Granica
i
ciągłość
funkcji

Opracował

Kosiedowski Wojciech

Figurski Tomasz

Rys historyczny

Granica funkcji ,jedno z podstawowych pojęć matematycznych, znane było intuicyjnie już w starożytności i stosowane wówczas do obliczania pół figur geometrycznych za pomocą tzw. metody wyczerpywania; polegała ona na wpisywaniu w daną figurę geometryczną ciągu figur o znanych polach. Termin "limes"(granica) pojawił się w XVII wieku w pracach angielskiego fizyka i matematyka Izaaka Newtona oraz niemieckiego matematyka i filozofa Gottfrieda Wilhelma von Leibniza w związku z próbami uściślenia tego pojęcia.
Współczesne określenie granicy funkcji powstało w XIX w. Wraz z rozwojem analizy matematycznej i jej zastosowań. Pierwszą ścisłą definicję granicy funkcji, sformułowano za pomocą pojęć arytmetycznych, podał francuski matematyk i fizyk Augustin Louis Cauchy, a współczesne brzmienie nadał jej matematyk niemiecki Carl Weierstrass.

Granica i ciągłość funkcji

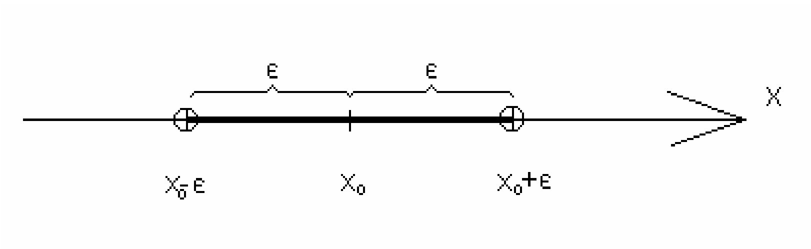
Granica i ciągłość funkcji

Definicja

Niech $\varepsilon>0$ i x_o dowolnym ustalonym punktem. Zbiór $(x_o-\varepsilon;x_o+\varepsilon)$ nazywamy otoczeniem (epsilowym) punktu x_o.

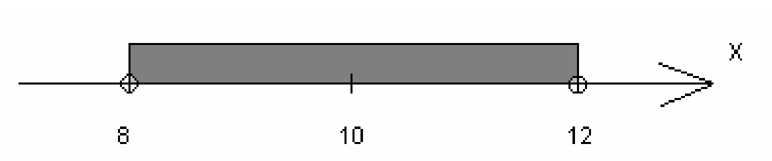
Piszemy:

$U(x_o,\varepsilon)$



Przykład:

U(10,2)



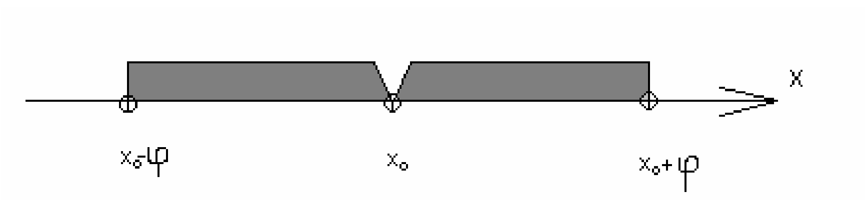
$U(x_o,\varepsilon)=\{x;|x-x_o|<\varepsilon\}$

Definicja

Niech $\varphi>0$ i x_o dowolnym ustalonym punktem. Zbiór $(x_o-\varphi;x_o)\cup(x_o;x_o+\varphi)$ nazywamy sąsiedztwem punktu x_o.

Piszemy:

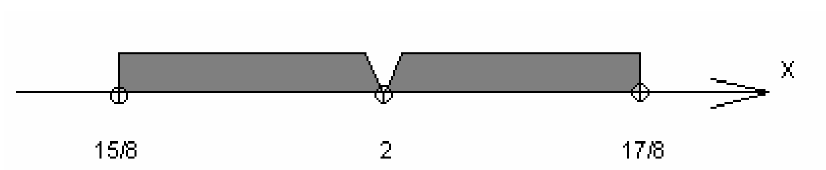
$S(x_o,\varphi)$



$S(x_o,\varphi)=\{x;0<|x-x_o|<\varphi\}$

Przykład:

S(2,⅛)



$S(2,⅛)=\{x;0<|x-x_o|<\varphi\}$

Definicja

Niech D⊂R. Punkt x_o nazywamy punktem skupienia zbioru D, jeśli istnieje ciąg $\{x_n\}\in D$ z sąsiedztwa punktu x_o, którego granicą jest punkt x_o.

$$x_0 \quad pkt.\ \ skupiena \Leftrightarrow \bigvee_{\{x_n\}\subset D,\, x_n \neq x_0} \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

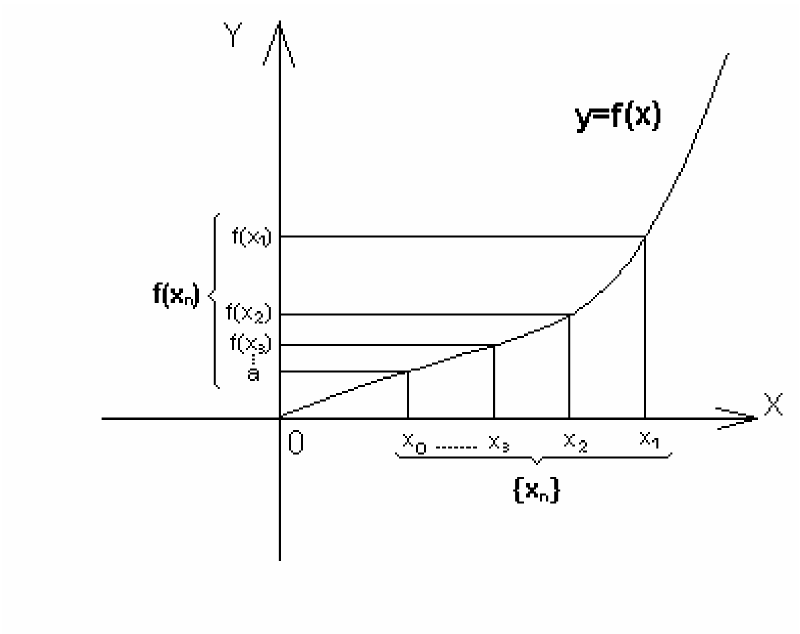
Przykład:

1. D=<1,e> - każdy punkt zbioru D jest jego punktem skupienia.
2. D=(1,e) - punkty 1,e nie należą do zbioru, ale są jego punktami skupienia.
3. D=<1,e>∪{1997} - punkt 1997 jest elementem zbioru D, ale nie jest punktem skupienia; punkt izolowany.

Definicja *(Heinego[1])*

Mówimy, że punkt a jest granicą funkcji f; D→R w punkcie skupienia x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu argumentów $\{x_n\}\subset D$ z sąsiedztwa punktu x_0, którego granicą jest punkt x_0 ciąg wartości $\{f(x_n)\}$jest zbieżny do a.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \bigwedge_{\{x_n\}\subset D,\ x_n \neq x_0} [(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0) \Rightarrow (\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a)]$$



[1] Heine Eduard [hajne e.], ur. 1821, zm. 1881, matematyk niemiecki; zajmował się rożnymi działami analizy matematycznej (teoria potencjału, równania różniczkowe, funkcje specjalne).

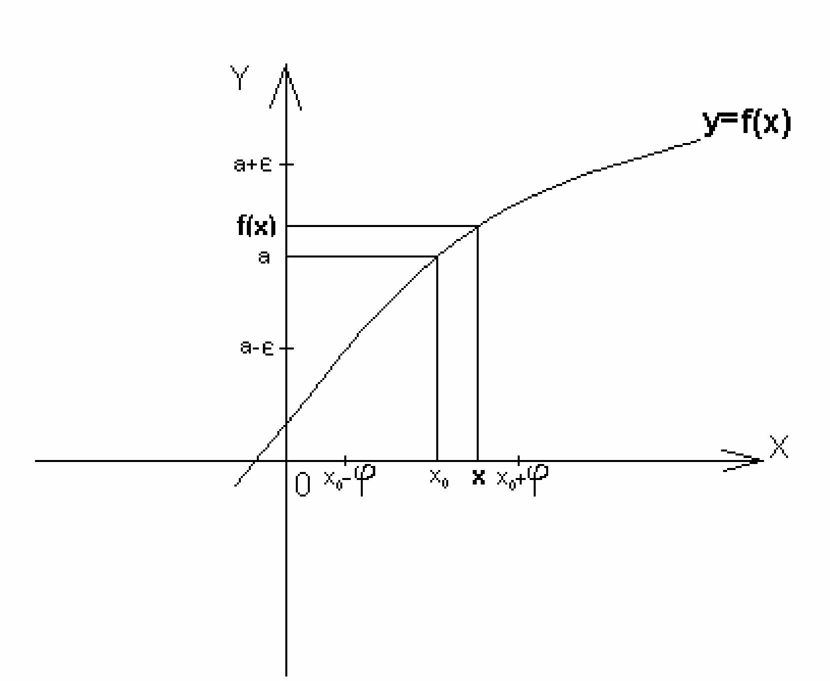
Definicja *(Cauchy'ego[2])*

Mówimy, że punkt a jest granicą funkcji f; D→R w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ε>0 istnieje φ>0 takie, że dla x∈D zachodzi warunek:

$0<|x-x_0|<\varphi \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$

Piszemy:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \overset{\wedge}{\varepsilon}>0, \overset{\vee}{\varphi}>0, x\overset{\wedge}{\in} D(-<|x-x_0|<\varphi \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon)$$



Definicja *(Cauch'ego 2)*

Mówimy, że punkt a jest granicą funkcji f; D→R w punkcie x_0, gdy dla dowolnego otoczenia U(a,ε) punktu a istnieje sąsiedztwo S(x_0,φ) takie, że dla każdego x∈D jeśli tylko x∈S∩D, bo f(x)∈U.

Definicje Haine'go i Cauch'ego są sobie równoważne.

Przykład:

1.

Wykaż z definicji, że granicą funkcji 3x+1 w punkcie 2 jest 7.

$$\lim_{x\to 2}(3x+1)=7$$

f(x)=3x+1   D∈R x_0=2   a=7

---

[2] Cauchy Augustin Louis [koszi ogűstę lui], baron, ur.1789, zm. 1857, wybitny matematyk francuski XIX wieku, twórca ścisłego wykładu analizy matematycznej Interesował się wieloma dziedzinami matematyki, a także fizyką, mechaniką i astronomią. W swoich pracach starał się uporządkować i wyjaśnić podstawy rachunku różniczkowego; sformułował w sposób ścisły pojęcie granicy, zdefiniował szereg liczbowy oraz pojęcie i kryteria jego zbieżności.

a) *Cauch'ego*
weźmy dowolne:
$\varepsilon>0$
rozpatrzmy:
$|f(x)-a|<\varepsilon$
$|3x+1-7|<\varepsilon$
$|3x-6|<\varepsilon$
$|3(x-2)|<\varepsilon$
$|3||x-2|<\varepsilon$
$3|x-2|<\varepsilon$
$|x-2|<\varepsilon\div 3$
$|x-x_0|<\varphi$

Zatem dla $\varphi>0$ spełnione są warunki definicji co oznacza, że granicą tej funkcji w punkcie 2 jest liczba 7. (c.n.d.)

b) *Heinego*
Weźmy dowolny ciąg $\{x_n\}$ taki, że:

$$\hat{n} \quad x_n \neq 2$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2$$

$$\textit{wtedy}:$$

$$f(x_n) = 3x_n + 1$$

$$\textit{mamy}:$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}(3x_n + 1) = \lim_{n\to\infty} 3x_n + \lim_{n\to\infty} 1 = 3\lim_{n\to\infty} x_n + 1 = 3*2+1 = 7$$

(c.n.d..)

2.
Wykaż na podstawie definicji, że nie istnieje granica:

$$\lim_{x\to 0} = \frac{|x|}{x}$$

a)
weźmy ciąg

$$x_n = \frac{1}{n}$$

mamy

$$\hat{n} \quad \frac{1}{n} \neq 0, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

rozpatrzmy

$$\lim_{x\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to\infty}\frac{|\frac{1}{n}|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

b)
weźmy ciąg

$$x'_n = -\frac{1}{n}$$

mamy

$$\bigwedge_n -\frac{1}{n} \neq 0, \quad \lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{n}) = 0$$

rozpatrzmy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{|-\frac{1}{n}|}{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = -1$$

Biorąc ciągi argumentów

$$x_n = \frac{1}{n} \quad i \quad x'_n = -\frac{1}{n}$$

zbieżne do 0 (granica) otrzymaliśmy ciągi wartości $f(x_n)$ i $f(x'_n)$ zbieżne do różnych granic. Zatem nie istnieje

$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ c.n.d.

Definicja *(Heinego)*

Mówimy, że punkt a jest prawostronną granicą f; D→R w punkcie skupienia x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $\{x_n\} \subset D$ spełniającego warunki $x_n > x_0$ i $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ciąg wartości $\{f(x_n)\}$ jest zbieżny do a.

Piszemy:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = a \Leftrightarrow \bigwedge_{\substack{\{x_n\} \subset D \\ x_n > x_o}} (\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a)$$

Definicja *(Heinego)*

Mówimy, że punkt a jest lewostronną granicą f; D→R w punkcie skupienia x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $\{x_n\} \subset D$ spełniającego warunki $x_n < x_0$ i $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ciąg wartości $\{f(x_n)\}$ jest zbieżny do a.

Piszemy:

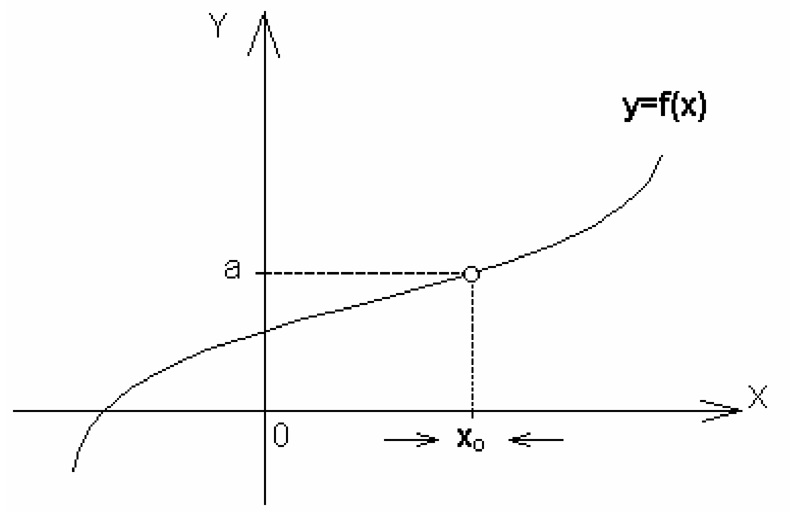
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = a \Leftrightarrow \bigwedge_{\substack{\{x_n\} \subset D \\ x_n < x_o}} (\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a)$$

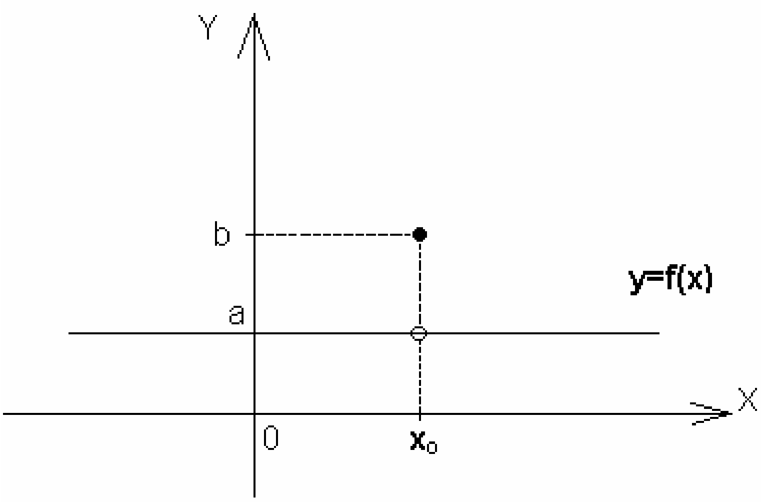
Twierdzenie

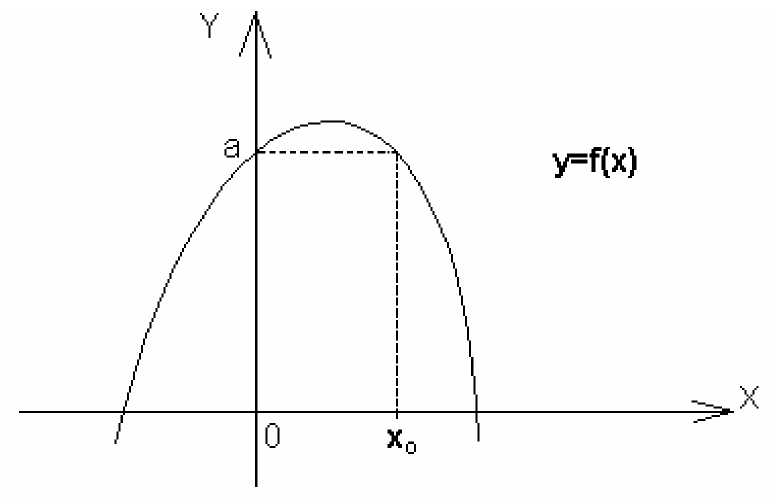
Funkcja f; D→R ma w punkcie x_0 granicę równą a wtedy i tylko wtedy, gdy granice lewostronne i prawostronne są sobie równe.

Przykłady funkcji

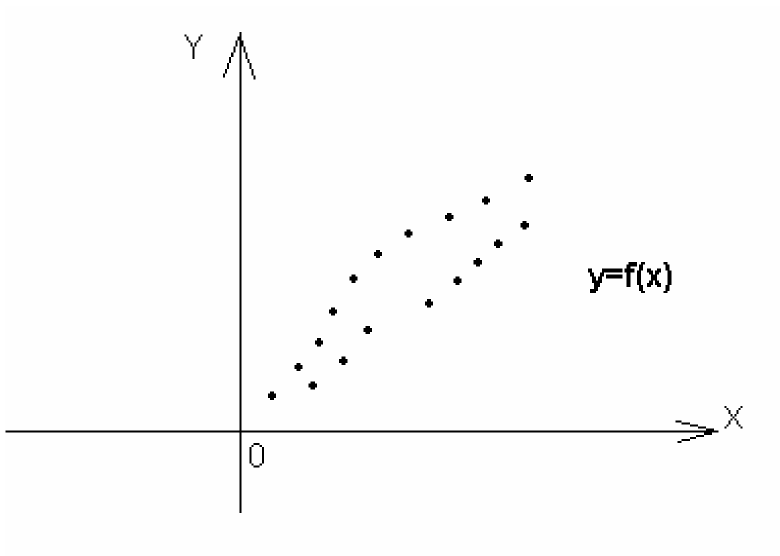
a) posiadających granicę:

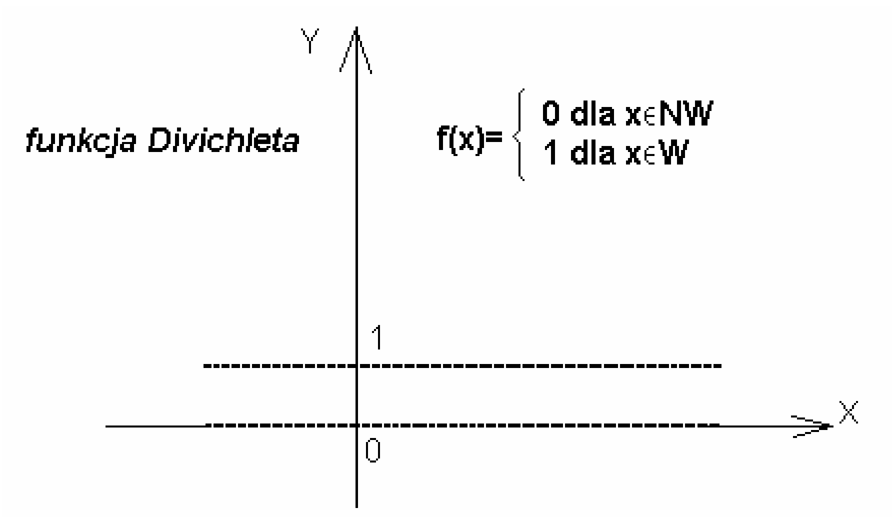


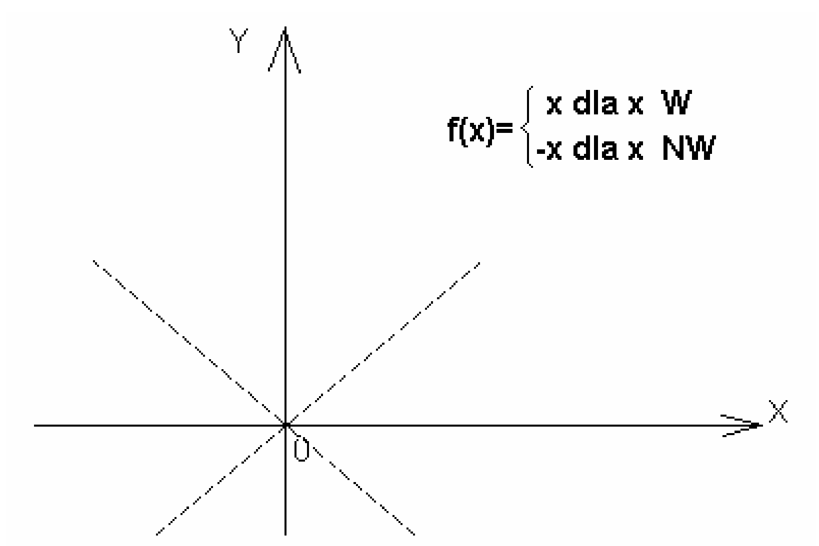


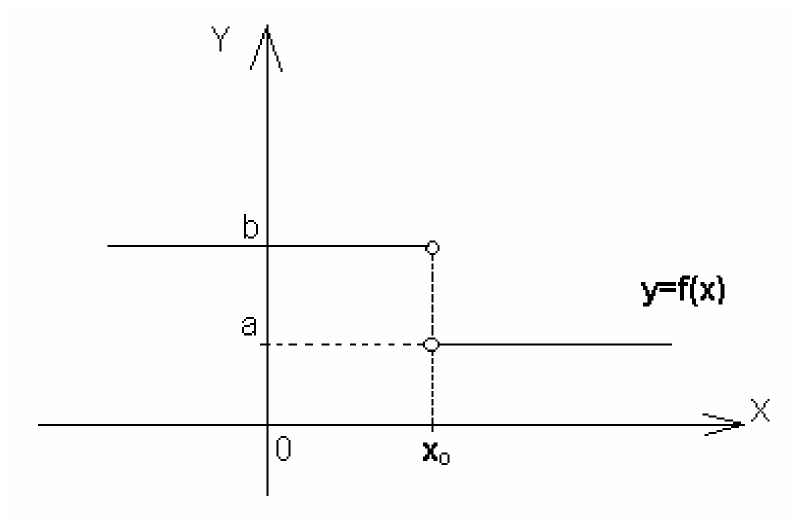


b) nie posiadających granicy









Twierdzenie

Jesli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \;\; i \;\; \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b \quad ,to:$

1. $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a + b$

2. $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a - b$

3. $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) * g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) * \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a * b$

4. $\lim\limits_{x \to x_0}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{a}{b} \qquad b \neq 0, g(x) \neq 0$

Twierdzenie

Jeśli f; D→R jest funkcją wymierną postaci

$$f(x) = \frac{W(x)}{P(x)}$$

i x_0 nie jest miejscem zerowym wielomianu P(x), to

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Przykład:

1. $\lim_{x\to 3}\sqrt{7-x}=\lim_{x\to 3}\sqrt{7-3}=2$

2. $\lim_{x\to 23456} e = e \quad (\,funkcja \quad stala)$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)-\sqrt{1-2x-x^2}}{2x}=\lim_{x\to 0}[\{\frac{(x+1)-\sqrt{1-2x-x^2}}{2x}\}\times\{\frac{(x+1)+\sqrt{1-2x-x^2}}{(x+1)+\sqrt{1-2x-x^2}}\}]=$

$=\lim_{x\to 0}\{\frac{(x+1)^2-(1-2x-x^2)}{2x[(x+1)+\sqrt{1-2x-x^2}\,]}=\lim_{x\to 0}\frac{2x(x+2)}{2x[(x+1)+\sqrt{1-2x-x^2}\,]}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2}{x+1+\sqrt{1-2x-x^2}}=$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{1+1}=1$

Zadania:

1.Znajdź granicę

$a)\lim_{x\to 0}\frac{arc\sin 2x}{arc\sin x}$

$b)\lim_{s\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2s}{\sin s-\cos s}$

$c)\lim_{x\to\infty}\frac{ar\,\mathrm{ctg}\,\frac{2}{x}}{3x}$

2.Znajdź asymptoty krzywych

$a)\, f(x)=\frac{x^2}{x-2}$

$b)\, f(x)=\frac{x^2-x-1}{2x}$

3.Wskaż punkty nieciągłości funkcji

$a)\, f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

$b)\, f(x)=\frac{2}{1-x^2}$

$c)\, y=\mathrm{tg}\,x$

Odpowiedzi:

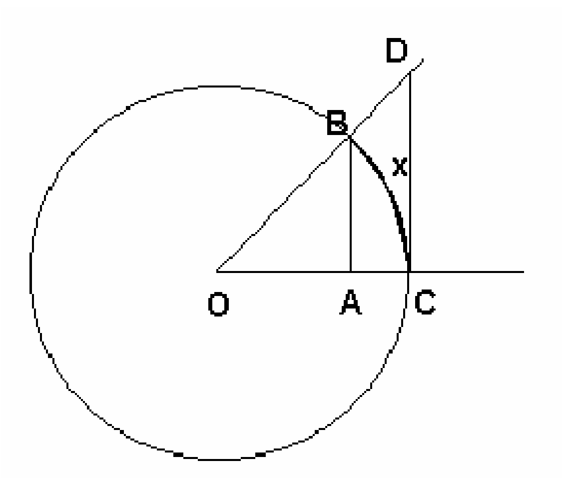
1.a)2; b)$-\sqrt{2}$;c)0

2.a)y=x+2;b) $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$

3.a)x=-1;b)x=1;c) $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}, k=0,\pm1,\pm2...$

Granica $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

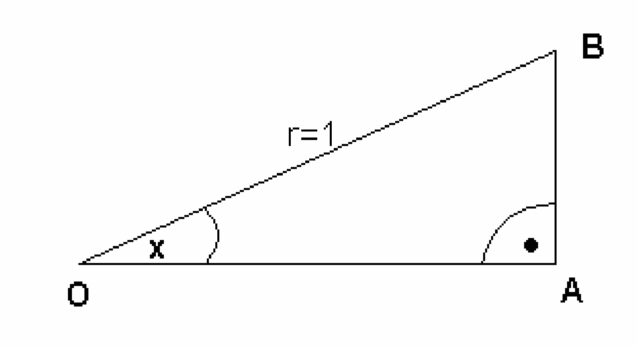
Niech dany będzie okrąg o r=1



[1]z ▲ OAB:

$$\sin x = \frac{AB}{1}$$

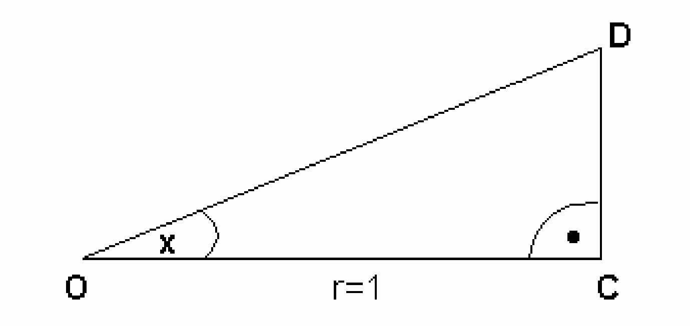
$$\sin x = AB$$



z ▲ OCD:

$$\text{tg}\, x = \frac{CD}{1}$$

$$\text{tg}\, x = CD$$



Przykłady i wnioski:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\times\frac{2}{2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x} = 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = \vdots t = 2x \vdots = 2\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 2$

2. $\lim\limits_{p\to 0}\frac{\sin 5p}{p} = \lim\limits_{p\to 0}\frac{\sin 5p}{p}\times\frac{5}{5} = 5\lim\limits_{p\to 0}\frac{\sin 5p}{5p} = \vdots 5p = s \vdots = 5\lim\limits_{s\to 0}\frac{\sin s}{s} = 5\times 1 = 1$

wniosek :

$$\mathbf{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x} = a \quad a \in R \setminus \{0\}}$$

3. $\lim\limits_{w\to 0}\frac{\sin 3w}{2w} = \lim\limits_{w\to 0}\frac{1}{2}\frac{\sin 3w}{w}\frac{3}{3} = \frac{3}{2}\lim\limits_{w\to 0}\frac{\sin 3w}{3w} = \frac{3}{2}\times 1 = \frac{3}{2}$

wniosek :

$$\mathbf{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} \quad a,b \in R \setminus \{0\}}$$

Zadania:

Oblicz

$a)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} ex}{\operatorname{tg} x}$

$b)\lim\limits_{p\to 0}\frac{\sin 1999p - \sin 1997p}{\sin p}$

$c)\lim\limits_{ą\to 0}\frac{\sin 25987ą}{\sin 1999ą}$

Odpowiedzi:

a)e

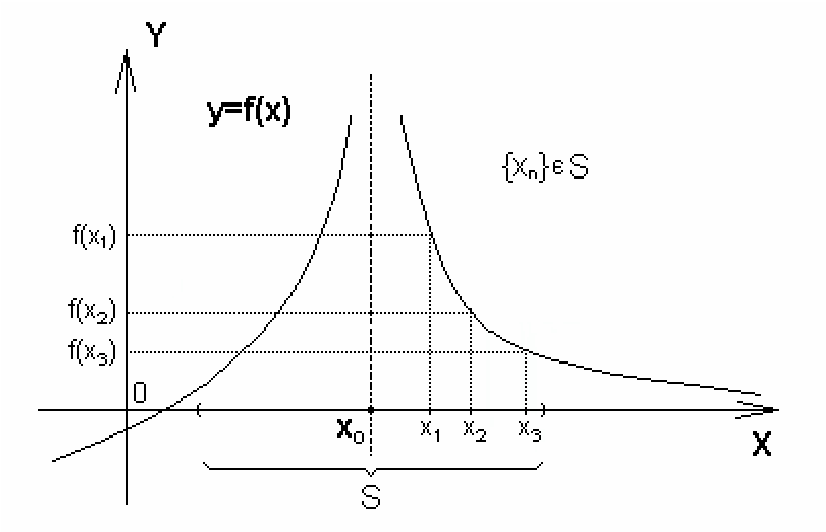
b)2

c)13

Granica niewłaściwa funkcji w punkcie

Definicja *(Heinego)*

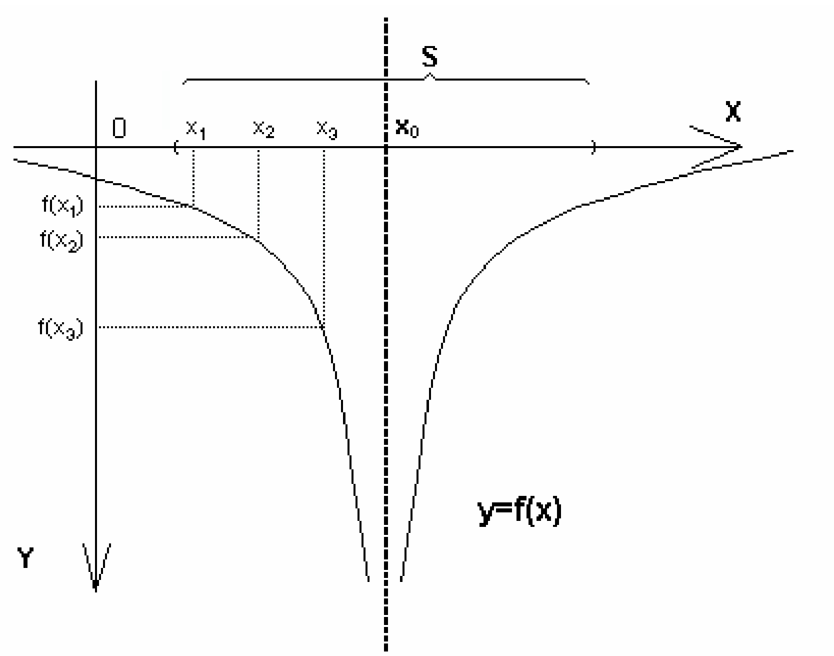
Mówimy, że funkcja f: D→R ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą +∞<=>, gdy dla każdego ciągu argumentów $\{x_n\}_{x_n \neq x_0} \subset D$ i zbieżnego do x_0 ciąg wartości $\{f(x_n)\}$ jest rozbieżny



$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \hat{\{x_n\}} \subset S \ \ (\lim_{x \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x_n) = +\infty)$ do +∞.

Analogicznie określamy granicę dla -∞.

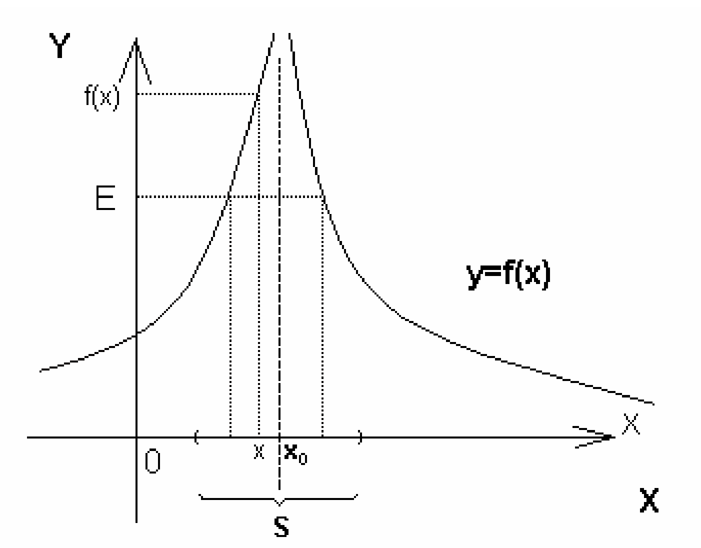
$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \hat{\{x_n\}} \subset S \ \ (\lim_{x \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x_n) = -\infty)$



Definicja ***(Cauchy'ego)***

Mówimy, że f;D→R ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby ε>0 istnieje φ>0 takie, że dla każdego $x\in S(x_0,\varphi)$ spełniona jest implikacja:

$0<|x-x_0|<\varphi \Rightarrow f(x)>\varepsilon$ $\quad \lim_{x\to x_0} = +\infty \Leftrightarrow \varepsilon \overset{\wedge}{>} 0, \varphi \overset{\vee}{>} 0, x \overset{\wedge}{\in} S \quad (0<|x \_ x_0|<\varphi \Rightarrow f(x)>\varepsilon)$



Przykład:

Oblicz:

1.

$$\lim_{j\to 0}\frac{1}{j^2}$$

$$\lim_{j\to o^-} =:\frac{1}{0^+}: = +\infty$$

$$\lim_{j\to o^+} =:\frac{1}{0^+}: = +\infty$$

czyli:

$$\lim_{j\to 0^-}\frac{1}{j^2} = \lim_{j\to 0^+}\frac{1}{j^2}$$

więc:

$$\lim_{j\to 0} = +\infty$$

Odp.: Funkcja ta ma granicę i wynosi ona +∞

2.

$$\lim_{r\to 2}\frac{r^2-1}{r-2}$$

$$\lim_{r\to 2^-}\frac{r^2-1}{r-2} = \vdots\frac{3}{0^-}\vdots = -\infty$$

$$\lim_{r\to 2^+}\frac{r^2-1}{r-2} = \vdots\frac{3}{0^+}\vdots = +\infty$$

czyli:

$$\lim_{r\to 2^-}\frac{r^2-1}{r-2} \neq \lim_{r\to 2^+}\frac{r^2-1}{r-2}$$

Odp.: Funkcja ta nie ma granicy w punkcie 2.

3.
Wykaż, że istnieje granica z:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

a)

$$wezmy \quad ciag: \quad x_n = \frac{1}{n}$$

$$mamy \quad x_n > 0 \quad i \quad \lim_{x\to\infty} x_n = 0$$

$$wtedy \quad f(x_n) = \frac{1}{x_n}$$

$$i \quad \lim_{n\to 0}\frac{1}{x_n} = \lim_{n\to 0}\frac{1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to 0} n = +\infty$$

$$zatem \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

b)

$$wezmy \quad ciag: \quad x_n' = -\frac{1}{n}$$

$$mamy \quad x_n' < 0 \quad i \quad \lim_{x\to\infty} x_n' = 0$$

$$wtedy \quad f(x_n') = \frac{1}{x_n'}$$

$$i \quad \lim_{n\to 0}\frac{1}{x_n'} = \lim_{n\to 0}\frac{1}{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to 0} -n = -\infty$$

$$zatem \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

ponieważ:

$\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$,

więc funkcja f nie ma granicy w punkcie x_0.

Zadania

Oblicz

$a) \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{2x-1}$

$b) \lim_{ę \to \infty} \frac{ę^2+1}{ę-2ę^2}$

$c) \lim_{l \to \infty} l \sin \frac{1}{l}$

Odpowiedzi: a)1;b)$-\frac{1}{2}$;c)1

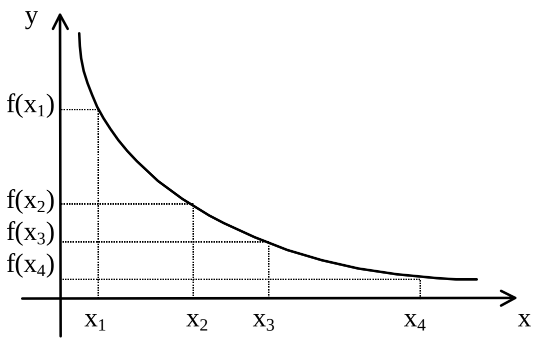
Granica funkcji w nieskończoności

Definicja (Heinego)

Niech $D \in (b, \propto)$ i $f: D \rightarrow R$

Mówimy, że funkcja f ma w $+\infty$ granicę równą a wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu argumentów $\{x_n\}$ rozbieżnego do $+\infty$ ciąg wartości $\{f(x_n)\}$ jest zbieżny do a.

$$\boxed{\lim_{x\to+\propto} f(x) = a \Leftrightarrow \bigwedge_{\{x_n\}} (\lim_{n\to\propto} x_n = +\propto \Rightarrow \lim_{n\to\propto} f(x_n) = a)}$$



Analogicznie określamy granicę w $-\infty$:

Mówimy, że funkcja f ma w $-\infty$ granicę równą a wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu argumentów $\{x_n\}$ rozbieżnego do $-\infty$ ciąg wartości $\{f(x_n)\}$ jest zbieżny do a.

$$\boxed{\lim_{x\to-\propto} f(x) = a \Leftrightarrow \bigwedge_{\{x_n\}} (\lim_{n\to\propto} x_n = -\propto \Rightarrow \lim_{n\to\propto} f(x_n) = a)}$$

Przykład:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x-2}{1-3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\overset{\nearrow 0}{\frac{3}{x}}+\overset{\nearrow 0}{\frac{2}{x^2}}}{\underset{\searrow 0}{\frac{1}{x^2}}-3} = -\frac{1}{3}$$

Zadania:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{2x-1}$

b) $\lim_{x\to\infty} = (\sqrt{x} - \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}})$

c) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$

Odpowiedzi: a) 1; b)-$\frac{1}{2}$; c) 0.

Obliczanie granic

Zadania:

Oblicz

a) $\lim\limits_{x\to\infty} 2x(\sqrt{x^2+1}-x)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x^3+2x+1}{x-2}+1)$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x}{\sin x}$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$

Odpowiedzi: a) $\frac{1}{2}$; b) 0; c) 3; d) 0; e) 1.

Funkcja ciągła w zbiorze

Definicja *(Heinego)*

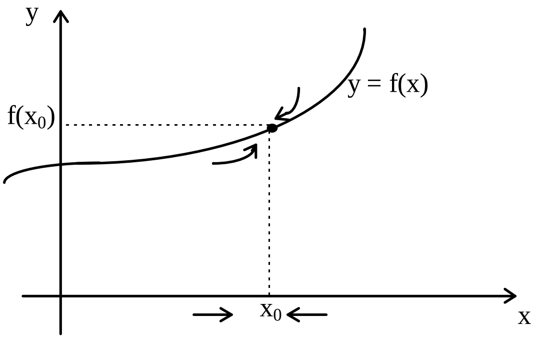
Mówimy, że funkcja f: D→R jest ciągła w punkcie $x_0 \in D$, jeśli dla każdego ciągu argumentów $\{x_n\} \in D$ zbieżnego do ciągu wartości $\{f(x_n)\}$ jest zbieżna do $f(x_0)$.

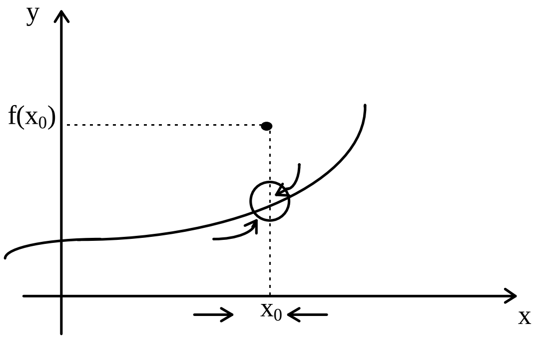
Funkcja ciągła w $\boxed{x_0 \Leftrightarrow \bigwedge_{\{x_n\}\in D}(\lim\limits_{x\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0))}$

Różnica definicji granicy funkcji w punkcie i ciągłości funkcji w punkcie

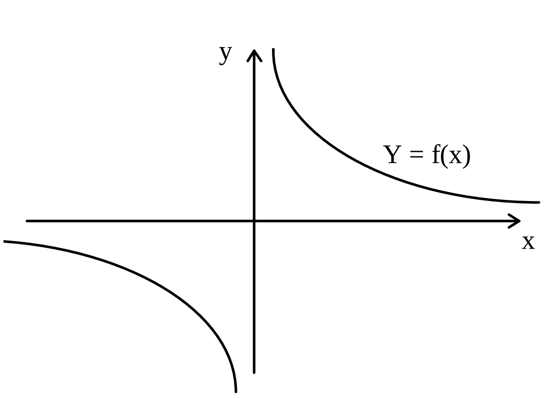
granica	ciągłość
1. x_0 - punkt skupienia	1. x_0 - punkt z dziedziny
2. Musi zachodzić warunek: $x_n \neq x_0$	2. Może zachodzić warunek: $x_n = x_0$
3. $f(x_n) \to a$	3. $f(x_n) \to f(x_0)$

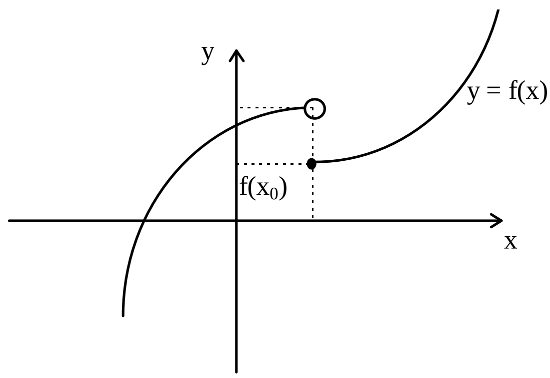
Przykład:



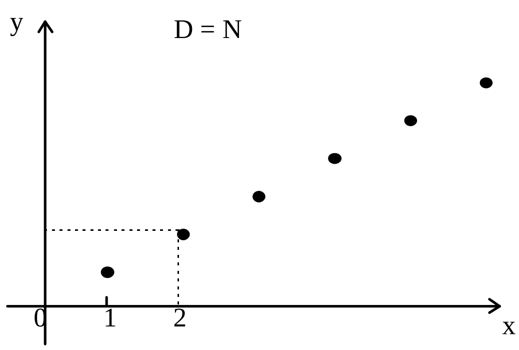


Funkcja ta jest ciągła w punkcie x_0





Funkcja ta jest ciągła. Nie możemy jednak mówić o ciągłości w punkcie x=0, gdyż punkt ten nie należy do dziedziny.



Definicja

Mówimy, że funkcja f: D→R jest ciągła, jeśli jest ciągła w każdym punkcie dziedziny.

Twierdzenie

Niech f: D→R

Jeśli punkt x_0 należy do D i istnieje granica $\lim_{x \to x_0} f(x)$, to funkcja jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy granica funkcji w punkcie x_0 jest równa wartości funkcji w punkcie x_0.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

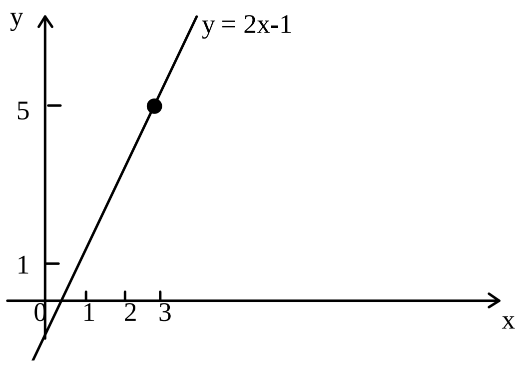
Przykład:

Zbadaj ciągłość funkcji f w punkcie x_0.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 \text{ dla } x \neq 3 \\ 5 \text{ dla } x = 3 \end{cases}$$

$x_0=3$

- D=R, $x_0=3 \in D$
- Wyznaczamy granicę funkcji f w punkcie x_0
  $$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} 2x - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$$
- Wyznaczamy wartość funkcji f w punkcie x_0
  $f(x_0)=f(3)=5$
- Sprawdzamy warunek twierdzenia:
  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$
  $$5 = 5$$
  $$L = P$$



Odpowiedź:
W punkcie $x_0 = 3$ funkcja f jest ciągła.

Zadania:

Zbadaj ciągłość funkcji f w punkcie x_0:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{dla } x \neq 2 \\ 3 & \text{dla } x = 2 \end{cases}$

$x_0=2$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-6x+9}{x-3} & \text{dla } x \in D \setminus \{3\} \\ 1 & \text{dla } x=3 \end{cases}$

$x_0=3$

c) $f(x)\begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{x} & \text{dla } x>0 \\ \sqrt{x^2+9} & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$

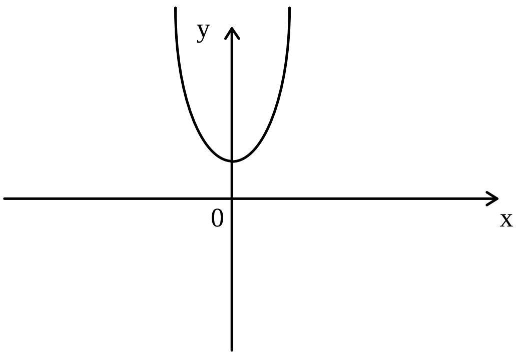
$x_0=0$

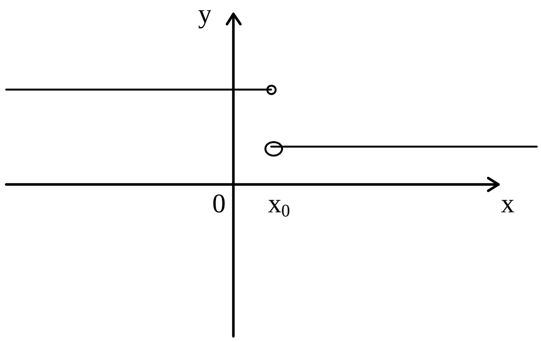
Własności funkcji ciągłych

Definicja

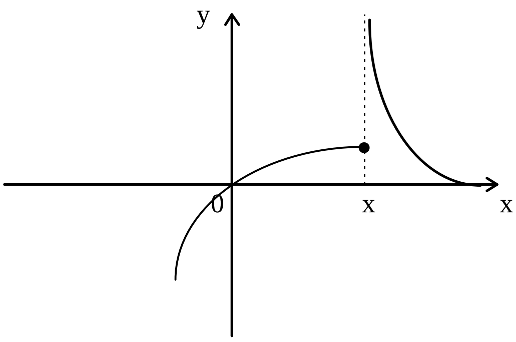
Punkt x_0, w którym funkcja f nie jest ciągła, nazywamy punktem nieciągłości funkcji f.

Jeżeli w punkcie x_0 istnieją właściwe granice jednostronne, to mówimy, że w punkcie x_0 funkcja f ma nieciągłość I rodzaju.





W pozostałych przypadkach mówimy, że w punkcie x_0 funkcja f ma nieciągłość II rodzaju.



Twierdzenie I: Funkcja stała jest ciągła.
Twierdzenie II: Wielomian jest funkcją ciągłą.
Twierdzenie III: Funkcja wymierna jest funkcją ciągłą.

Twierdzenie IV: Funkcje trygonometryczne są funkcjami ciągłymi.

Twierdzenie V: Funkcja wykładnicza jest funkcją ciągłą.

TwierdzenieVI: Suma, różnica i iloczyn funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

TwierdzenieVII: Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

TwierdzenieVIII: Funkcja odwrotna do funkcji ciągłej jest funkcją ciągłą.

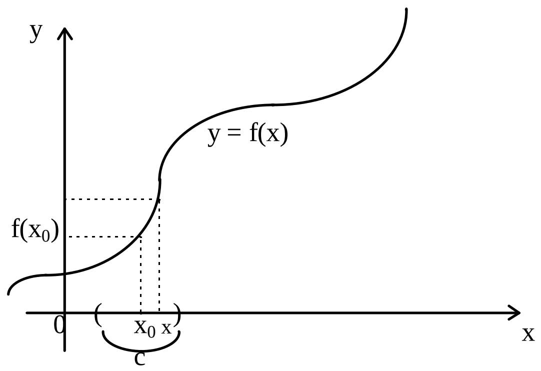
TwierdzenieIX: Jeżeli istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ i funkcja h jest ciągła w punkcie x_0=a, to

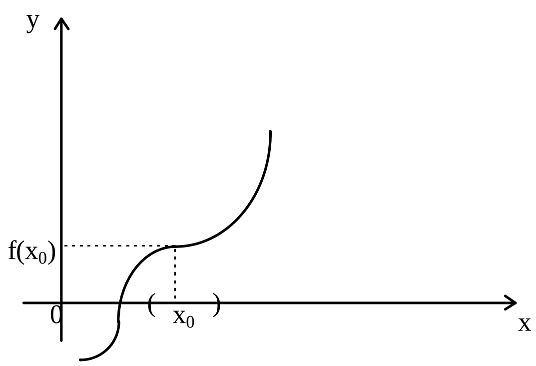
$$\lim_{x \to x_0} h[f(x)] = h(\lim_{x \to x_0} f(x)) = h(a)$$

np. $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}} = e^1 = e$

Twierdzenie X: Jeżeli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 i $f(x_0)>0$ ($f(x_0)<0$), to istnieje takie otoczenie U punktu x_0, że dla każdego $x \in U \cap D$ spełniona jest nierówność:

$$\mathbf{f(x)>0\ (f(x)<0)}$$





Twierdzenie ***(Weierstrassa[3])***

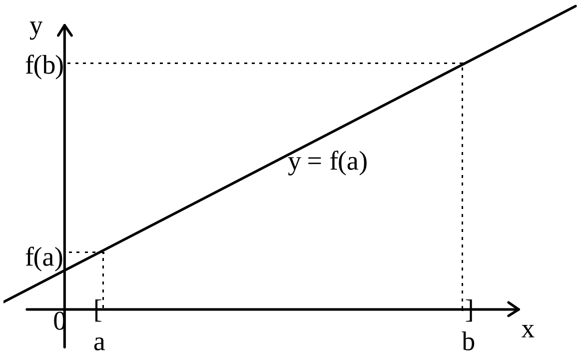
Jeżeli funkcja f:$\langle a, b\rangle \to R$ jest ciągła, to istnieją punkty c_1, $c_2 \in \langle a, b\rangle$, że $f(c_1) = \inf\limits_{\langle a,b\rangle} f(x)$ i $f(c_2) = \sup\limits_{\langle a,b\rangle} f(x)$

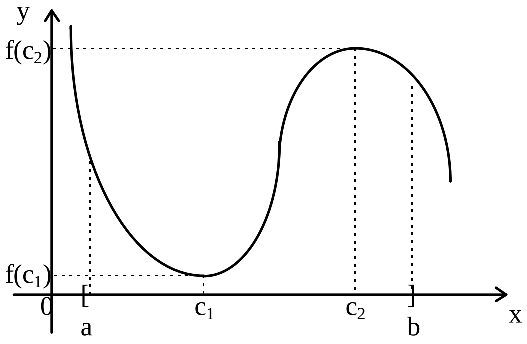
Twierdzenie (to samo tylko że po chłopsku)

Jeżeli funkcja f jest określona na przedziale domkniętym i jest ciągła, to istnieje punkt z tego przedziału, w którym funkcja f osiąga wartość największą i istnieje punkt, w którym funkcja f osiąga wartość największą.

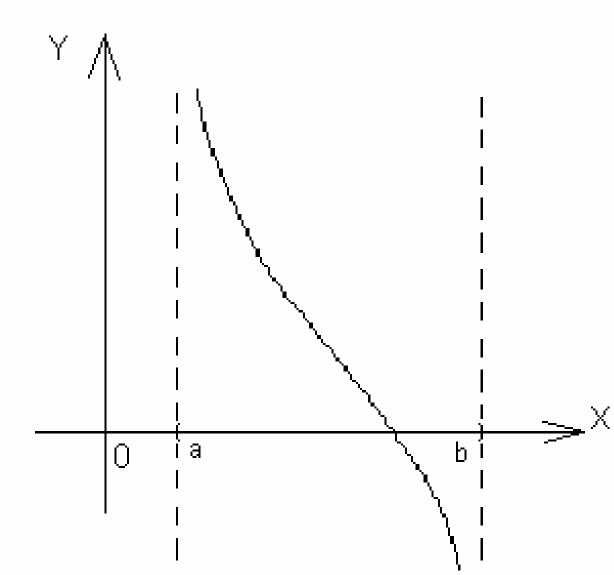
---

[3] Weierstrass Carl [wajersztras karl] ,ur. 1815, zm. 1897, matematyk niem., rozwinął teorię funkcji analitycznych; autor prac z zakresu analizy matem., rachunku wariacyjnego, geometrii różniczkowej, algebry liniowej. Profesor uniwersytetu w Berlinie. Zamiast niejasnych, intuicyjnych pojęć analizy matem. Weierstrass wprowadził pojęcia dobrze zdefiniowane.Podał do dziś używaną epsilonową definicję gr. funkcji.



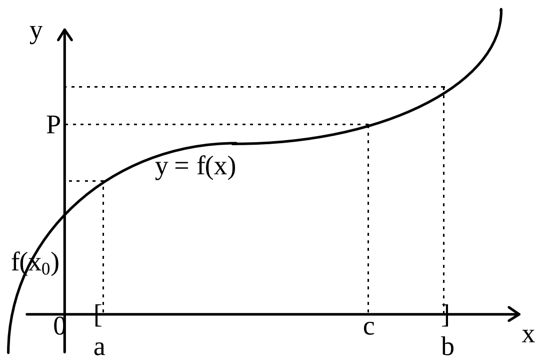


$c_1=a \Rightarrow$ wartość najmniejsza = f(a)
$c_2=b \Rightarrow$ wartość największa = f(b)
Kontrprzykład, gdy przedział jest otwarty np. (a,b)



Twierdzenie ***(Darboux[4])***

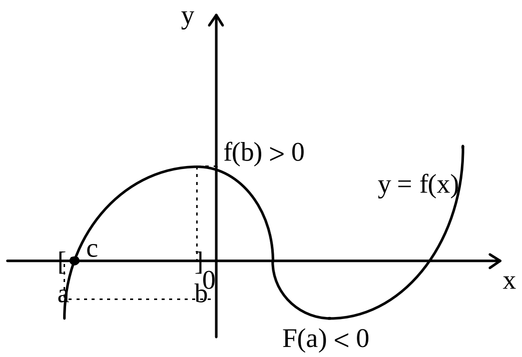
Jeżeli funkcja $f:\langle a, b\rangle \rightarrow R$ jest ciągła i $f(a)\neq f(b)$, oraz p leży pomiędzy f(a) i f(b), to istnieje punkt $c\in(a, b)$ taki, że $f(c)=p$.



<u>Wniosek</u>

Jeśli funkcja f jest funkcją ciągłą, oraz f(a)>0 i f(b)<0 (lub f(a)<0 i f(b)>0), to istnieje taki punkt c, że f(c)=0.

[4] Darboux Jean Gaston [darbu ża gastą], ur. 1842 , zm. 1917, matematyk franc., autor prac dotyczących przede wszystkim geometrii różniczkowej i równań różniczkowych; zajmował się także mechaniką teoretyczną i teorią funkcji analitycznych.



Badanie ciągłości funkcji - zadania

Zbadaj ciągłość funkcji. Sporządź jej wykres.

1.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ dla } x < 1 \wedge x \neq 0 \\ 2x - 1 \text{ dla } x \geq 1 \end{cases} \qquad x_0=1$$

2.

$$y = \begin{cases} x^2 \text{ dla } x < 0 \\ \sqrt{x} - 1 \text{ dla } 0 \leq x < 1 \\ 1 \text{ dla } x \geq 1 \end{cases} \qquad x_0=0$$

3.

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x \text{ dla } x < 0 \\ \cos x \text{ dla } x \geq 0 \end{cases} \qquad x_0=\pi$$

4.

$$f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{x^2-x}{x-1}} \text{ dla } x < 1 \\ \log_2 x + 2 \text{ dla } x \geq 1 \end{cases} \qquad x_0=1$$

5.

Funkcja f przyporządkowuje liczbie rzeczywistej a liczbę pierwiastków równania :
$x^2-4x+\log_2(a^2+7)=0$

a) wyznacz dziedzinę tej funkcji i naszkicuj jej wykres
b) zbadaj ciągłość
c) oblicz $\lim_{a \to \infty} f(a)$