Liczby

rzeczywiste

I.Relacje.Działania.

1. W zbiorze liczb rzeczywistych określone są dwie relacje: równość (=), oraz mniejszość (<).

Prawo trychotomii. Dla każdych dwóch liczb rzeczywistych x, y zachodzi dokładnie jedno z trojga:

$$x = y \text{ albo } x < y \text{ albo } y < x$$

Zamiast $x < y$ piszemy też $y > x$.

Relacja równości liczb rzeczywistych jest

a) zwrotna: $x = x$

b) symetryczna: $x = y \Rightarrow y = x$

c) przechodnia: $[(x = y) \wedge (y = z)] \Rightarrow x = z$

Relację, która spełnia te trzy warunki, nazywamy **relacją równoważnościową**.

Relacja mniejszości jest

a) spójna: $x \neq y \Rightarrow [(x < y) \vee (y < x)]$

b) antysymetryczna: $x < y \Rightarrow \sim (y < x)$

c) przechodnia: $[(x < y) \wedge (y < z)] \Rightarrow x < z$

Relacja mniejszości porządkuje zbiór liczb rzeczywistych.

2. **Działania arytmetyczne**, są to następujące cztery działania:

dodawanie: $\underbrace{x + y}_{\textit{składniki}} = \underbrace{s}_{\textit{suma}}$

odejmowanie: $\underbrace{x}_{\textit{odjemna}} - \underbrace{y}_{\textit{odjemnik}} = \underbrace{r}_{\textit{różnica}}$

mnożenie: $\underbrace{x \cdot y}_{\textit{czynniki}} = \underbrace{p}_{\textit{iloczyn}}$

dzielenie: $\underbrace{x}_{\textit{dzielna}} : \underbrace{y}_{\textit{dzielnik}} = \underbrace{q}_{\textit{iloraz}} \quad (y \neq 0)$

a) Odejmowanie jest działaniem odwrotnym do dodawania:

$$x - y = r \Leftrightarrow r + y = x$$

b) Liczba 0 jest synonimem różnicy $x - x$.

Dla każdego x: $x \cdot 0 = 0$

c) Liczbę $x < 0$ nazywamy ujemną, zaś liczbę $x > 0$ nazywamy dodatnią. Różnicę $0 - x$ oznaczamy $-x$ i nazywamy liczbą przeciwną względem x.

d) Dzielenie jest działaniem odwrotnym do mnożenia:

$$x : y = q \Leftrightarrow q \cdot y = x$$

e) Liczbę $\frac{1}{x}$, $(x \neq 0)$ nazywamy odwrotnością liczby x. Iloczyn liczby x i jej odwrotności jest równy 1.

f) Wynik każdego działania arytmetycznego jest określony jednoznacznie. W związku z tym d z i e l e n i e p r z e z z e r o j e s t n i e w y k o n a l n e, ponieważ:

- jeżeli $x \neq 0$, to iloraz $x : 0$ nie istnieje, gdyż żadna liczba q nie spełnia warunku $q \cdot 0 = x \neq 0$,
- jeżeli $x = 0$, to iloraz $x : 0$, czyli $0 : 0$ nie istnieje, gdyż każda liczba q spełnia warunek $q \cdot 0 = o$, (brak jednoznaczności).

g) Liczbę 0 nazywamy elementem obojętnym (modułem) dodawania, ponieważ dla każdego x:

$$x + 0 = x$$

h) Liczbę 1 nazywamy elementem obojętnym (modułem) mnożenia, ponieważ dla każdego x:

$$x \cdot 1 = x$$

3. Działania arytmetyczne podlegają następującym prawom:

Prawo łączności dodawania

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

Prawo przemienności dodawania

$$x + y = y + x$$

Prawo łączności mnożenia

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

Prawo przemienności mnożenia

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

4. Kolejność działań arytmetycznych ustalona jest następującymi umowami:

a)Przy obliczaniu wartości wyrażeń nie zawierających nawiasów wykonujemy najpierw mnożenia i dzielenia w kolejności ich występowania, a następnie dodawania i odejmowania w kolejności ich występowania.

b)Przy obliczaniu wartości wyrażeń zawierających nawiasy wykonujemy najpierw działania w tych nawiasach, wewnątrz których nie ma już innych.

5. **Potęgowanie.**

Niech n oznacza liczbę naturalną.

Def. Potęgę o podstawie a i wykładniku n oznaczamy symbolem a^n i określamy następująco

$$a^n = \begin{cases} a, & \text{dla} \quad n = 1 \\ \underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{\text{n czynników}} & \text{dla} \quad n \rangle 1 \end{cases}$$

a)Działania na potęgach.

Tw. Dla każdej liczby a i dla każdych dwóch liczb naturalnych m, n, zachodzi:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2) $a^m : a^n = a^{m-n}$, dla $a \neq 0$ i $m > n$
3) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, dla $b \neq 0$
5) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Dowody tych twierdzeń opierają się na definicji potęgi; pozostawiamy je czytelnikowi.

6. **Wzory skróconego mnożenia**.

kwadrat sumy: $\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$
kwadrat różnicy: $\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$
sześcian sumy: $\mathbf{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$
sześcian różnicy: $\mathbf{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$
różnica kwadratów: $\mathbf{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)}$
różnica sześcianów: $\mathbf{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$
suma sześcianów: $\mathbf{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$

Wyprowadzenia tych wzorów polegają na wykonaniu odpowiedniego mnożenia; pozostawiamy je czytelnikowi.

Przykład.

Obliczyć wartość wyrażenia $x = (a + b + c)\,\dfrac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{a + b - c}$

dla $a = \frac{10}{3}$, $b = 3$, $c = \frac{5}{3}$.

R o z w i ą z a n i e: Ponieważ

$a^2 - b^2 - c^2 + 2bc = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) = a^2 - (b - c)^2 = (a + b - c)(a - b + c)$

więc

$$x = (a + b + c)\frac{(a + b - c)(a - b + c)}{a + b - c} = (a + b + c)(a - b + c) =$$

$= [(a + c) + b] \cdot [(a + c) - b] = (a + c)^2 - b^2$
Podstawiając podane wartości a, b, c, otrzymamy $x = 5^2 - 3^2 = 16$
Odp. 16.

7. **Pierwiastkowanie.**
Niech n oznacza liczbę naturalną.
Def. Pierwiastek stopnia n z liczby a oznaczamy symbolem $\sqrt[n]{a}$ i określamy następująco

$$\sqrt[n]{a} = \mathbf{p} \Leftrightarrow [(p^n = a) \wedge (p \geq 0)]$$

Pierwiastkowanie jest działaniem odwrotnym do potęgowania. Warunek $p \geq 0$ zapewnia jednoznaczność pierwiastka.
Z definicji pierwiastka wynika, że dla $n \in N$, $a \geq 0$ mamy

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$$

UWAGA!
Pierwiastek nieparzystego stopnia z liczby ujemnej:
Jeżeli n jest liczbą naturalną nieparzystą, zaś a jest liczbą ujemną, to przyjmujemy określenie:

$$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$$

Np.: $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$

a) Działania na pierwiastkach.
Tw. Dla każdych dwóch nieujemnych liczb a, b i dla każdej liczby naturalnej n, zachodzą wzory:
1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$,
2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, dla $b \neq 0$
3) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$,
4) $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.

Dowody tych twierdzeń opierają się na definicji pierwiastka; pozostawiamy je czytelnikowi.

8. **Proporcje.**
Iloraz dwóch wielkości $\frac{a}{b}$ nazywamy **stosunkiem**.

Jeżeli dla czterech wielkości a, b, c, d tworzących parami stosunki $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ zachodzi równość tych stosunków, czyli

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ albo } a : b = c : d$$

to mówimy, że wielkości te tworzą **proporcję**.
Ze względu na drugą postać zapisu wyrazy a, d nazywamy *skrajnymi*, a wyrazy b, c - *środkowymi*.
Mnożąc proporcję stronami przez bd otrzymujemy:

$$\mathbf{ad = bc}$$

Iloczyn wyrazów skrajnych równa się iloczynowi wyrazów środkowych.
Jeżeli z czterech wielkości tworzących trzy są znane, to możemy zawsze wyznaczyć czwartą proporcjonalną przekształcając odpowiednio proporcję.

Np. $\frac{x}{b} = \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{bc}{d}$

- Jeżeli stosunek dwóch wielkości zmiennych jest stały: $\frac{a}{b}$ = const to mówimy, że wielkości te są **wprost proporcjonalne**.

- Jeżeli iloczyn dwóch wielkości zmiennych jest stały: ab = const to wielkości te są **odwrotnie proporcjonalne**.

Przykład.
Trzech wspólników założyło przedsiębiorstwo i wniosło do niego udziały m, n, p. Po upływie określonego czasu przedsiębiorstwo przyniosło dochód a, który powinien być podzielony proporcjonalnie do udziałów. Wyznaczyć udział każdego wspólnika w czystym zysku.
Rozwiązanie:
Oznaczamy poszukiwane udziały w zyskach przez x, y, z. Wobec tego:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=a \\ x:y:z=m:n:p \end{array}\right\}$$

skąd:

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=q$$

gdzie q jest parametrem pomocniczym.
Z ostatnich proporcji wyznaczamy x, y, z i otrzymane równania dodajemy stronami

$$\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x=mq \\ y=nq \quad + \\ z=pq \end{array}\right. \\ \hline x+y+z=(m+n+p)q \end{array}$$

Ponieważ x + y + z = a, to wyznaczona q ma postać:

$$q=\frac{a}{m+n+p}$$

Wstawiając wartość q w wyżej wyprowadzone związki na x, y, z mamy:

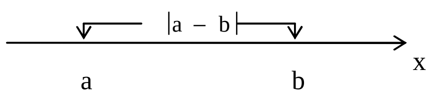
$$x=m\frac{a}{m+n+p}, \qquad y=n\frac{a}{m+n+p}, \qquad z=p\frac{a}{m+n+p}.$$

9. **Wartość bezwzględna.**
Def. Wartość bezwzględną liczby x oznaczamy symbolem $|x|$ i określamy następująco

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{gdy } x\geq 0 \\ -x, & \text{gdy } x<0 \end{cases}$$

Na przykład:
$|6|=6, \quad |0|=0, \quad |-20|=20$
a) Własności wartości bezwzględnej.
- $|a|\geq 0$
- $|a|=0 \Leftrightarrow a=0$
- $|a+b|\leq|a|+|b|$
- $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$
- $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|} \qquad b\neq 0$
- $\sqrt{a^2}=|a|$

b) Geometrycznie wartość bezwzględna różnicy dwóch liczb jest równa odległości między nimi.



c) Równania z wartością bezwzględną.
- $|a|=b \Leftrightarrow a=b \vee a=-b$

Przykład.
Rozwiąż:
$|x+1|=3$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x+1=3 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < -1 \\ -x-1=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x=2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < -1 \\ x=-4 \end{cases}$$

$$x = 2 \quad \vee \quad x = -4$$

Odp.: Rozwiązaniem równania są liczby 2 lub 4.

d) Nierówności z wartością bezwzględną.

- $|a| < b \quad \Leftrightarrow \quad -b < a < b$
- $|a| > b \quad \Leftrightarrow \quad a > b \ \vee \ a < -b$

Przykład.

Rozwiąż nierówność:

$\sqrt{x^2 - 6x + 9} + x > 2$

$$|x-3| + x > 2$$

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-3+x > 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x-3 < 0 \\ -x+3+x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x > \frac{5}{2} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 3 \\ 3 > 2 \end{cases}$$

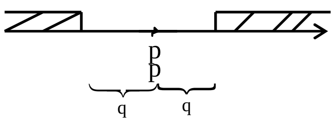
$$x \geq 3 \quad \vee \quad x < 3$$

$$x \in R$$

Odp.: Rozwiązaniem nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych.

$\rightarrow$ Interpretacja geometryczna.

• Geometrycznie rozwiązaniem nierówności $|x-p| > q$ są punkty, których odległość od punktu p. jest większa od q.



• Geometrycznie rozwiązaniem nierówności $|x-p| < q$ są punkty, których odległość od punktu p. jest mniejsza od q.

<u>Zadania.</u>

<u>Zad.1</u>

Obliczyć wartość wyrażenia

$$x = \frac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}} + \frac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$$

dla n = 1998.

Rozw.: Oznaczając a = n + 2, b = $\sqrt{n^2-4}$, mamy

$$x = \frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} = \frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{a^2-b^2} = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2} = \frac{2(n^2+4n+4+n^2-4)}{n^2+4n+4-(n^2-4)} = \frac{4n(n+2)}{4(n+2)} = n$$

Odp.: x = 1998

<u>Zad.2</u>

Uprościć wyrażenie

$$d = \sqrt{(x-5)^2} + \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x-1)^2}$$

Rozw.: Korzystając z własności wartości bezwzględnej $\sqrt{a^2} = |a|$, mamy

$$|x-5| + |x-3| + |x-1|.$$

Z def. wartości bezwzględnej:

$x < 1$	$1 \le x < 3$	$3 \le x < 5$	$x \ge 5$
$d = -x + 5 - x + 3 - x + 1$	$d = -x + 5 - x + 3 + x - 1$	$d = -x + 5 + x - 3 + x - 1$	$d = x - 5 + x - 3 + x - 1$
$d = 9 - 3x$	$d = 7 - x$	$d = x + 1$	$d = 3x - 9$

Odp.: $d = 9 - 3x$ dla $x<1$; $d = 7 - x$ dla $x \in \langle 1, 3)$; $d = x + 1$ dla $x \in \langle 3, 5)$; $d = 3x - 9$ dla $x \ge 5$.

Zad.3

Wykazać, że dla każdej pary liczb rzeczywistych x, y prawdziwy jest związek:

$$|x + y| \le |x| + |y|$$

Rozw.:

a) Wykażemy najpierw, że

$$*\ |x| \le c \Leftrightarrow -c \le x \le c\,.$$

Ponieważ $|x| = x$ lub $|x| = -x$, więc $x = |x|$ lub $x = -|x|$ oraz $-|x| \le |x|$.

Zatem $-|x| \le x \le |x|$.

Jeśli $|x| \le c$, to $-|x| \ge -c$ co pociąga za sobą nierówności

$$-c \le -|x| \le x \le |x| \le c \qquad \text{czyli} \quad -c \le x \le c.$$

b) Jeśli $-c \le x \le c$ to również $-c \le -x \le c$, czyli $-c \le |x| \le c$.

Zauważmy, że

$$-|x| \le x \le |x|$$

$$-|y| \le y \le |y|$$

Dodając te nierówności stronami otrzymujemy nierówności

$$-(|x| + |y|) \le x + y \le |x| + |y|$$

które na mocy * dają nierówność

$$|x + y| \le |x| + |y|$$

c. n. d.

II.Liczby całkowite.

1. Niektóre właściwości zbioru liczb naturalnych (N) oraz zbioru liczb całkowitych (C).

a) W zbiorze liczb naturalnych istnieje liczba najmniejsza (0), nie istnieje liczba największa. W zbiorze liczb całkowitych nie ma ani liczby najmniejszej, ani największej. Natomiast w obu zbiorach możemy dokładnie wskazać liczbę występującą bezpośrednio po danej.

b) Każdą liczbę naturalną można zapisać w dziesiątkowym systemie pozycyjnym za pomocą dziesięciu cyfr: {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}.

Podstawą tego systemu jest liczba 10, a schemat jest następujący:

$$\text{........CBA} = \text{........} + C \cdot 100 + B \cdot 10 + A \cdot 1 = \text{........} + C \cdot 10^2 + B \cdot 10^1 + A \cdot 10^0$$

c) Istnieją też niedziesiątkowe systemy pozycyjne np. system dwójkowy. Każdą liczbę naturalną można zapisać za pomocą cyfr {0,1}. Podstawą tego systemu jest liczba 2, a schemat jest następujący

$$\text{........CBA} = \text{........} + C \cdot 2^2 + B \cdot 2^1 + C \cdot 2^0$$

Przykład:

$(17)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

$(17)_2 = 10001$

2. **Podzielność liczb całkowitych**.

Niech k i l będą liczbami całkowitymi, przy czym $l \ne 0$.

Mówimy, że liczba k jest podzielna przez liczbę l, gdy iloraz $\frac{k}{l}$ jest liczbą całkowitą.

•Liczby podzielne przez 2 nazywamy parzystymi, a nie podzielne - nieparzystymi. Liczbę parzystą możemy zapisać w postaci 2k, a liczbę nieparzystą w postaci $2k \pm 1$.

•Liczby naturalne $n \neq 1$ nie mające innych podzielników niż 1 i n nazywamy liczbami pierwszymi;np:2, 3, 5, 7, 11...

•Liczby naturalne, które nie są pierwszymi nazywamy liczbami złożonymi.

Niektóre cech podzielności

dzielnik	cecha podzielności
2	ostatnią cyfrą jest: 0, 2, 4, 6 lub 8
3	suma cyfr podzielna przez 3
4	liczba utworzona z dwóch ostatnich cyfr jest podzielna przez 4
5	ostatnią cyfrą jest 0 lub 5
6	liczba jest podzielna przez 2 i 3
9	suma cyfr podzielna przez 9
10	ostatnią cyfrą jest 0

3. **Rozkład liczby naturalnej na czynniki pierwsze** polega na przedstawieniu tej liczby w postaci iloczynu liczb pierwszych;
np.:
$24 = 2 \cdot 12 = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
Do rozkładu liczby wykorzystujemy schemat; np.:

$$\begin{array}{r|l} 1890 & 2 \\ 945 & 3 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 124 & 2 \\ 62 & 2 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{array}$$

$124 = 2 \cdot 2 \cdot 31$

$1890 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

4.**Największy wspólny dzielnik (NWD)** dwóch lub więcej liczb - jest największą liczbą, która jest dzielnikiem lub czynnikiem wszystkich liczb.
Kiedy dane liczby zostaną rozłożone na czynniki pierwsze, NWD jest ustalany z iloczynu wszystkich czynników wspólnych dla wszystkich wyrażeń, przy czym każdy czynnik rozpatrywany jest tylko raz z minimalnym wykładnikiem potęgi, który się w nim pojawia; np.:

$240 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underline{3} \cdot \underline{5} = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$
$180 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 3 \cdot \underline{5} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
$300 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{5} \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$
$NWD\,(240, 180, 300) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

a) Do wyznaczania NWD służy też algorytm Euklidesa. Polega on na tym, że wyznacza się resztę R_1 z dzielenia a przez b, następnie resztę R_2 z dzielenia b przez R_1, następnie resztę R_3 z dzielenia R_1 przez R_2 itd., aż do otrzymania reszty równej 0. Ostatnia reszta różna od 0 jest NWD liczb a, b.

Przykład

a = 1890 , b = 224
$1890 = 8 \cdot 224 + 98$ $\quad R_1$
$224 = 2 \cdot 98 + 28$ $\quad R_2$
$98 = 3 \cdot 28 + \underline{14}$ $\quad R_3$

$28 = 2 \cdot 14 + 0$ R_4

NWD(1890, 224) = 14

5. **Najmniejsza wspólna wielokrotność (NWW)** dwóch lub więcej liczb - jest najmniejszą liczbą, która jest wielokrotną wszystkich danych liczb.

Kiedy dane liczby zostaną rozłożone na czynniki pierwsze, NWW jest określona jako iloczyn wszystkich tych czynników, przy czym każdy z nich występuje jednokrotnie, ale w maksymalnej potędze; np.:

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$
$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$
$NWW(24, 36) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$

Przykład

Wyznacz NWD i NWW liczb: 1650, 2410.

$$\begin{array}{r|l} 1650 & 2 \\ 825 & 3 \\ 275 & 55 \\ 55 & 11 \\ 11 & \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2410 & 2 \\ 1205 & 5 \\ 241 & 241 \\ & \\ & \\ & \end{array}$$

$NWD(1650, 2410) = 2 \cdot 5 = 10$
$NWW(1650, 2410) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 241 = 397650$

Zadania.

Zad.1

Zapisz NWD(84, 147) w dwójkowym systemie pozycyjnym.

Rozw.:

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \\ & \end{array}$$

$NWD(84, 147) = 3 \cdot 7 = 21$

$(21)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
$(21)_2 = 10101$
Odp.: $[NWD(84, 147)]_2 = 10101$.

Zad.2

Uzasadnij, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb parzystych jest liczbą podzielną przez 4.

Rozw.:

Dwie kolejne liczby parzyste zapisujemy jako 2n i 2n+2. Z treści zad. Mamy:

$$(2n+2)^2 - (2n)^2 = 4n^2 + 8n + 4 - 4n^2 = 8n + 4 = 4(2n+1)$$

c. n. d.

III.Liczby wymierne.

Liczby wymierne stanowią nieskończony zbiór liczb postaci:

$$W = \left\{ w = \frac{p}{q} \;, p \varepsilon C \wedge q \varepsilon C/\{0\} \right\}$$

o następujących właściwościach:
a) Zbiór ten jest *uporządkowany*, tzn. że dla każdych dwóch różnych liczb wymiernych a i b można wskazać, która z tych liczb jest większa.
b) Zbiór ten jest *wszędzie gęsty*, tzn. że między każdymi dwiema liczbami wymiernymi a i b ($a < b$) istnieje co najmniej jedna liczba wymierna c ($a < c < b$), a więc istnieje również nieskończenie wiele liczb wymiernych.

1. **Ułamki zwykłe**.

Ułamkiem zwykłym nazywamy iloraz $\frac{p}{q}$ ($p, q \varepsilon N, q \neq 0$), gdzie p nazywamy licznikiem, a q - - mianownikiem.

- Jeśli $p < q$ to ułamek nazywamy *właściwym.*
- Jeśli $p > q$ to ułamek nazywamy *niewłaściwym.*

a) Rozszerzanie i skracanie ułamków.

Ułamek nie zmienia swej wartości, gdy jego licznik i mianownik mnożymy lub dzielimy przez tę samą liczbę $a \neq 0$.

rozszerzanie: $\frac{p}{q} = \frac{p \cdot a}{q \cdot a}$

skracanie: $\frac{p \cdot a}{q \cdot a} = \frac{p}{q}$

b)Działania na ułamkach.

dodawanie: $\frac{p}{q} + \frac{a}{b} = \frac{p \cdot b + a \cdot q}{q \cdot a}$

odejmowanie: $\frac{p}{q} - \frac{a}{b} = \frac{p \cdot b - a \cdot q}{q \cdot b}$

mnożenie: $\frac{p}{q} \cdot \frac{a}{b} = \frac{p \cdot a}{q \cdot b}$

dzielenie: $\frac{p}{q} \div \frac{a}{b} = \frac{p \cdot b}{q \cdot a}$

– Prawa znaków:

$$\frac{-p}{q} = \frac{p}{-q} = -\frac{p}{q} \;, \qquad \frac{-p}{-q} = \frac{p}{q}$$

2. **Ułamki dziesiętne**.

Ułamkiem dziesiętnym nazywamy ułamek o mianowniku 10, 100, 1000... i zapisany w dziesiątkowym systemie pozycyjnym:

$$....CBA,DEF.... = ... + C \cdot 100 + B \cdot 10 + A \cdot 1 + D \cdot \frac{1}{10} + E \cdot \frac{1}{100} +....$$

a) Każdy ułamek zwykły może być przedstawiony w postaci ułamka dziesiętnego poprzez pełne dzielenie pomiędzy licznikiem i mianownikiem. Możliwe są dwa przypadki:
- Dzielenie kończy się po ograniczonej liczbie operacji, wtedy ułamek dziesiętny jest skończony:

$$\frac{27}{5} = 27 : 5 = 5{,}4$$

- Dzielenie nigdy nie jest pełne, wtedy ułamek dziesiętny jest okresowy:

$$\frac{11}{9} = 11 : 9 = 1{,}22222.......$$

Grupa cyfr nieskończenie powtarzających się nazywana jest okresem ułamka i jest przedstawiana przez liczbę w nawiasie.

1,1666666... = 1.1(6)

Okres może być *prosty*, jeśli cyfra powtarzająca się zaczyna się zaraz po przecinku ułamka dziesiętnego, mieszany, jeżeli powtarzalność nie zaczyna się zaraz po przecinku ułamka dziesiętnego.

b)Zamiana ułamków dziesiętnych na zwykłe.

~ Ułamki dziesiętne skończone: ułamek równoważny ułamkowi dziesiętnemu ma w mianowniku liczbę naturalną uzyskaną z ułamka dziesiętnego po pominięciu przecinka; mianownikiem jest liczba 1 z tyloma zerami, ile jest cyfr po przecinku ułamka. Np.:

$4{,}48 = \frac{448}{100}$, $7{,}523 = \frac{7523}{1000}$

~ Ułamki dziesiętne okresowe:

1°• Ułamek równoważny prostemu okresowemu ułamkowi dziesiętnemu ma licznik będący różnicą między liczbą powstałą po pominięciu przecinka ułamka a liczbą równa cyfrze poprzedzającej przecinek. Jego mianownik jest liczbą powstałą z tylu dziewiątek, ile jest cyfr w okresie.

Np. $4{,}(25) = \frac{425-4}{99} = \frac{421}{99}$

• Ułamek równoważny mieszanemu ułamkowi okresowemu ma w liczniku różnicę między liczbą powstała przez pominiecie przecinka ułamka a liczbą utworzona przez wszystkie cyfry, które poprzedzają liczby napisane w nawiasie. Mianownikiem jest liczba powstała z tylu dziewiątek, ile jest cyfr w nawiasie, z tyloma zerami, ile jest cyfr po przecinku, które nie są w okresie.

Np. $0{,}19(4) = \frac{194-19}{900} = \frac{175}{900}$

2°(metoda rachunkowa)

Np.0,(3)

$$0{,}3333.....= x \;/ \cdot 10$$
$$3{,}3333.....= 10x$$
$$3{,}333..... - 0.333.....= 10x - x$$
$$3 = 9x$$
$$x = \frac{1}{3}$$

Przykład.

Zamień na ułamek zwykły 0,127127....

Rozwiązanie:

$$0{,}127127.....= x \;/ \cdot 1000$$
$$127{,}127.....= 1000x$$
$$127{,}127..... - 0{,}127127.....= 1000x - x$$
$$127 = 999x$$
$$x = \frac{127}{999}$$

3. **Procenty**.

Jeden procent (1%) pewnej liczby jest to setna część tej liczby.

Np.

$$18\% \text{ liczby } 40 \text{ wynosi } \frac{18}{100} \cdot 40 = 4{,}2$$

Z określenia procentu wynikają następujące dwie reguły:

$$\textbf{p\% liczby a wynosi } \frac{p \cdot a}{100}$$

oraz

$$\textbf{liczba, której p\% wynosi b, równa jest } \frac{b \cdot 100}{p}$$

a) Jeden promil (1%$_0$)pewnej liczby, jest to tysięczna część tej liczby.

Np.

$$3\ \%_0 \text{ liczby } 48 \text{ wynosi } \frac{3}{1000} \cdot 48 = 0{,}144$$

Uwaga!

1% = 10‰

Przykład.

1) Znajdź liczbę, której 128% wynosi 512.

128% liczby x wynosi $\frac{128}{100}\cdot x = 512$

$$\frac{32}{25}\cdot x = 512$$
$$32x = 12800$$
$$x = 400$$

Odp. Szukaną liczbą jest 400.

2) Jakim procentem 14 jest 112 ?

x% liczby 14 wynosi $\frac{x}{100}\cdot 14 = 112$

$$\frac{x}{50}\cdot 7 = 112$$
$$x = 800$$

Odp.: 112 to 800% liczby 14.

Zadania.

Zad.1

Oblicz : 1,285714285714....- 0,3636....

Rozw.: Dane ułamki dziesiętne zamieniamy na ułamki zwykłe.

1,285714285714...= 1 + 0,285714285714

0,285714285714...= x / · 1000000

285714,285714....= 1000000x

285714,285714... - 0,285714...= 1000000x - x

285714 = 999999x / :142857

2 = 7x

$x = \frac{2}{7}$

$1{,}285714285714.... = 1 + \frac{2}{7} = \frac{9}{7}$

0,3636...= x / · 100

36,36....= 100x

36,36...- 0,3636 = 100x - x

36 = 99x / : 9

4 = 11x

$x = \frac{4}{11}$

$0{,}3636... = \frac{4}{11}$

Podstawiając mamy

$$\frac{9}{7}-\frac{4}{11}=\frac{99}{77}-\frac{28}{77}=\frac{71}{77}$$

Odp.: $\frac{71}{77}$.

Zad.2

Długość boku kwadratu zwiększono o 10%. O ile % swej początkowej wartości zwiększyło się pole kwadratu.

Rozw.:

	długość boku kwadratu	pole kwadratu
przed wydłużeniem:	a	a^2
po wydłużeniu:	$a+\frac{a}{10}=\frac{11}{10}a$	$\left(\frac{11}{10}a\right)^2=\frac{121}{100}a^2$

Pole zwiększyło się o $\frac{21}{100}$ swej wartości początkowej a^2.
Odp.: Pole kwadratu zwiększyło się o 21%.

Zad.3

Kawałek metalu zwiększył objętość na skutek ogrzania o $\frac{1}{2}$ % swej początkowej objętości. Wyrazić w % ubytek ciężaru właściwego.

Rozwiązanie:
Oznaczamy P. - ciężar metalu, V_o - objętość przed ogrzaniem, d_o - ciężar właściwy przed ogrzaniem, d - ciężar właściwy po ogrzaniu. Mamy więc:

$$d_o = \frac{P}{V_o}, \qquad d = \frac{P}{V_o + \frac{1}{200}V_o} = \frac{200P}{201V_0}$$

Procentowy ubytek ciężaru właściwego:

$$x = \frac{d_o - d}{d_o}100\% = \frac{\frac{P}{V_o} - \frac{200P}{201V_o}}{\frac{P}{V_o}} \cdot 100\% = \frac{100}{201}\%$$

Odp. $\frac{100}{201}\%$

IV.Liczby niewymierne.

Zbiór liczb wymiernych jest niewystarczający dla analizy matematycznej; pomimo, że jest wszędzie gęsty, zbiór ten nie wypełnia całej osi liczbowej. Aby każdemu odcinkowi móc przyporządkować liczbę stanowiącą jego długość rozszerzono pojęcie liczby, wprowadzając l i c z b y n i e w y m. i e r n e. Taką jest na przykład liczba, której kwadrat równy jest 2. Liczbę tę oznaczamy $\sqrt{2}$.

Tw. $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Dowód:

Przyjmijmy nie wprost, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną. To oznacza, że można ją przedstawić w postaci $\frac{p}{q}$. Przyjmijmy ponadto, że NWD(p.,q) = 1, tzn., że $\sqrt{2}$ przedstawiliśmy w postaci ułamka nieskracalnego.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$
$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$
$$2q^2 = p^2$$

Wynika stąd, że liczba p. musi być parzysta, tzn. można ją przedstawić w postaci p. = 2k (k ε C).

$$2q^2 = (2k)^2$$
$$2q^2 = 4k^2$$
$$q^2 = 2k^2$$

Wynika stąd, że q musi być parzyste.
Skoro p. i q są parzyste, to obie dzielą się przez 2 co jest sprzeczne z założeniem, że NWD(p.,q) = 1.
Otrzymaliśmy sprzeczność. Zatem $\sqrt{2}$ jest liczbą , niewymierną.

c. n. d.

Liczby niewymierne można podać z nadmiarem lub z niedomiarem.

$$1 \langle \sqrt{2} \langle 2$$

$$1{,}4 \langle \sqrt{2} \langle 1{,}5$$

$$1{,}41 \langle \sqrt{2} \langle 1{,}42$$

$$1{,}414 \langle \sqrt{2} \langle 1{,}415$$

$$1{,}4142 \langle \sqrt{2} \langle 1{,}4143$$

$$\underbrace{-\,-\,-\,-\,-\,-\,-}_{\text{wyniki z niedomiarem}} \qquad \underbrace{-\,-\,-\,-\,-}_{\text{wyniki z nadmiarem}}$$

Zauważmy, że różnica kolejnych przybliżeń z nadmiarem i niedomiarem jest coraz mniejsza i dąży do 0 i wyznacza rozwinięcie dziesiętne liczby $\sqrt{2}$.

$\sqrt{2} = 1{,}4114113562.......$

Jest to rozwinięcie dziesiętne nieskończone i nieokresowe.

1.**Przybliżenia liczb. Błąd bezwzględny, błąd względny.**

Potrzeba przeprowadzania obliczeń skłania nas często do posługiwania się przybliżeniami liczb.

Niech a oznacza przybliżenie liczby a_o.

Def. Błąd przybliżenia a liczby a_o jest to liczba

$$b = a - a_o$$

Liczbę - b, przeciwną względem b nazywamy poprawką.

Def. Błąd bezwzględny przybliżenia a liczby a_o jest to liczba

$$\Delta = |a - a_o|$$

Def. Błąd względny (względem przybliżenia a) jest to liczba

$$\delta = \frac{|a - a_o|}{a}$$

Jeżeli $a < a_o$, to a jest przybliżeniem z niedomiarem, jeżeli natomiast $a > a_o$, to a jest przybliżeniem z nadmiarem liczby a_o.

Przykład.

Zamieniając ułamek $\frac{13}{9}$ na ułamek dziesiętny otrzymamy 1,444...... Możemy tu poprzestać na jednym z przybliżeń dziesiętnych: 1,4; 1,44; 1,444; ....

Jeżeli zastąpimy ułamek $\frac{13}{9}$ jego przybliżeniem dziesiętnym 1,44, to napiszemy

$$\frac{13}{9} \approx 1{,}44$$

W tym przypadku popełniamy błąd:

$$b = 1{,}44 - \frac{13}{9} = -\frac{1}{225}$$

błąd bezwzględny $\quad \Delta = \left|1{,}44 - \frac{13}{9}\right| = \frac{1}{225}$

oraz błąd względny $\quad \delta = \frac{1}{225} \div 1{,}44 = \frac{1}{324}$

2.Działania arytmetyczne na liczbach niewymiernych określone są za pomocą działań na przybliżeniach wymiernych tych liczb

np. $a = \sqrt{2} = 1{,}4142.....$

$b = \sqrt{3} = 1{,}7320\,.....$

$a + b = \sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}1462.......$

W wyniku działań na liczbach niewymiernych możemy otrzymać zarówno liczbę wymierną jak i niewymierną. W praktyce zamiast działań na przybliżeniach pozostawia się wynik w postaci np. $a + b = \sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}1462\ldots$

3. **Liczby postaci a + b$\sqrt{c}$** $\quad a, b \,\varepsilon\, W; \quad c \,\varepsilon\, W_+ \cup \{0\}$

Tw. Liczby postaci a + b$\sqrt{2}$ są niewymierne.
Dowód.

$$a + b\sqrt{2} = w \qquad w \,\varepsilon\, W$$
$$b\sqrt{2} = w - a \qquad b \neq 0$$
$$\sqrt{2} = \frac{w-a}{b}$$

Przyjmijmy nie wprost, że liczba a + b$\sqrt{2}$ jest równa w, która jest liczbą wymierną. Zauważmy ponad to, że kiedy od liczby w odejmiemy liczbę a i podzielimy przez b otrzymamy liczb wymierną, ponieważ liczba wymierna podzielona przez liczbę wymierną da również liczbę wymierną. Z tego widać, że zachodzi sprzeczność, dlatego że, jak wcześniej udowodniono $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną. Doszliśmy więc do wniosku, iż liczba a + b$\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną. c. n. d.

Tw. Jeżeli c jest ustaloną liczbą, to suma, różnica, iloczyn i iloraz liczb postaci a + b$\sqrt{c}$ jest liczbą postaci a + b$\sqrt{c}$.
Dowód.
Niech dane będą dwie liczby postaci a + b$\sqrt{c}$:
$A = m + n\sqrt{c}$
$B = p + q\sqrt{c}$
Wtedy:

- dla sumy

$$A + B = (m + n\sqrt{c}) + (p + q\sqrt{c}) = m + p + n\sqrt{c} + q\sqrt{c} = \underbrace{(m+p)}_{a} + \underbrace{(n+q)\sqrt{c}}_{b\sqrt{c}}$$

- dla różnicy

$$A - B = (m. + n\sqrt{c}) - (p. + q\sqrt{c}) = m. - p. + n\sqrt{c} - q\sqrt{c} = \underbrace{(m-p)}_{a} + \underbrace{(n-q)\sqrt{c}}_{b\sqrt{c}}$$

- dla iloczynu

$$A \cdot B = (m. + n\sqrt{c})(p. + q\sqrt{c}) = mp + mq\sqrt{c} + np\sqrt{c} + nc = \underbrace{(mp+nc)}_{a} + \underbrace{(mq+np)\sqrt{c}}_{b\sqrt{c}}$$

- dla ilorazu

$$\frac{A}{B} = \frac{m+n\sqrt{c}}{p+q\sqrt{c}} \cdot \frac{p-q\sqrt{c}}{p-q\sqrt{c}} = \frac{mp - mq\sqrt{c} + np\sqrt{c} - qnc}{p^2 - q^2c} = \frac{(mp-qnc) + (np-mq)\sqrt{c}}{p^2-q^2c} =$$

$$= \underbrace{\frac{mp-qnc}{p^2-q^2c}}_{a} + \underbrace{\frac{np-mq}{p^2-q^2}\sqrt{c}}_{b\sqrt{c}}$$

c. n. d.

a) Usuwanie niewymierności z mianownika.
Przykład.

1) $$\frac{2+3\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}} = \frac{2+3\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}} \cdot \frac{4-\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}} = \frac{8-2\sqrt{2}+12\sqrt{2}-6}{16-2} = \frac{2+10\sqrt{2}}{14} = \frac{1+5\sqrt{2}}{7}$$

2) $$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}} \cdot \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2+2\sqrt{6}+3-5} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}+\sqrt{30}}{12} = \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}}{12}$$

Zadania.

Zad.1

Usuń niewymierność z mianownika:

$$\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{15}+\sqrt{14}-\sqrt{21}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)+\sqrt{7}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)} = \frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{(5-7)(2-3)} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)}{2}$$

Zad.2

Udowodnić, że

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4$$

Rozw.: Ponieważ

$$20+14\sqrt{2} = 8+12\sqrt{2}+12+2\sqrt{2} = 2^3+3\cdot 2^2\cdot\sqrt{2}+3\cdot 2\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^3 = \left(2+\sqrt{2}\right)^3$$

oraz

$$20\text{-}14\sqrt{2} = 8-12\sqrt{2}+12-2\sqrt{2} = 2^3-3\cdot 2^2\cdot\sqrt{2}+3\cdot 2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^3 = \left(2-\sqrt{2}\right)^3$$

więc lewa strona równości równa jest

$$\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(2-\sqrt{2}\right)^3} = 2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} = 4$$

c. n. d.

V.Zbiory ograniczone.Kresy.

Niech A będzie niepustym zbiorem liczb.

Def. Mówimy, że zbiór A jest ograniczony z dołu jeśli istnieje liczba m. nie większa od każdej liczby zbioru A.

$$\bigvee_{m} \bigwedge_{xeA} \quad m \le x$$

Liczbę m. nazywamy ograniczeniem dolnym zbioru A.

Np. Zbiór liczb naturalnych N = {0, 1, 2, ...} jest ograniczony z dołu liczbami np. -55, -1, 0.

Def. Kresem dolnym zbioru A nazywamy największą z liczb ograniczających zbiór A z dołu i oznaczamy

inf A

Np. Kresem dolnym zbioru liczb naturalnych jest 0. inf N = 0

Def. Mówimy, że zbiór ą jest ograniczony z góry, jeżeli istnieje liczba M. nie mniejsza od każdej liczby zbioru A.

$$\bigvee_{M} \bigwedge_{xeA} \quad x \le M$$

Liczbę M. nazywamy ograniczeniem górnym zbioru A.

Np. Zbiór liczb całkowitych ujemnych C_-={...,-2,-1} jest ograniczony z góry liczbami np. 2, 34.

Def. Kresem górnym zbioru A nazywamy najmniejszą z liczb ograniczających zbiór A z góry i oznaczamy sup A.

Np. Kresem górnym zbioru liczb całkowitych ujemnych jest -1. $\sup C_- = -1$

Def. Jeżeli zbiór A jest ograniczony z góry i z dołu, to mówimy, że jest ograniczony.

$$\bigvee_{m,M} \bigwedge_{x \in A} \quad m \le x \le M$$

Zadania.

Zad.1

Podaj przykład zbioru

a) ograniczonego z góry i nieograniczonego z dołu.
b) ograniczonego, którego kresy należą do niego
c) ograniczonego, którego kresy nie należą do niego.

Rozw.:

a) W_-, C_-, $A = \{x;\ x \le 4{,}7\}$
b) $A = \{y = 13 - \frac{1}{x};\ x \neq 0\}$
c) $A = \{x;\ 1 \le x \le 23\}$

Zad.2

Uzupełnij tabelkę:

Kres dolny	Zbiór	Kres górny
	$A = \left\{x;\ x = \frac{1}{2}n \text{ i } n \in N\right\}$	
	$B = \left\{x;\ x = \frac{1}{(-3)^n} \text{ i } n \in N\right\}$	
	$C = \left\{x;\ x = -\frac{1}{4n} \text{ i } n \in N\right\}$	
	$D = \{x;\ x = n + 2 \text{ i } n \in N\}$	
	$E = \{x;\ \lvert x\rvert > 1 \text{ i } x \in R\}$	
	$F = \{x;\ \lvert x\rvert < 2 \text{ i } x \in R\}$	
	$G = R \setminus R_+$	

Rozw.:

Kres dolny	Zbiór	Kres górny
0	A	1
$-\frac{1}{3}$	B	1
- 1	C	0
2	D	nie istnieje
nie istnieje	E	nie istnieje
- 2	F	2
nie istnieje	G	0

Zad.3

Które z podanych niżej zbiorów mają kres dolny lub górny

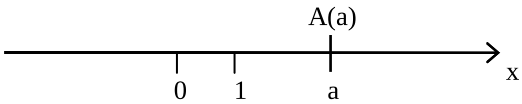
a) $C \setminus N$,
b) $\{x:\ x \in R \text{ i } x > 1\} \cup \{x:\ x \in R \text{ i } x > 0\}$
c) $\{x:\ x \in R \text{ i } x \ge 2\} \cap \{x:\ x \in R \text{ i } x < 10\}$.

Rozw.:

a) Kres dolny nie istnieje, kres górny - 1.
b) Kres dolny 0, kres górny nie istnieje.
c) Kres dolny 2, kres górny 10.

VI.Oś liczbowa.Przedziały.

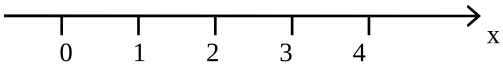
1. Oś liczbowa jest to prosta z zaznaczonym punktem zerowym, jednostką i zwrotem.



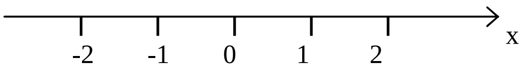
Punkt 0 dzieli prostą na dwie półproste, punktom jednej z nich przyporządkowujemy ich odległość od punktu 0, a punktom drugiej półprostej liczby przeciwne do ich odległości od punktu 0.
Liczbę a przypisaną w ten sposób punktowi A nazywamy współrzędną.

2. Liczby rzeczywiste na osi.

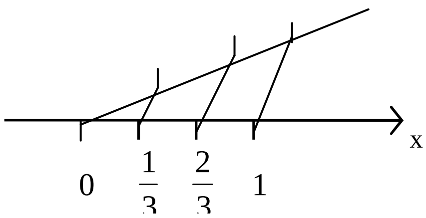
• Liczby naturalne.
Aby zaznaczyć na osi liczbowej wszystkie liczby naturalne należy odkładać kolejno w prawą stronę jedną jednostkę.



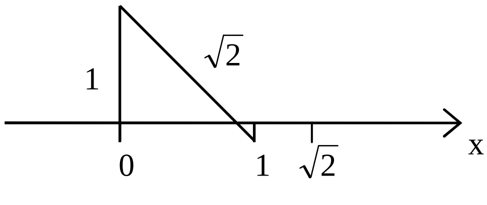
• Liczby całkowite.
Aby zaznaczyć na osi liczbowej wszystkie liczby całkowite należy odkładać kolejno w prawo, a następnie w lewo od punktu 0 odcinek jednostkowy.



• Liczby wymierne.
Aby zaznaczyć na osi liczby wymierne należy skorzystać z twierdzenia Talesa.



• Liczby niewymierne.
Aby zaznaczyć na osi liczby niewymierne należy skorzystać z twierdzenia Pitagorasa.



Uwaga.
Każdy punkt na osi liczbowej ma dokładnie jedną współrzędną rzeczywistą i odwrotnie.

3.**Przedziały.**
Przedział liczbowy jest algebraicznym odpowiednikiem odcinka, jest więc to zbiór liczb (punktów) leżących na osi pomiędzy dwiema liczbami zwanymi końcami przedziału.

Def. Przedział otwarty (a, b) określamy następująco:

$$x \in (a, b) \Leftrightarrow a < x < b$$

W przedziale tym nie ma liczby najmniejszej i nie ma liczby największej. Liczby a i b są kresami: dolnym i górnym zbioru (a, b).

Def. Przedział zamknięty (domknięty) <a, b> określamy następująco:

x ε <a, b> ⇔ a ≤ x ≤ b

Uwaga.

Nierówności < oraz > nazywamy mocnymi (ostrymi) w odróżnieniu od nierówności słabych (nieostrych) ≤ oraz ≥; przypominamy, że

a ≤ b⇔ (a < b) ∨ (a = b)

W przedziale zamkniętym <a, b> istnieje liczba najmniejsza a oraz liczba największa b.

Def. Przedziały lewostronnie domknięty <a, b) oraz prawostronnie domknięty (a, b> określamy następująco :

x ε <a, b) ⇔ a ≤ x < b
x ε (a, b> ⇔ a < x ≤ b

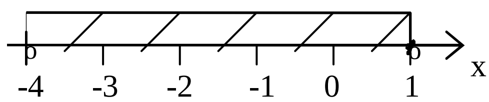
Def. Przedziały nieograniczone (nieskończone) określamy następująco:

x ε (a, +∞) ⇔ x > a
x ε < a, +∞) ⇔ x ≥ a
x ε (-∞, b) ⇔ x < b
x ε (-∞, b> ⇔ x ≤ b

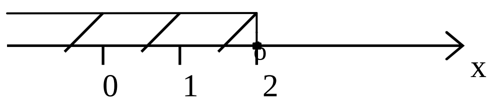
Przykład.

1) Zaznacz na osi:
   a) (-4, 1>
   b) (-∞, 2>
   c) (1, ∞)

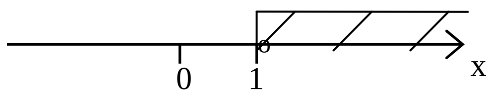
a)



b)



c)



2) Zapisz za pomocą przedziałów:
   a) R
   b) $R_{-}\cup\{0\}$
   c) {x; 1< x ≤ 3}
   d) {2}

Rozwiązanie:
   a) (-∞, +∞)
   b) (-∞, 0>
   c) (1, 3>
   d) <2, 2>

<u>Zadania.</u>

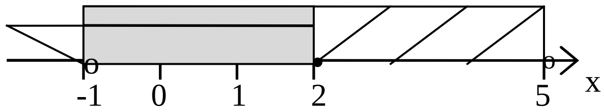
<u>Zad.1</u>

Wyznacz A∩B, A\B, A\`∪B\`, B\A\` jeżeli

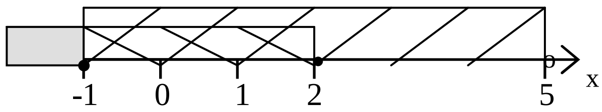
A = (-∞, 2>, B = (-1, 5).

Rozw.:

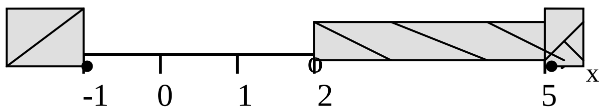
a) $A \cap B = (-1, 2>$



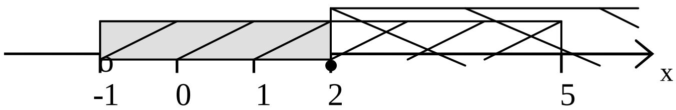
b) $A \setminus B = (-\infty, -1>$



c) $A` \cup B` = (-\infty, -1> \cup (2, \infty)$



d) $B \setminus A` = (-1, 2>$



Zad.2

Zapisać zbiory bez użycia symbolu wartości bezwzględnej.

a) $\{x: |x| \le 2\}$

b) $\{x: |x-1| < 4\}$

c) $\{x: |x+4| < 2\}$

Rozw.:

a) $\{x: |x| \le 2\} \Leftrightarrow \{x: -2 \le x \le 2\} \Leftrightarrow \{x: x \in < -2, 2 >\}$

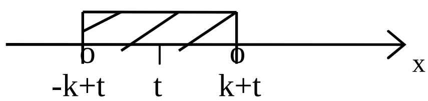
b) $\{x: |x-1| < 4\} \Leftrightarrow \{x: -4 < x-1 < 4\} \Leftrightarrow \{x: -3 < x < 5\} \Leftrightarrow \{x: x \in (-3, 5)\}$

c) $\{x: |x+4| < 2\} \Leftrightarrow \{x: -2 < x+4 < 2\} \Leftrightarrow \{x: -6 < x < -2\} \Leftrightarrow \{x: x \in (-6, -2)\}$

Wniosek.

W ogólnym przypadku zbiór $\{x: |x-t| < k\}$, gdzie $k > 0$, można zapisać jako przedział liczbowy:

$$\{x: |x-t| < k\} \Leftrightarrow \{x: -k+t < x < k+t\} \Leftrightarrow \{x: x \in (-k+t, k+t)\}$$



t - środek przedziału, k - odległość końców przedziału od jego środka

Zad.3

Podać interpretację geometryczną na osi liczbowej zbiorów:

a) $\left\{x: \frac{x+1}{x-1} < 2\right\}$

b) $\{x: x^2 + 2x + 1 \le 0\}$

c) $\{x: |x| > 0 \wedge x = 0\}$

Rozw.:

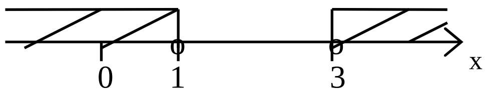
a) Rozwiązujemy nierówność

$$\frac{x+1}{x-1} < 2$$

$$\frac{x+1-2x+2}{x-1}<0 \quad / \cdot (x-1)^2$$

$$(3-x)(x-1)<0$$

$$x \in (-\infty,\ 1) \cup (3, \infty)$$

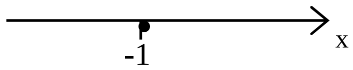


b) Rozwiązujemy nierówność

$$x^2+2x+1 \le 0$$

$$(x+1)^2 \le 0$$

$$x = -1$$



c) $\{x\colon |x| > 0 \wedge x = 0\} = \varnothing$

VII.Grupa.Pierścień.Ciało.

1.**Grupa.**

Bierzemy pod uwagę zbiór dodatnich liczb wymiernych W_+. Zbiór ten ma następujące właściwości:

a) W zbiorze W_+ określone jest mnożenie

$$[(x \ \varepsilon\ W_+) \wedge (y \ \varepsilon\ W_+)] \Rightarrow (x \cdot y) \ \varepsilon\ W_+$$

b) Mnożenie jest łączne

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

c) W zbiorze W_+ istnieje element jednostkowy (a mianowicie liczba 1) taki, że dla każdego $x \ \varepsilon\ W_+$

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

d) Dla każdego $x \ \varepsilon\ W_+$ istnieje w zbiorze W_+ element odwrotny (a mianowicie liczba $\frac{1}{x}$) taki, że

$$x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$$

Zbiór, w którym są spełnione powyższe warunki, nazywamy **grupą** ze względu na działanie (mnożenie).

Zbiór W_+ stanowi grupę, z mnożeniem jako działaniem grupowym.

2. **Pierścień.**

Bierzemy pod uwagę zbiór liczb całkowitych C. Zbiór ten ma następujące właściwości:

a) W zbiorze C są określone dwa działania: dodawanie

$$[(x \ \varepsilon\ C) \wedge (y \ \varepsilon\ C)] \Rightarrow (x + y) \ \varepsilon\ C$$

oraz mnożenie

$$[(x \ \varepsilon\ C) \wedge (y \ \varepsilon\ C)] \Rightarrow (x \cdot y) \ \varepsilon\ C$$

b) Działania: dodawanie i mnożenie są przemienne i łączne, a ponadto mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

c) W zbiorze C określone jest działanie odwrotne do dodawania - odejmowanie

$$[(x \ \varepsilon\ C) \wedge (y \ \varepsilon\ C)] \Rightarrow (x - y) \ \varepsilon\ C$$

Zbiór, w którym spełnione są powyższe warunki, nazywamy **pierścieniem.**

Zbiór C jest pierścieniem liczbowym.

3. **Ciało.**

Rozważmy zbiór R.

a) W zbiorze R określone są działania: dodawanie i mnożenie

$$[(x \varepsilon R) \wedge (y \varepsilon R)] \Rightarrow (x + y) \varepsilon R$$

$$[(x \varepsilon R) \wedge (y \varepsilon R)] \Rightarrow (x \cdot y) \varepsilon R$$

b) Działania te są łączne, przemienne oraz mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

c) W zbiorze R istnieje element zerowy (moduł dodawania) a mianowicie taka liczba (0), że dla każdego x ε R

$$x + 0 = x$$

oraz element jednostkowy (moduł mnożenia) a mianowicie taka liczba (1), że dla każdego x ε R

$$x \cdot 1 = x$$

d) W zbiorze R określone jest działanie odwrotne do dodawania - odejmowanie

$$[(x \varepsilon R) \wedge (y \varepsilon R)] \Rightarrow (x - y) \varepsilon R$$

oraz działanie odwrotne do mnożenia - dzielenie - z wyjątkiem dzielenia przez 0.

$$[(x \varepsilon R) \wedge (y \varepsilon R/\{0\})] \Rightarrow (x : y) \varepsilon R$$

Zbiór, w którym spełnione są powyższe warunki, nazywamy **ciałem**.

Zbiór R jest ciałem liczbowym.

VIII. Zadania do samodzielnego rozwiązywania.

Zad.1.

Obliczyć

$$\left(a\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{bc} + \sqrt[4]{4ab^{2c}}\right)\left(\sqrt{ab} + c\sqrt{\frac{b}{c}} - \sqrt[4]{4ab^2c}\right)$$

dla a = 1,851, b = 3, c = 0,149.

Zad.2.

Jaka jest 69-ta cyfra za przecinkiem w rozwinięciu dziesiętnym liczby $\frac{12}{99}$?

Zad.3.

Stopiono 1200 g srebra próby 0,750 i 800 g srebra próby 0,875. Jakiej próby jest otrzymany stop?

Zad.4.

Znaleźć kresy zbioru odległości punktu a od punktu b, Jeżeli punkt a należy do koła o promieniu r = 4, natomiast b do koła o promieniu r = 6. Koła są styczne zewnętrznie.

Zad.5.

Sprawdzić, że

a) zbiór W jest ciałem,

b) zbiór N nie jest pierścieniem.

O d p. o w i e d z i :

1) 6 ,   2) 1 ,   3) 0,8 ,   4) 0, 20