując

$$x_1 - x_0 = h$$
$$x_1 = x_0 + h$$
$$g(x) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
$$D = (-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon)$$

Pochodna funkcji w punkcie

Iloraz różnicowy jest funkcją określoną w sąsiedztwie punktu x_0. Punkt x_0 nie należy do dziedziny ilorazu różnicowego, ale jest punktem jej skupienia. Można więc mówić o granicy ilorazu różnicowego w punkcie x_0.

Def.

Granicę ilorazu różnicowego funkcji w punkcie nazywamy pochodną funkcji w punkcie

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

O funkcji która ma pochodną w punkcie x_0 mówimy, że jest różniczkowalna w punkcie x_0.

UWAGA:

Def .

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} g(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Przykład.

Korzystając z definicji oblicz f''(x_0) dla

$$f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = \sqrt{3}$$

$$f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f'(\sqrt{3}) = \lim_{x \to \sqrt{3}} \frac{\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{x - \sqrt{3}}$$

$$\lim_{x \to \sqrt{3}} \frac{3 - \sqrt{3}x}{3x(x - \sqrt{3})} = \lim_{x \to \sqrt{3}} \frac{-\sqrt{3}(x - \sqrt{3})}{3x(x - \sqrt{3})} = \lim_{x \to \sqrt{3}} \frac{-\sqrt{3}}{3x} = -\frac{-\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{-1}{3}$$

Interpretacja geometryczna pochodnych

Iloraz różnicowy funkcji w punkcie jest współczynnikiem kierunkowym siecznej.

Jeżeli $x \to x_0$ to sieczne k1, k2,... dążą do prostej k zwanej styczną.

Pochodna funkcji w punkcie jest równa współczynnikowi kierunkowemu stycznej do wykresu funkcji w tym punkcie.

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

Def.

Niech $f:D:\to R$ będzie funkcją określoną w pewnym otoczeniu punktu x_0, i różniczkowalną w punkcie x_0. Prostą o równaniu

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

nazywamy styczną do wykresu funkcji f w punkcie P(x_0, f(x_0)).

UWAGA:

Styczna do wykresu funkcji w danym punkcie może mieć z tym wykresem więcej niż jeden punkt wspólny.

Przykład

Napisz równanie stycznej do krzywej y = f(x) w punkcie o odciętej x_0. Sporządź rysunek.

$$f(x) = 2x + 3; x_0 = e$$
$$f(x_0) = 2e + 3$$
$$f'(x_0) = \lim_{x\to e} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to e} \frac{2x + 3 - (2e + 3)}{x - e} = \lim_{x\to e} \frac{2x - 2e}{x - e} = \frac{2(x - e)}{x - e} = 2$$
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$
$$y - 2e - 3 = 2(x - e)$$
$$y = 2x - 2e + 2e + 3$$
$$y = 2x + 3$$

Pochodna jako funkcja

Def.

Niech f:D:→R. Przez D' oznaczmy zbiór tych elementów x w funkcji f dla których istnieje pochodna. Funkcję f':D':→R, która każdej liczbie x∈D' przyporządkowuje jej pochodną f;'(x) nazywamy pochodną funkcji f.

UWAGA:

Pochodna funkcji w punkcie jest liczbą a pochodna funkcji jest funkcją.

Przykład.

Wyznaczyć pochodną f:D:→R daną wzorem $f(x) = x^2 - 1$

$$f'(x_0) = \lim_{x - x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x - x_0} \frac{x^2 - 1 - x_0^2 + 1}{x - x_0} = \lim_{x - x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x - x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0$$

Tak jest dla każażde punktu x_0 zatem :

$$f'(x) = 2x$$

2)

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2 + 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + 2hx + h^2 - x_0^2}{h} = 2x_0$$

Przy wyznaczaniu pochodnych wygodniej posługiwać się twierdzeniami.

Tw.

Jeśli f:D:→R i g:D:→R są różniczkowalne w punkcie swojej dziedziny, to w zbiorze D różniczkowalne są też funkcje k * f, f + g , f-g, f * g, f / g oraz zachodzą wzory

1).$[kf(x)]' = kf'(x); k \in R$

2).$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$

3).$[f(x)-g(x)]' = f'(x)-g'(x)$

4).$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

5).$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Dowody.

1.

$$[kf(x)]' = kf'(x); k \in R$$

$$[kf(x)]' = \lim_{h\to\infty}\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h} = \lim_{h\to\infty}\frac{k[f(x+h)-f(x)]}{h} = k\lim_{h\to\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = kf'(x)$$

$c.n.d.$

2.

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$$

$$[f(x)+g(x)]' = \lim_{h\to\infty}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x)$$

$c.n.d.$

4.

$$[f(x)g(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)-f(x)g(x++h)+f(x)g(x+h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)-f(x)g(x)+f(x)g(x+h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[g(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h))-g(x)}{h}f(x)\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} * \lim_{h\to 0}g(x+h)+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} * \lim_{h\to 0}f(x) =$$

$$= f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$$

$c.n.d.$

5.

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h(g(x+h)g(x))} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-g(x)f(x)-f(x)g(x+h)+g(x)f(x)}{g(x+h)g(x)h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)+[f(x+h)-f(x)]-f(x)[g(x+h)-g(x)}{g(x+h)g(x)h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}f(x)}{g(x+h)g(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$c.n.d.$

TW. 6

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna to jest ciągła.

Twierdzenia tego nie można odwrócić.

TW. 7

Funkcja stała i potęgowa są różniczkowalne oraz zachodzą wzory

$7).(C)'=0; C\in R$

$8).(x^n)'=nx$

WNIOSEK

$$9).(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$10).\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-n}{x^{n-1}}$$

Przykład

Oblicz pochodną funkcji f, jeśli :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)'(\sqrt{x}+1)-(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)'}{(\sqrt{x}+1)^2} =$$

$$= \frac{(\sqrt{x})'(\sqrt{x}+1)-(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)-\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\frac{2}{2\sqrt{x}}}{x+2\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$f(x) = \frac{3x-2\sqrt{x}+1}{x^{10}}$$

$$f'(x) = \left[\frac{3x-2\sqrt{x}+1}{x^{10}}\right]' = \frac{(3x-2\sqrt{x}+1)'(x^{10})-(3x-2\sqrt{x}+1)(x^{10})'}{x^{20}} =$$

$$= \frac{(3(x)'-2(\sqrt{x})')x^{10}-30x^{10}-20x^9\sqrt{x}+10x^9}{x^{20}} = \frac{3x^{10}-\frac{x^{10}}{\sqrt{x}}-30x^{10}-20x^9\sqrt{x}+10x^9}{x^{20}}$$

Pochodna funkcji złożonej

TW.

Jeżeli funkcja h jest złożeniem funkcji f i g, przy czym funkcje f i g są różniczkowalne, to funkcja h jest różniczkowalna oraz zachodzi wzór

$$h'(x)=g'(f(x))*f'(x)$$

Przykład

Oblicz pochodną funkcji $h(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}; D: x \geq 0 \cap 1+\sqrt{x} \geq 0$

$f(x)=1+\sqrt{x}=y \qquad \mathrm{f'(x)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$g(y)=\sqrt{y} \qquad \mathrm{g'(y)}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$

$$h'(x)=g'(y)\,f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{y}}=\frac{1}{4\sqrt{x+x\sqrt{x}}}$$

$D'=R_+$

$$\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)^e=h(x)$$

$$D: x \geq 0 \cap \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \geq 0 \cap 1+\sqrt{x} \neq 0$$

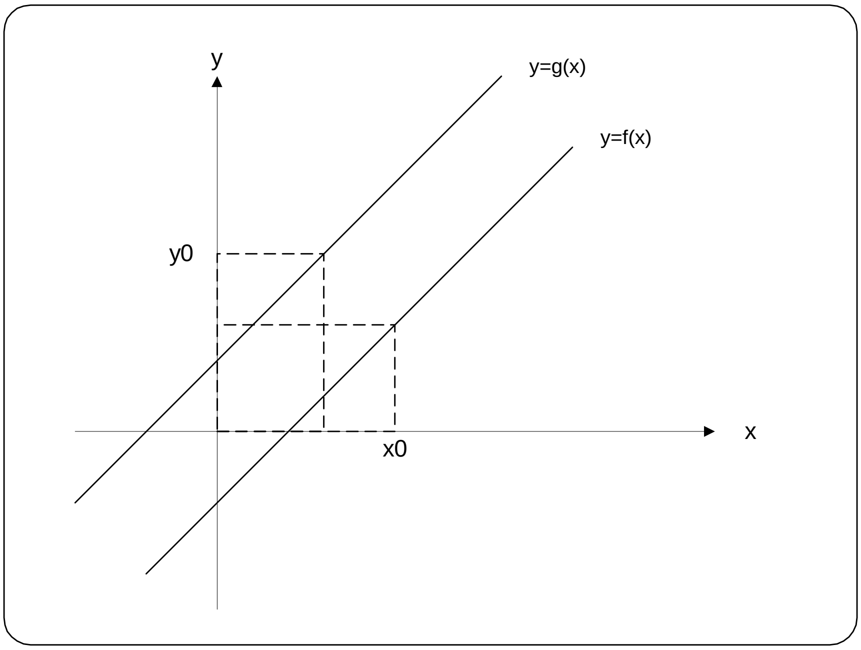
$$h'(x)=e\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)^{e-1}*\left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}}*\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

Pochodna funkcji odwrotnej

TW.

Jeżel funkcja x=g(y) jest ściśle monotoniczna i posiada funkcję pochodną g'(x) ≠0, to funkcja y=f(x) odwrotna do niej posiada pochodną f'(x), przy czym

$f'(x)=\frac{1}{g'(y)}$ gdzie $\mathrm{y = f(x)}$ dla każażde $\mathrm{x} \in \mathrm{D_f}$



Zał.

x=g(y), g – ściśle monotniczna i różniczkowalna oraz ciągła

y=f(x)

Teza

f – różniczkowalna $f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$

Dowód

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = (*)$$

$(*)\, f(x) = y$

$f(x+\Delta x) = y + \Delta y$

$f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y$

$g(f(a)) = a$

$a = x + \Delta x$

$g(f(x+\Delta x)) = x + \Delta x$

$g(y+\Delta y) = x + \Delta x$

$\Delta x + x = g(y + \Delta y)$

$\Delta x = g(y+\Delta y) - x$

$g(y+\Delta y) - g(y) = \Delta x$

Zauważmy, że jeśli $\Delta x \to 0$, to $\Delta y \to 0$.

$$(*)\ \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{g(y+\Delta y)-g(y)} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{g(y+\Delta y)-g(y)}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{g(y+\Delta y)-g(y)}{\Delta y}} =$$

$$= \frac{1}{g'(x)}$$

c.n.d.

Pochodne funkcji trygonometrycznych

(sin x)'=cos x

Dowód

Korzystamy z definicji pochodnej funkcji w punkcie f(x) = sin x

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h+x_0)-\sin x_0}{h} = (1)$$

$$(1)\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} * \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$(1) = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{(x_0+h+x_0)}{2} * \sin\frac{h+x_0-x_0}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{(2x_0+h)}{2} * \sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right) * \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \lim_{h\to 0}\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right) * 1 = (2)$$

(2)

$\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ cos jest funkcją ciąiąg zatem f'(x) = cos x

c.n.d.

(cos x)'= - sin x

Dowód

Korzystamy z definicji pochodnej wfunkcji w punkcie f(x) = cos x

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(h+x_0)-\cos x_0}{h}$$

$$(1)\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} * \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$(1) = \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{(x_0+h+x_0)}{2} * \sin\frac{h+x_0-x_0}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{(2x_0+h)}{2} * \sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} -\sin\left(x_0+\frac{h}{2}\right) * \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \lim_{h\to 0} -\sin\left(x_0+\frac{h}{2}\right) * 1 = -\sin x$$

c.n.d.

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Dowód

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

c.n.d.

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Dowód

Analogicznie jak dla tg x.

Przykład

Oblicz

$$[\sin(8x^2-5x+1)]' = \cos(8x^2-5x+1)(8x^2-5x+1)' = \cos(8x^2-5x+1) * (8x^2)' - (5x)' + (1)' =$$

$$= \cos(8x^2-5x+1) * (16x-5)$$

Pochodne funkcji cyklometrycznych

TW.

Funkcje cyklometryczne są różniczkowalne i zachodzą wzory

$$(arc\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Dowód

Funkcja $arc\sin x$ w przedziale (-1, 1) jest odwrotna względem funkcji $x = \sin y$ w przedziale $\left(-\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}\right)$. Korzystamy z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej:

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}.$$

$$(arc\sin x)' = \frac{1}{(\sin(y))'} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

c.n.d.

$$(arc\cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Dowód analogiczny jak dla $arc\sin x$.

$$(\text{arc tg x})' = \frac{1+}{1+x^2}$$

Dowód

Funkcja $y = \text{arc tg x}$ w przedziale (-1, 1) jest odwrotna funkcji $x = \text{tg y}$

Korzystamy z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej

$$(\text{arc tg x})' = \frac{1}{\text{tg}'(y)} * \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(y)}} * \cos^2(y) = (1)$$

$$(1) \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(y)}} = \frac{1}{\frac{\sin^2(y)+\cos^2(y)}{\cos^2(y)}} = \frac{1}{1+\text{tg}^2(y)} = \frac{1}{1+x^2}$$

c.n.d.

$$(arc\,\text{ctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Dowód analogiczny jak dla tg x.

Przyklad

$$[arc\sin x * \text{arc tg x}]' = (arc\sin x)' * (\text{arc tg x}) + (arc\sin x) * (\text{arc tg x})' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\text{x}^2}}(\text{arc tg x}) + \frac{(arc\sin x)}{1+x^2} = \left[\frac{(\text{arc tg x})(1+\text{x}^2) + (arc\sin x)(1-\text{x}^2)}{(1-\text{x}^4)}\right]\sqrt{1-\text{x}^2}$$

Pochodna funkcji wykładniczej

TW

Funkcja wykładnicza jest różniczkowalna i zachodzą wzory

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

Dowód

$$g(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f(x_0) = a^{x_0}$$

$$f(x_0 + h) = a^{x_0 + h}$$

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x_0+h} - a^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x_0} a^h - a^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} a^{x_0} \frac{a^h - 1}{h} = a^{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^{x_0} \ln a$$

c.n.d.

Lemat

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Wniosek

$$(e^x) = e^x$$

Przykład

$$y = (e^{3x})' = e^{3x} * \ln e^3 = e^{3x} 3 \log e = 3e^{3x}$$

Pochodna funkcji logarytmicznej

TW.

Funkcja logarytmiczna jest różniczkowalna i zachodzą wzory

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$$

Proste dowody pozostawiamy czytelnikowi

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Przykład

Oblicz:

$$(\ln\sqrt{\cos x})' = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}\,\frac{1}{2\sqrt{\cos x}}(-\sin x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$$

$$(\log_3(9-3x))' = \frac{1}{(9-3x)\log_e(3)}(-3);\ x<3$$

Zadanie

Wyznaczyć równanie normalnej do krzywej $y = x^2$ w punkcie o odciędcix$_0 = 1$

$y - f(x_{0=a_2}) = f'(x_0)(x - x_0)$ - równanie stycznej do krzywej

$f(x_0) = 1$

$f'(x) = 2x$

$f'(x_0) = 2$

$y - 1 = 2x - 2$

$y = 2x - 1$

Wyznaczamy równanie normalnej z warunku prostopadłości prostych

$$a_2 = -\frac{1}{a_1}$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}$$

Korzystając z równania prostej o danym współczynniku kierunkowym a przechodzącym przez P mamy :

$\mathrm{y - y_1} = a(x - x_1)$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x-1)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Odp. Szukana normalan ma równanie $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

Zadanie

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{2}{x}$ $x \in R_+$. Napisz równie stycznej do wykresu w punkcie o odciętej $x_0 = 1$.

Korzystamy ze wzoru na styczną do wykresu funkcji $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$; $f(x) = \frac{2}{x}$

$f(x_0) = 2,$

$f'(x) = -\frac{2}{x^2}$

$f'(x_0) = -2$

$y - 2 = -2(x - 2)$

$y = -2x + 6$

Odp. Szukana styczna ma postać $y = -2x + 6$

Druga pochodna.

Def.

Jeżeli pochodna f’ funkcji f jest funkcją różniczkowalną w punkcie x_0 to jej pochodną nazywamy pochodną drugiego rzędu w punkcie x_0 f’’(x).

Jeżeli druga pochodna funkcji f istnieje w każdym punkcie pewnego zbioru D’’, to każdej liczbie x należącej do D’’ można przyporządkować dokładnie jedna liczbę f’’(x). Więc na zbiorze D’’ można określić nową funkcję zwaną funkcją pochodną drugiego rzędu funkci f.

Przykład

Oblicz drugą pochodną funkcji f, jeśli $y = x^4 - 5x^3 + 2x; D = R$

$y' = 4x^3 - 15x^2 + 2; D' = D$

$y'' = 12x^2 - 30x; D'' = D$

$y = \sin^2 x; D = R$

$y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x; D' = R$

$y'' = 2\cos 2x; D'' = R$

Pochodne wyższych rzędów

Def.

Pochodna n-tego rzędu w punkcie x określamy następująco

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$$

Przykład

Wyznaczyć n - tą pochodną funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$, $D = R \setminus \{0\}$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$$

$$f^{4}(x) = \frac{24}{x^5}$$

Wniosek :

$$f^{n}(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}(-1)^n$$

Metoda pochodnej logarytmicznej

Def.

Pochodną logarytmiczną funkcji f nazywamy pochodną jej logarytmu naturalnego.

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

niekiedy łatwiej jest obliczyć pochodną logarytmiczną niż pochodną. Obliczamy zatem

$$f'(x) = f(x)(\ln f(x))'$$

Przykład

Oblicz pochodną

$$y = x^x; D = R_+$$
$$\ln y = \ln x^x$$
$$(\ln y)' = (x \ln x)'$$
$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{x} x + \ln x$$
$$y' = (\ln x + 1) y$$
$$y' = x^x (\ln x + 1)$$

$$y = \log_x 10; D : (0,1) \cup (1,+\infty)$$
$$\log_x x^y = \log_x 10$$
$$x^y = 10$$
$$\ln x^y = \ln 10$$
$$y \ln x = \ln 10$$
$$y = \frac{\ln 10}{\ln x}$$
$$y' = \frac{(\ln 10)' \ln x - \ln 10 (\ln x)'}{\ln^2 x}$$
$$y' = \frac{-\ln 10}{\ln^2 x} \frac{1}{x}$$

Twierdzenie d'Hospitala

TW.

Jeśli funkcje f i g są określone i różniczkowalne w sąsiedztwie punktu x0 oraz g(x)≠0 i g'(x)≠0 oraz zachodzi jeden z następujacych warunków

1). $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ lub

2). $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$

i istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = m$, to istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, czyli

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

UWAGA:

Reguła ta obowiązuje również dla granic jednostronnych, granic w nieskończoności i w przypadku granicy niewłaściwej rozpatrywanych ilorazów.

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ przedstawia sobą nieoznaczoność $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, itd$ to twierdzenie d'Hospitala stosujemy ponownie.

Przykład

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{1000} - 1}{x - 1} \overset{h}{=} \lim_{x \to 1} \left(\frac{x^{1000} - 1}{x - 1} \right)' = \lim_{x \to 1} \frac{1000x^{999}}{1} = 1000$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} \overset{h}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{3x^2} \overset{h}{=} \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{3x^2} \right)' = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{6x} \overset{h}{=} \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{6x} \right)' = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty$$

Zastosowanie pochodnych w fizyce

Pochodne mają również zastosowanie w fizyce. Wykorzystane w zadaniu ułatwiają jego rozwiązanie.

Zadanie

Ciało porusza się zgodnie z równaniem

$x = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$. Wyznacz V i a dla t = 5s.

V = x'

a = x''

$$V = \left(\frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t \right)' = t^2 - 4t + 3 = 8[m/s]$$

$$a = \left(t^2 - 4t + 3\right)' = 2t - 4 = 6[m/s^2]$$

Twierdzenie o wartości średniej

Twierdzenie Rolle'a

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale <a, b> i rózniczkowalna w przedziale (a, b) i f(a)=f(b), to istnieje taki punkt c taki, że f'(c)=0.

Twierdzenie o wartości średniej **Lagrange'a**

Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale <a, b > i różniczkowalna na przedziale (a, b), to istnieje taki punkt c należący do (a, b), że $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Przykład

Wyznaczyc średnią wartość funkcji f w podanym przedziale <-1, 5 >.

$$f(x) = 3x^2 - 5x$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(c) = \frac{75 - 25 - 3 - 5}{5 + 1} = \frac{50 - 8}{6} = 7$$

Monotoniczność funkcji różniczkowalnej

TW.

Jeżeli pochodna funkcji f jest w każdym punkcie przedziału (a, b) równa 0, to funkcja f jest stała.

Dowód

Korzystamy z twierdzenia Lagrange'a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \text{ z założenia f'(c) = 0}$$

$$\text{więc} \frac{\mathrm{f(b_1)} - f(a_1)}{\mathrm{b_1 - a_1}} = 0, \text{to } \mathrm{f(b_1)} - f(a_1) = 0$$

$$\mathrm{a_1, b_1} \in (a, b),$$

$$f(\mathrm{b_1}) = f(a_1)$$

$$c.n.d.$$

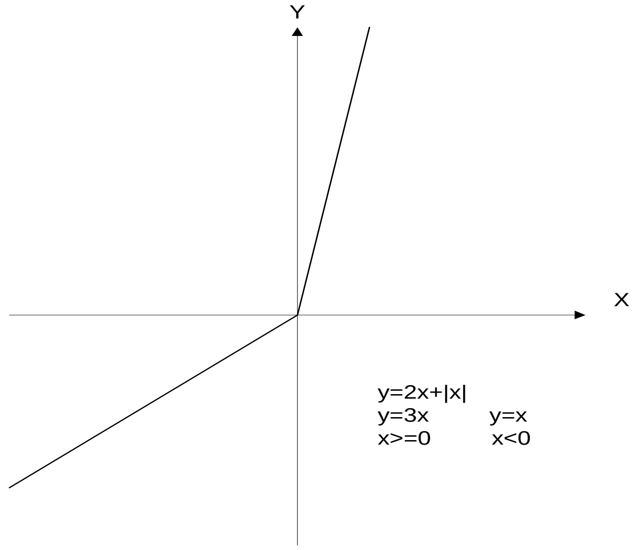
TW.

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na przedziale (a, b) i w każdym punkcie tego przedziału ma pochodną dodatnią (ujemną), to funkcja f jest na tym przedziale rosnąca (malejąca).

UWAGA:

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Przykład



f-rosnąca, w x=0 nie ma pochodnej.

TW.

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna i rosnąca (malejąca) na przedziale (a, b), to jej pochodna jest w każdym punkcie tego przedzial nieujemna (niedodatnia). Połączenie obu twierdzen pozwala badać monotoniczność funkcji przy pomocy pochodnej.

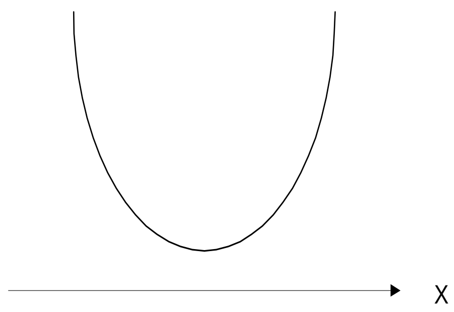
Przykład

Zbadaj monotoniczność funkcji $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{4}; D = R$

$$f'(x) = \frac{\left(x^3 + 2x\right)' 4 - \left(x^3 + 2x\right)4'}{16} = \frac{1}{4}(3x^2 + 2) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2} = 0$$

$$x^2 = -\frac{2}{3}; \text{nie zachodzi}$$



Dla każdego x f’(x) > 0, zatem funkcja jest rosnąca w calej swojej dziedzinie

Ekstrema funkcji.

Def.

Mówimy, że funkcja f:D→R ma w punkcie x0 maksimum, jesli istnieje sąsiedztwo s punktu x0 takie, że dla każdego x $\in$ s f(x)<f(x0)

Piszemy $Y_{\max} = f_{\max}(x_0)$

Def.

Mówimy, że funkcja f:D→R ma w punkcie x0 minimum, jeśli istnieje sąsiedztwo s punktu x0 takie, że dla każdego x $\in$ s f(x) > f(x0)

Piszemy $Y_{\min} = f_{\min}(x_0)$

maksima i minima funkcji nazywamy ekstremami,

TW. (Fermata) (warunek konieczny istnienia ekstremum)

Jeżeli funkcja f:D→R jest różniczkowalna i ma ekstremum w punkcie x0, to f'(x0)=0.

Dowód

Założenia

Funkcja f jest różniczkowalna i w punkcie x0 ma ekstremum.

Teza

f'(x0)=0

Przyjmujemy, że funkcja f osiąga w punkcie x0 maksimum. Weźmy dowolne h≠0, takie że x0+h należy do s. Wtedy f(x0) > f(x0+h)

f(x0+h) -f(x0) < 0

$$\mathrm{h} > 0$$

$$\frac{\mathrm{f(x0+h) - f(x0)}}{h} < 0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{f(x0+h) - f(x0)}}{h} \le 0$$

$$f'(x_0) \le 0$$

$$\mathrm{h} < 0$$

$$\frac{\mathrm{f(x0+h) - f(x0)}}{h} > 0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{f(x0+h) - f(x0)}}{h} \ge 0$$

$$f'(x_0) \ge 0$$

Zatem $f'(x_0) = 0$ c.n.d.

UWAGA:

Twierdzenie Fermata dotyczy wyłącznie funkcji różniczkowalnych.

Ekstremum funkcji poszukujemy w tych punktach, w których funkcja nie ma pochodnej lub w tych w których funkcja ma pochodną równą 0.

Warunek konieczny istnienia ekstremum niejest warunkiem wystarczającym.

Twierdzenie (warunek wystarczający)

Jeżeli funkcja f:D→Rjest różniczkowalna w pewnym otoczeniu U punktu x0 przy czym

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ dla } x < x_0 \\ f'(x) < 0 \text{ dla } x > x_0 \end{cases}$$ to funkcja f ma w punkcie x0 maksimum

Jeżeli funkcja f:D→Rjest różniczkowalna w pewnym otoczeniu U punktu x0 przy czym

$$\begin{cases} f'(x) < 0 \text{ dla } x < x_0 \\ f'(x) > 0 \text{ dla } x > x_0 \end{cases}$$ to funkcja f ma w punkcie x0 minimum

Przykład

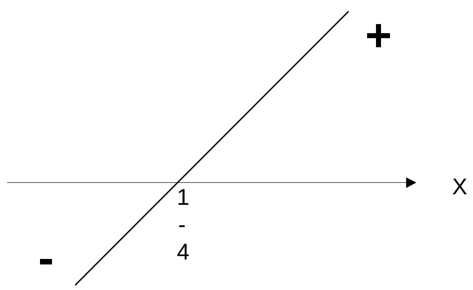
Wyznacz ekstrema funkcji

$$f(x) = x - \sqrt{x}; D: x \geq 0$$

$$f'(x) = \left(x - \sqrt{x}\right)' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$x = \frac{1}{4}$$



Odp. W punkcie x = 1/4 funkcja osiaga minimum.

f(1/4)=-1/4

II Warunek wystarczający ekstremum

Jeżeli funkcja f:D→R jest podwójnie różniczkowalna w pewnym otoczeniu U punktu x0, jej druga pochodna jest ciągłą w tym otoczeniu, f'(x0)=0 i f"(x0)<0 tow punkcie x0 funkcja ma maksimum.

Jeżeli funkcja f:D→R jest podwójnie różniczkowalna w pewnym otoczeniu U punktu x0, jej druga pochodna jest ciągłą w tym otoczeniu, f'(x0)=0 i f"(x0)>0 tow punkcie x0 funkcja ma minimum

Przykład

Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji

$$y = x^2 \ln x; D : x > 0$$
$$y' = 2x \ln x + x$$
$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x \ln x + x = 0$$
$$x(2 \ln x + 1) = 0$$
$$x = 0 \cup 2 \ln x + 1 = 0$$
$$\ln x = -\frac{1}{2}$$
$$x = e^{-\frac{1}{2}}$$

Wyznaczamy drugą pochodną

$$f''(x) = (2x \ln x + x)' = 2 \ln x + 2 + 1 = 2 \ln x + 3$$
$$f''(x) = 2 \ln(-\frac{1}{2}) + 3 = 2$$

$f''(e^{-\frac{1}{2}}) > 0$ zatem funkcja osiąga w tym punkcie minimu równe $-\frac{1}{2e}$

Największa i najmniejsza wartość funkcji f w przedziale domkniętym.

Przy wyznaczaniu wartości największej i najmniejszej funkcjif w przedziale domkniętym korzystamy z twierdzeń:

1. Funkcja różniczkowalna jest ciągłą
2. Funkcja ciągła w przedziale domknięty osiąga wartość najmniejszą i największą.

Procedura wyznaczania wartości najmniejszej i największej.

1. Sprawdzamy, czy dany przedział zawiera się w dziedzinie.
2. Obliczamy wartości funkcji na końcach przedziału f(a), f(b).
3. Wyznaczamy ekstrema funkcji w przedziale o ile istnieje.
4. Spośród liczb f(a), f(b), Ymin, Ymax wybieramy największą i najmniejszą.

Ekstrema funkcji - zadania tekstowe

Który z prostokątów o obwodzie 8 ma największe pole

a,b=dlugości boków prostokąta, P - pole prostokąta.

$a \geq 0$, $b \geq 0$.

$4-a \geq 0$, $a \leq 0$ $a \in <0,4>$

Z treści zadania wiadomo, że:

$2a+2b=8$

$a+b=4$

$b=4-a$

podstawiamy do równania

$P=a*b=a(4-a)$

$f(a,b)=a*b$

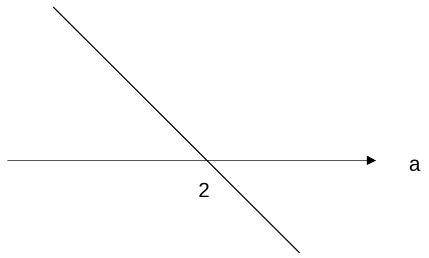
$f(a)=a(4-a)=-a^2+4a$

Funkcja f jako wielomian jest ciągła, zatem na mocy twierdzenia Weierstarssa w przedziale <0,4> osiąga wartość największą. Zauważmy, że f(0)=f(4)=0

Wyznaczamy ekstrema

$f'(a)=-2a+4$

$f'(a)=0 \Leftrightarrow 2a+4=0 \Rightarrow a=2$

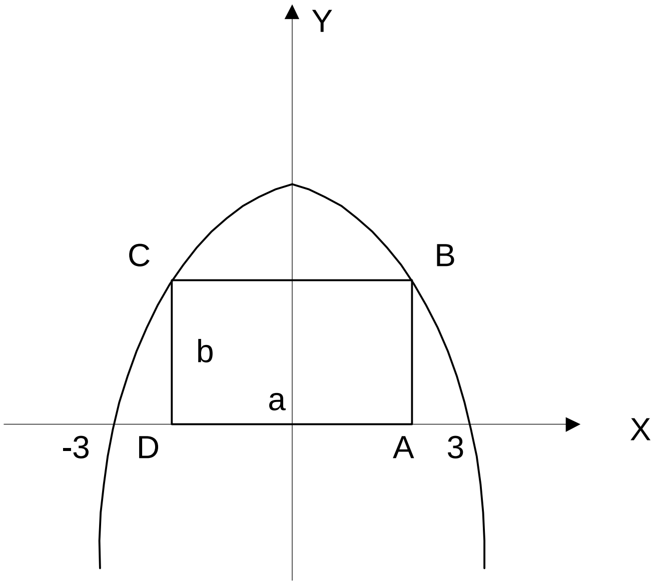


a = 2 jest maksimum. Ymax = f(2) = 4. Wyznaczamy długość drugiego boku prostokąta

b = 4 – a = 2.

Odp. Ze wszystkich prostokątów największe pole ma kwadrat o boku a= 2.

Wyznaczyć największą wartość pola prostokąta, którego dwa wierzchołki leżą na paraboli $y = -x^2 + 9$, a pozostałe na osi OX.



Określamy współrzędne wierzchołków prostokąta.

A(x, 0)

B(x, -x^2+9)

C(-x, -x^2+9)

D(-x, 0)

a=AD=2x

b=AB=-x^2+9; x∈<0,3>

P=a*b to f(a,b) = a * b

f(x)=2x(-x^2+9)

f(x)=-2x^3+18x

f(0)=0=f(3)

f'(x)= -6x^2+18

f'(x)=0 ⇔ -6x^2+18 = 0

x^2-3 = 0 to x - √3 = 0 i x + √3 = 0 x= √3 jest maksimum

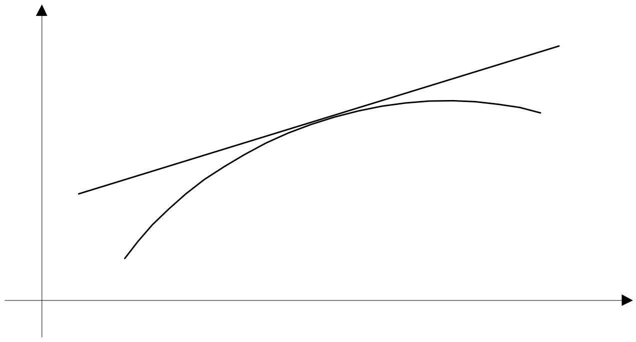
Ymax = 12√3

Odp Największe pole prostokąta wynosi 12√3 jednostek kwadratowych.

Wklęsłość i wypukłość krzywej. Punkt przegięcia.

Def.

Krzywa y=f(x) jest wklęsła w przedziale (a, b) wtedy i tylko wtedy gdy krzywa ta jest położona pod styczną poprowadzoną do niej w dowolnym punkcie odciętej z przedziału (a, b).



Def.

Krzywa y=f(x) jest wypukła w przedziale otwartym (a, b) wówczas gdy jest położona nad styczną poprowadzoną do niej w dowolnym punkcie o odciętej z przedziału (a, b).

TW.

Jeżeli f”(x) < 0 dla x $\in$ (a, b) to krzywa y = f(x) jest wklęsła.

TW.

Jeżeli wykres y = f(x), który ma drugą pochodna f” ciągła w przedziale (a, b), jest wklęsły w tym przedziale, to dla każdego x $\in$ (a, b) f”≤0.

TW.

Jeżeli dla każdego x $\in$ (a, b) f”(x) > 0, to krzywa o równaniu jest wypukła w tym przedziale.

TW.

Jeżeli wykres y = f(x), który ma drugą pochodna f” ciągła w przedziale (a, b), jest wupukły w tym przedziale, to dla każdego x $\in$ (a, b) f”≥ 0.

Def.

Punkt P(x0, f(x0)) jest punktem przegięcia krzywej y = f(x) wówczas gdy krzywa ta jest wklęsła w sąsiedztwie lewostronnym punktu x0 i wypukła w sąsiedztwie prawostronnym punktu x0.

TW.

Warunkiem koniecznym na to, aby punkt P(x0, f(x0)) był punktem przegięcia krzywej o równaniu y = f(x) jest f”(x) = 0.

TW.

Warunkiem wystarczającym na to, aby punkt P(x0, f(x0)) był punktem przegięcia krzywej o równaniu y = f(x) jest f”(x) = 0 jest $\begin{cases} f''(x) < 0 \text{ dla } x < x_0 \\ f''(x) > 0 \text{ dla } x > x_0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} f''(x) > 0 \text{ dla } x < x_0 \\ f''(x) < 0 \text{ dla } x > x_0 \end{cases}$

Przykład

Wyznaczyć przedziały w których funkcja jest wypukła oraz przedziały w których funkcja jest wklęsła. Znajdź punkt przegięcia.

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 2$

$f'(x) = 6x^2 - 6x + 1$

$f''(x) = 12x - 6$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - 6 = 0$

$x = \frac{1}{2};$

$\text{dla } x \in (-\infty, \frac{1}{2})\ f''(x) < 0 \text{ zatem funkcja jest wklęsła}$

$\text{dla } x \in (\frac{1}{2}, +\infty,)\ f''(x) > 0 \text{ zatem funkcja jest wypukła}$

$x = \frac{1}{2} \text{ jest punktem przegięcia. } P(\frac{1}{2}, -2).$

Asymptoty wykresu funkcji

Def.

Prosta x = c jest asymptotą pionową lewostronną krzywej o równaniu y = f(x) wtedy i tylko wtedy

gdy $\begin{matrix} \lim\limits_{x \to c^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = +\infty \end{matrix}$

Def.

Prosta x = c jest asymptotą pionową obustronną krzywej o równaniu y = f(x) wtedy i tylko wtedy gdy prosta x = c jest asymptotą lewostronną i prawostronną tej krzywej.

Def.

Prosta y = ax + b jest asymptotą ukośną (pochyłą) lewostronną krzywej y = f(x) wtedy i tylko gdy:

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

TW.

Jeżeli prosta y = ax + b jest asymptotą ukośną lewostronną krzywej y = f(x), to

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ i } b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax]$$

Def.

Prosta y = ax + b jest asymptotą ukośną (pochyłą) obustronną krzywej y = f(x) wtedy i tylko wtedy gdy prosta y = ax + b jest asymptotą ukośną (pochyłą) lewostronną i prawostronną tej krzywej.

Przykład

Wyznacz asymptoty funkcji

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 12}; D = R \setminus \{-3,4\}$$

Asymptoty pochyłe

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 - x - 12} \frac{1}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 - x - 12} = 0$$

Asymptoty pionowe

$x = -3$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^+} = \frac{x}{x^2 - x - 12} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^-} = \frac{x}{x^2 - x - 12} = -\infty \end{array}\right\} \text{ x = -3 jest asymptotą pionową}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^+} = \frac{x}{x^2 - x - 12} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 4^-} = \frac{x}{x^2 - x - 12} = -\infty \end{array}\right\} \text{ x = 4 jest asymptotą pionową}$$

Odp. Funkcja ma asymptoty pionowe x = -3 i x = 4 oraz asymptotę poziomą y = 0.

Badanie przebiegu zmienności funkcji

Schemat badania funkcji:

1. Wyznaczamy dziedzinę funkcji
2. Wyznaczamy granice na końcach przedziałów określoności funkcji
3. Wyznaczamy punkty przecięcia wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych
4. Wyznaczamy pochyłe i pionowe asymptoty funckji
5. Badamy inne szczególne własności funkcji (parzystość i okresowość)
6. Przeprowadzamy analizę pierwszej pochodnej:
   a) wyznaczamy ekstrema funkcji
   b) wyznaczamy przedziały monotoniczności
7. Przeprowadzamy analizę drugiej pochodnej
   a) wyznaczamy przedziały wklęsłościi wypukłości funkcji
   b) wyznaczamy punkty przegięć

Zadanie

Zbadaj przebieg zmienności funkcji

$f(x) + f^2(x) + f^3(x) + ... = \ln x$

Zauważmy, że po lewej stronie równania mamy szereg geometrycz ny o a = f(x) i q = f(x).

Aby szereg ten był zbieżny musi zachodzić warunek $|f(x)| < 1$

Wyznaczamy sumę szeregu

$$S = \frac{a}{1 - q} = \frac{f(x)}{1 - f(x)},$$

czyli $\frac{f(x)}{1 - f(x)} = \ln x$

Zatem nasza funkcja ma postać :

$$f(x) = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$$

1.Wyznaczamy dziedzinę funkcji

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 + \ln x \neq 0 \\ \frac{\ln x}{1 + \ln x} > -1 \\ \frac{\ln x}{1 + \ln x} < 1 \end{cases}$$

czyli $D: \left\{ x \in R; x \in \left(-\infty, \frac{1}{e} \right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty \right) \right\}$

Wyznaczamy granice na końcach przedziałó w oreślonośc i

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{1 + \ln x} \stackrel{h}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{\sqrt{e}}} \frac{\ln x}{1 + \ln x} = -\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = -1$$

Wyznaczamy punkty przecięcia wykresu funkcji z osiami układu współrzęd nych

OX : $\ln x = 0$ OY : z osią OY funkcji nie przecina się

$x = 0$

4. Wyznaczamy asymptoty funkcji

Asymptot pionowych brak.

Aymptoty pochyłe

Wyznaczamy granice na końcach przedziałó w określonoś ci

$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x + \ln x} \stackrel{h}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \ln x + 1} = 0$, $b = 1$, czyli funkcja ma asymptote pochyłą $y = 1$

5.Analiza pierwszej pochodnej

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+\ln x) - \frac{\ln x}{x}}{(1+\ln x)^2} = \frac{1}{x(1+\ln x)^2}$$

$f'(x)$ jest zawsze większe od zera.

Funkcja jest rosnąca w całej swojej dziedzinie, nie ma ekstremów.

6. Analizy drugiej pochodnej z przyczyn technicznych nie przeprowadzamy.

X	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	$\nearrow$		∞
f'(x)	+	+	+	+	+
f(x)	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1