Kombinatoryka

I. Symbol n! (silnia)

Def.

$$n! = \begin{cases} 1 \text{ dla } n=0 \text{ lub } n=1 \\ 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n \text{ dla } n>1 \end{cases}$$

przykład 1.:

n=0 $0!=1$
n=1 $1!=1$
n=2 $2!=1\cdot 2=2$
n=3 $3!=1\cdot 2\cdot 3=2!\cdot 3=6$
n=4 $4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=3!\cdot 4=24$
n=5 $5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=4!\cdot 5=120$
....

Przykład 2.:

$(n-2)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (n-2)$
$(n-1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (n-2)(n-1)=(n-2)!\cdot (n-1)$
$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (n-2)(n-1)n=(n-1)!n$
$(n+1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n(n+1)=n!(n+1)$

II. Permutacje

Def.

Każdy n- elementowy ciąg różnych elementów zbioru n- elementowego nazywamy permutacją.

W permutacji:
– kolejność elementów jest ważna;
– muszą występować wszystkie elementy zbioru;
– elementy nie mogą się powtarzać.

tw.

Liczba permutacji zbioru n- elementowego jest równa $P_n = n!$

Zad.1. Na ile różnych sposobów można posadzić pięć osób na pięciu numerowanych miejscach?

Rozwiązanie:
Tworzymy pięciowyrazowe ciągi ze zbioru pięciu różnych elementów. Każdy taki ciąg odpowiada jednemu z możliwych sposobów posadzenia pięciu osób na pięciu numerowanych miejscach. Utworzone ciągi są permutacjami z pięciu elementów. Permutacji tych jest $P_5=5!=120$.

Odp. Pięć osób na pięciu numerowanych miejscach można posadzić na 120 sposobów.

III. Wariacje

1. Wariacje bez powtórzeń

Def.

Każdy k- wyrazowy ciąg różnych elementów zboru n- elementowego ($k\leq n$) nazywamy k- wyrazową wariacją bez powtórzeń zbioru n- elementowego.

W wariacji bez powtórzeń:
– kolejność elementów jest ważna;
– nie muszą występować wszystkie elementy zbioru;
– elementy nie mogą się powtarzać.

Tw.

Liczba k- wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n- elementowego jest równa

$$V_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$$

Zad.1. Ile jest liczb czterocyfrowych, w których żadna cyfra nie powtarza się?
Rozwiązanie:
Tworzymy ciągi 4-elementowe ze zbioru 10-elementowego. W każdym z utworzonych ciągów elementy nie mogą się powtarzać. Liczba różnych 4-elementowych ciągów, w których elementy się nie powtarzają, równa jest liczbie wariacji bez powtórzeń z 10 elementów po 4 elementy

$$V_{10}^4=\frac{10!}{(10-4)!}=\frac{10!}{6!}=\frac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{6!}=5040$$

Musimy od obliczonej liczby wariacji odjąć liczbę takich wariacji, które na początku mają zero. Ponieważ ilości liczb 4-cyfrowych się cyfrą 0, 1, 2,..., 9 są równe, więc od otrzymanej liczby wariacji V_{10}^4 musimy odjąć jej dziewiątą część

$V_{10}^4 - 0,1\cdot V_{10}^4 = 4536$

Odp. Istnieje 4536 liczb czterocyfrowych, w których żadna cyfra nie powtarza się.

2. Wariacje z powtórzeniami

Def.

Każdy k- wyrazowy ciąg elementów zbioru n- elementowego nazywamy k- wyrazową wariacją z powtórzeniami zbioru n- elementowego.

W wariacji z powtórzeniami:

– kolejność elementów jest ważna;
– nie muszą występować wszystkie elementy zbioru;
– elementy mogą się powtarzać.

Tw.

Liczba k- wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n- elementowego jest równa
$W_n^k = n^k$

Zad.1. Ile co najmniej liczb 5-cyfrowych można utworzyć z cyfr 1, 2 i 8?

Rozwiązanie:
Tworzymy ciągi 5-elementowe ze zbioru 3-elementowego. Elementy mogą się powtarzać. Liczba różnych 5-elementowych ciągów równa jest liczbie wariacji z powtórzeniami z 3 elementów po 5

$$W_3^5 = 3^5 = 243$$

Odp. Z cyfr 1, 2 i 8 można utworzyć 243 liczby 3-cyfrowe.

Zad.2. Przypuśćmy, że numery rejestracyjne samochodów składają się z trzech liter i czterech cyfr albo z czterech liter i trzech cyfr. Ile można utworzyć różnych numerów rejestracyjnych obu tych rodzajów, jeżeli korzysta się z alfabetu 24-literowego?

Rozwiązanie:
Mamy dwa przypadki: numery rejestracyjne o 3 literach i 4 cyfrach oraz numery o 4 literach i 3 cyfrach.

1. Tworzymy ciągi 3-elementowe ze zbioru 24-elementowego i każdy z takich ciągów dołączamy do dowolnego 4-elementowego ciągu ze zbioru 10 elementów. W ten sposób możemy utworzyć

$$W_{24}^3 \cdot W_{10}^4 = 24^3 \cdot 10^4$$

Numerów rejestracyjnych pierwszego rodzaju jest $24^3 \cdot 10^4$.

2. Tworzymy ciągi 4-elementowe ze zbioru 24-elementowego i każdy z takich ciągów dołączamy do dowolnego 3-elementowego ciągu zbioru 10 elementów. W ten sposób możemy utworzyć

$$W_{24}^4 \cdot W_{10}^3 = 24^4 \cdot 10^3$$

Numerów rejestracyjnych drugiego rodzaju jest $24^4 \cdot 10^3$.

Odp. Można utworzyć $24^3 \cdot 10^4 + 24^4 \cdot 10^3$ różnych numerów rejestracyjnych obu rodzajów.

IV. Symbol Newtona

Def.

Symbolem Newtona nazywamy wyrażenie

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad n, k \in N \cup \{0\}, \ k \le n$$

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n} = 1$$

V. Kombinacje

Def.

Każdy k- elementowy podzbiór zbioru n- elementowego nazywamy k- elementową kombinacją zbioru n- elementowego.

W kombinacji:
– kolejność elementów nie jest ważna;
– nie muszą występować wszystkie elementy zbioru;
– elementy nie mogą się powtarzać.

Tw.

Liczba k- elementowych kombinacji zbioru n- elementowego jest równa

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Zad.1. Ile nastąpi powitań, gdy jednocześnie spotka się 8 znajomych osób?

Rozwiązanie:
Liczba wszystkich osób n=8, natomiast k=2 jest liczbą osób, które uczestniczą w jednym powitaniu. Porządek dwóch osób witających się nie odgrywa roli, a zatem szukana liczba równa się liczbie kombinacji 2-elementowych ze zbioru 8 różnych elementów. Zatem otrzymujemy

$$C_8^{\,2} = \binom{8}{2} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$$

Odp. Nastąpi 28 powitań.

Zad.2. W urnie znajduje się 9 kul oznaczonych cyframi 1, 2, ..., 9. Wyjmujemy 3 kule. W ilu przypadkach suma napisanych na nich cyfr jest nie mniejsza niż 9?

Rozwiązanie:
Liczbę mniejszą niż 9 można rozłożyć na sumę trzech różnych składników naturalnych na 4 sposoby: 6=1+2+3, 7=1+2+4, 8=1+2+5 i 8=1+3+4. Ponieważ spośród 9 kul można wyjąć trzy na C_9^3 sposoby, więc liczba przypadków, o których mowa w zadaniu wynosi

$C_9^3 – 4 = 84 – 4 =80$

Odp. Suma napisanych na wylosowanych kulach cyfr jest nie mniejsza niż 9 w 80 przypadkach.