GEOMETRIA

WYKONALI:
Jacek Dąbrowski
Klaudiusz Dyjas
Tomasz Wawrzyński

<u>Temat:</u> Wiadomości wstępne.

AKSJOMAT - w, którym zawarta jest pewna nieudowadnialna prawda. Jest to pewnik. Aksjomatów nie udowadnia się.
NAUKA DEDUKCYJNA - nauka opierająca się na zbiorze aksjomatów, pewników.
GEOMETRIA - dział matematyki , którego przedmiotem jest badanie figur geometrycznych i zależności między nimi.
FIGURA GEOMETRYCZNA - dowolny zbiór punktów.

Kawałek historii geometrii!

Geometria rozwijała się od najdawniejszych czasów. Istniała głównie jako nauka praktyczna (pomiary odległości, konstrukcje budowlane). Pierwsze próby budowy geometrii jako nauki podjęto w VI wieku p.n.e. w Grecji, tam też nadano jej nazwę **geo -** ziemia, **metro-** mierzę.

Grecy w myśl koncepcji przyczyna powoduje skutek odpowiadali na dwa pytania: jak? i dlaczego?. Geometria posługuje się abstrakcją (myśleniem abstrakcyjnym), to jest oderwaniem od konkretnej materii niezmiennym w czasie.

Złoty wiek Grecji dał kilku wybitnych uczonych:
Tales z Miletu, Pitagoras, Arystoteles, Zenon z Elei, Archimedes.

Z czasem geometria ulegała rozwojowi powstawały coraz to nowsze jej gałęzie. W odrodzeniu powstała geometria rzutowa. Na przełomie XVII i XVIII wieku powstała geometria analityczna (Kartezjusz) związana z powstaniem nowych linii. W XIX wieku powstała geometria różniczkowa (Riemann). Pozwalała ona między innymi wyznaczyć kąt przecięcia krzywych posługując się rachunkiem pochodnych. Równolegle nastąpił powrót do rozważań czysto geometrycznych dając podstawy geometrii wykreślnej.

Pod koniec XIX wieku matematycy (Łobaczewski) pracowali nad zaprzeczeniem aksjomatów Euklidesa co w efekcie doprowadziło do powstania geometrii nieeuklidesowej (geometrii Łobaczewskiego).

ELEMENTY(matematyczne dzieło EUKLIDESA).

Euklides wydał swoje dzieło w III wieku p.n.e. Zawierało ono całą ówczesna wiedzę matematyczną. Zostało wydane we wszystkich językach świata. Euklides przyjął bez dowodu kilka twierdzeń, które nazwał **aksjomatami** (pewnikami) i z nich wyprowadził wszystkie pozostałe twierdzenia geometrii.

Dowodząc tw. geometrii powołujemy się na aksjomaty i twierdzenia poprzednio udowodnione.
Teoria dedukcyjna musi być:
- niesprzeczna - aksjomaty muszą prowadzić do jednoznacznie brzmiących zdań
- niezależna - jeden aksjomat nie może być wnioskiem innego
- zupełna - każde twierdzenie musi dać się udowodnić z układu aksjomatów

Elementy Euklidesa składają się ze wstępu i XIII ksiąg. We wstępie znajduje się 35 określeń, 5 aksjomatów i 5 postulatów.
KSIĘGA I - Twierdzenia o trójkątach (m. in. Twierdzenie Pitagorasa) i prostych.
KSIĘGA II - Algebra przedstawiona w sposób geometryczny.
KSIĘGA III,IV - Teoria okręgu. Wielokąty wpisane i opisane na okręgu.
KSIĘGA V - Teoria proporcji.
KSIĘGA VI - Teoria podobieństwa.
KSIĘGA VII -
KSIĘGA VIII - X - Arytmetyka liczb naturalnych.
KSIĘGA XI - XIII - Stereometria (geometria przestrzenna).

System geometrii euklidesowej posiadał pewne luki , które zostały usunięte przez Hilberta w 1899 roku. Hilbert ogłosił wolną od luk geometrię euklidesową.

Geometria euklidesowa powstaje z geometrii absolutnej w połączeniu z aksjomatem Euklidesa.

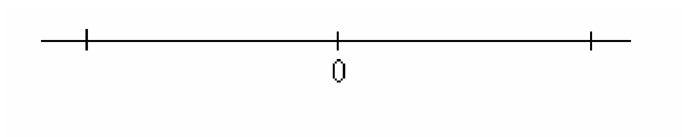
AKSJOMAT EUKLIDESA - przez każdy punkt przechodzi dokładnie jedna równoległa do danej.

Pojęciami pierwotnymi geometrii absolutnej są :

1.Relacje:
„ Є ” - incydencji „przynależności”
„ I ” - rozdzielania
„ ≡ ” - przystawania
2.Zbiory:
{ A,B,C,...}- punkty
{ a,b,c,...} - proste
{ α,β,χ,...} - płaszczyzny
Opiera się ona na czterech grupach aksjomatów: - incydencji
- rozdzielania
- przystawania
- ciągłości

Przykłady aksjomatów :
1.Z każdą prostą incydentne są co najmniej dwa punkty.
2.Jeżeli A | B | C to punkty ABC są współliniowe.
3.Od dowolnego punktu o należącego do prostej p można jednoznacznie po obu stronach odłożyć odcinki $\overline{O_1O}$ i $\overline{OO_2}$ przystające do danego odcinka $\overline{AB}$.

A B



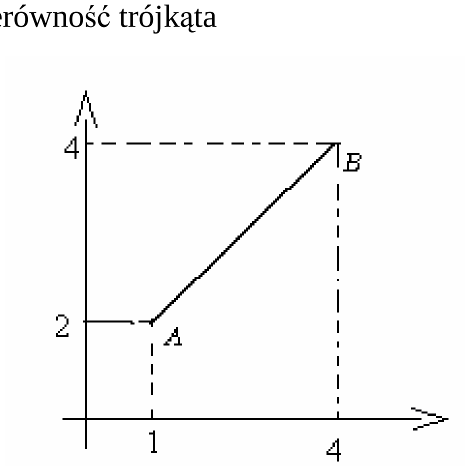
$\overline{AB} \equiv \overline{O_1O} \equiv \overline{OO_2}$

<u>Temat:</u> Podstawowe pojęcia geometrii.

I .
<u>Def.</u> Odległością (metryką) nazywamy funkcję d ,która każdej parze punktów przyporządkowuje nieujemną liczbę rzeczywistą oraz spełnia warunki:
1) d (A,B) = 0 $\Leftrightarrow$ A=B
2) d (A,B) = d (B,A)
3) d (A,B) $\leq$ d (A,C) + d (C,B) -nierówność trójkąta

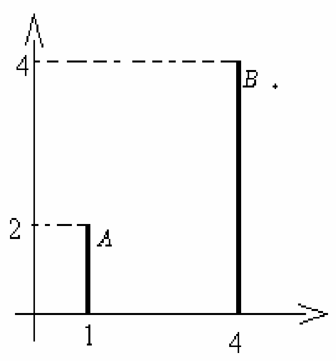
<u>Przykład</u>
1) Odległość na płaszczyźnie

A (1,2) B (4.4)
d (A,B) = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} =$
$= \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$



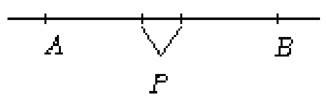
2)

A (1,2)   B (4,4)
d (A,B) = 2 + 3 + 4 = 9



Def. Odcinkiem nazywamy zbiór wszystkich punktów leżących pomiędzy punktami A i B oraz punkty A i B .

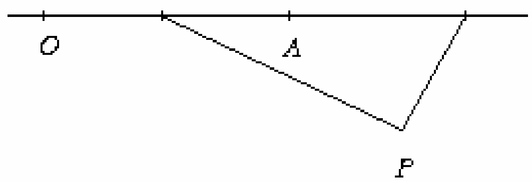
$\overline{AB}$ ={ P.; A|P|B∪AB}



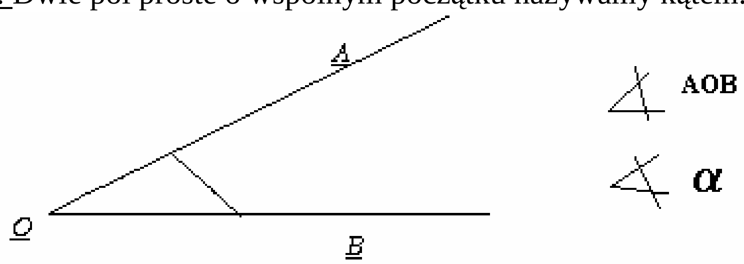
Def. Długością odcinka $\overline{AB}$ nazywamy odległość jego końców i oznaczamy $|\overline{AB}|$ lub (AB)

Def. Punkt O należący do prostej k dzieli tę prostą na dwie części zwane pół prostymi.
Jeżeli dane są dwa punkty O i A to pół prostą o początku O i przechodzącą przez punkt A nazywamy zbiór wszystkich punktów P. takich, że:

O$|P|$ A lub O$|A|$ P.

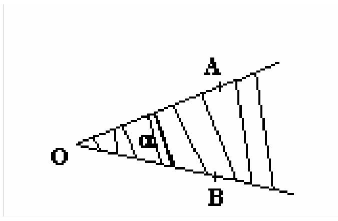


Def. Dwie pół proste o wspólnym początku nazywamy kątem.

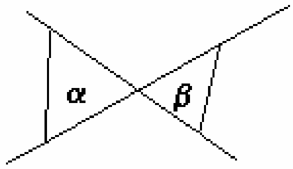


UWAGA:
Def. Część płaszczyzny wyciętą przez dwie pół proste o wspólnym początku nazywamy kątem.

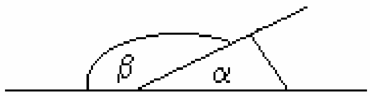
--GEOMETRIA--



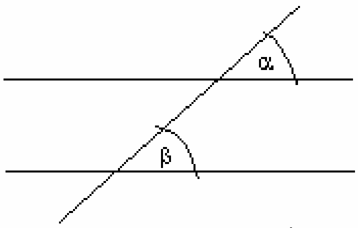
1) Jeżeli ramiona kąta pokrywają się to kąt nazywamy zerowym.
2) Jeżeli ramiona kąta uzupełniają się do prostej to kąt nazywamy półpełnym .



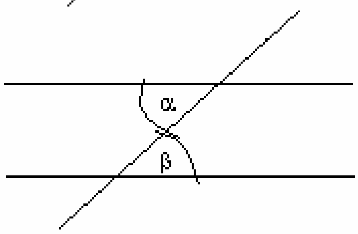
kąty wierzchołkowe



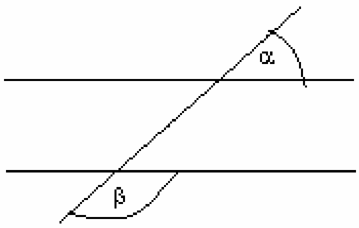
kąty dopełniające



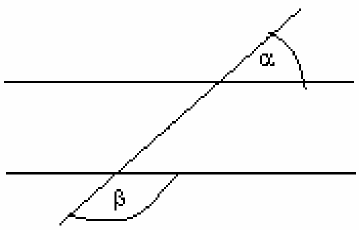
kąty odpowiadające



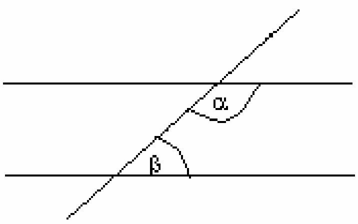
kąty naprzemianległe



kąty jednostronne zewnętrzne



kąty jednostronne zewnętrzne



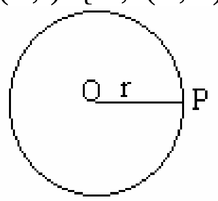
kąty jednostronne wewnętrzne

Def. Okręgiem o środku O i promieniu r>O nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest równa r.

O(O,r)={

Def. Okręgiem o środku O i promieniu r>O nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest równa r.

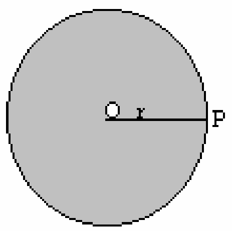
O(O,r)={P.;d(O,P.)=r}



Jeżeli r = 0 to okrąg nazywamy zdegenerowanym.

Def. Kołem o środku O i promieniu r>O nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest nie większa niż r.

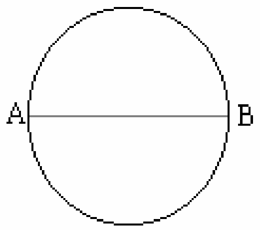
k(O,r)={P.;d(O,P.)≤ r}



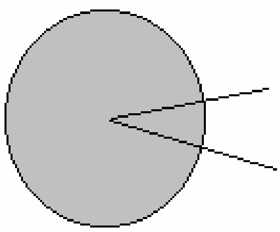
Figurę nazywamy ograniczoną jeśli zawiera się ona w pewnym kole.

Figurę nazywamy nieograniczoną jeśli nie zawiera się ona w żadnym kole.

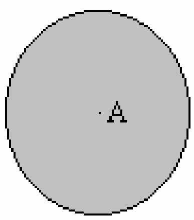
1.Odcinek jest figurą ograniczoną.



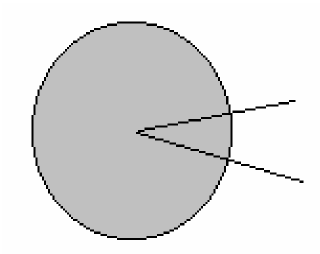
2.Kąt jest figurą nieograniczoną.



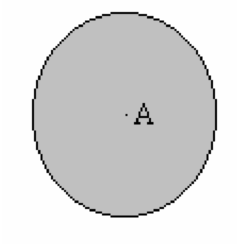
Def. Otoczeniem kołowym pkt.A opromieniu r nazywamy zbiór {P.:d(A,P.)<r}.



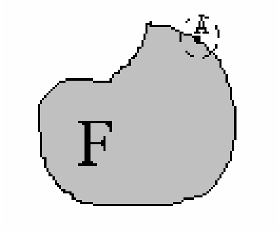
<u>Def.</u> Punktem brzegowym figury F nazywamy punkt taki, że w każdym jego otoczeniu kołowym znajdują się zarówno punkty nie należące do niej.Zbiór wszystkich punktów figury nazywamy otoczeniem brzegowym figury F.



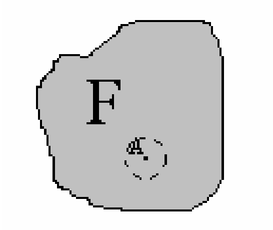
Def. Otoczeniem kołowym pkt. A o promieniu r nazywamy zbiór {P, d (A, P)< r}.



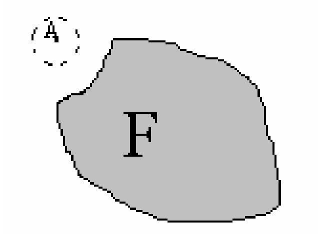
Def. Punktem brzegowym figury F nazywamy punkt taki, że w każdym jego otoczeniu kołowym znajdują się zarówno punkty nie należące do niej. Zbiór wszystkich punktów figury nazywamy otoczeniem brzegowym figury F.



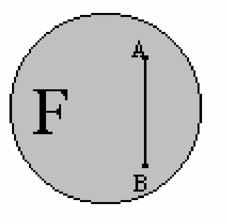
Def. Punktem wewnętrznym figury F nazywamy punkt, który ma otoczenie zawarte w figurze F. Zbiór wszystkich punktów wewnętrznych nazywamy wnętrzem figury F.



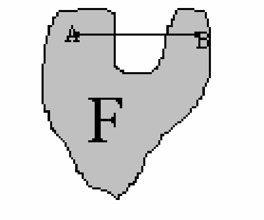
Def. Punktem zewnętrznym figury F nazywamy punkt , który ma otoczenie wolne od punktów figury F.
Zbiór wszystkich punktów zewnętrznych nazywamy zewnętrzem figury F.



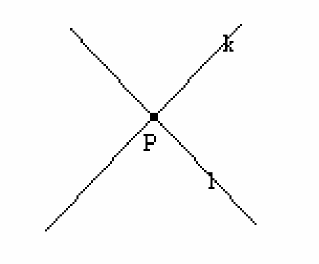
Def. Figurę F nazywamy wypukłą jeśli każdy odcinek, którego końce należą do figury F zawiera się w figurze F.
PRZYKŁAD
1) Figura wypukła



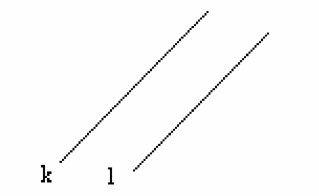
2) Figura niewypukła



II. Prosta na płaszczyźnie.
Dwie proste leżące na tej samej płaszczyźnie mogą
-mieć jeden punkt wspólny
-mieć wszystkie punkty wspólne
-nie mieć punktów wspólnych.
Def. Dwie proste k i l mające jeden punkt wspólny nazywamy prostymi przecinającymi się.



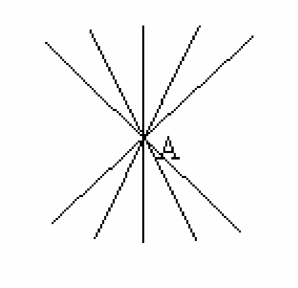
$k \cap l=\{P\}$
Def. Jeśli proste k i l są identyczne to mówimy, że proste k i l pokrywają się .Piszemy k = l
Def. Mówimy, że proste k i l są równoległe, jeśli nie mają punktów wspólnych.



$(k\|l \Leftrightarrow \{k \cap l = \phi \cup k = l\}$

Tw. Relacja równoległość prostych jest:
1) zwrotna $a\|a$
2) symetryczna $a\|b \Rightarrow b\|a$
3) przechodnia $(a\|b \cap b\|c) \Rightarrow (a\|c)$

Def. Rodzinę wszystkich prostych równoległych do pewnej k nazywamy kierunkiem prostej k.
Def. Punkty leżące na jednej prostej nazywamy wspóliniowymi (kolinearnymi).
Def. Pękiem prostych o wierzchołku A nazywamy rodzinę wszystkich prostych przechodzących przez punkt A.

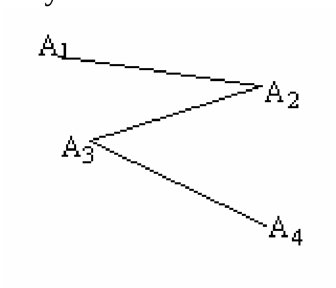


III. Wielokąty

Def. Niech dane będą punkty $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Sumę odcinków $\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n}$ nazywamy łamaną , przy czym każde dwa odcinki albo są rozłączne , albo mają dokładnie jeden punkt wspólny.

Przykład:



Def. Jeżeli:

-dwa kolejne odcinki nie zawierają się w jednej prostej

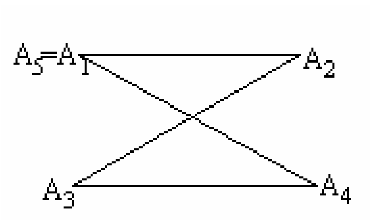
-każde dwa odcinki nie mające wspólnego końca są rozłączne

-każdy wierzchołek łamanej jest wspólnym końcem co najwyżej dwóch odcinków,

to łamaną nazywamy zwyczajną.

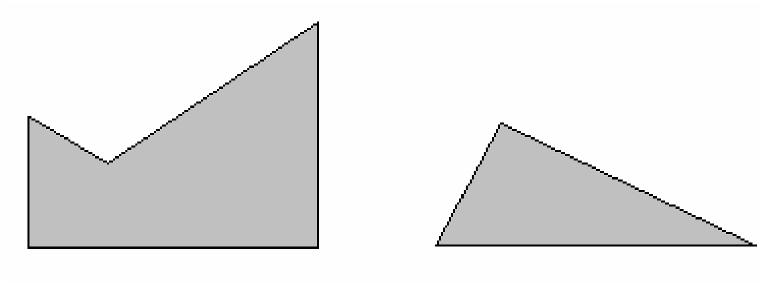
Def. Jeżeli $A_1 = A_n$ to łamaną nazywamy zamkniętą.

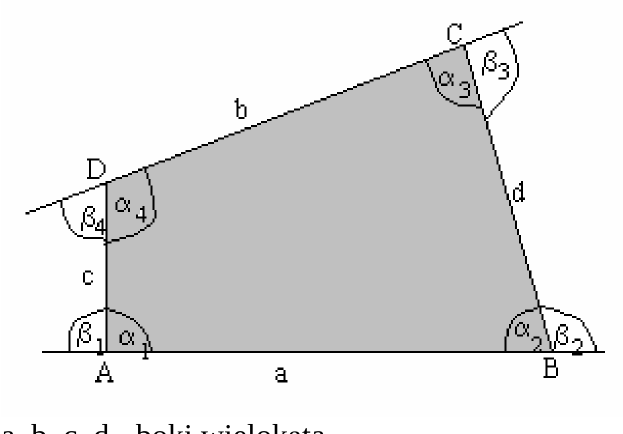
PRZYKŁAD:



Def. Wielokątem nazywamy sumę łamanej zamkniętej oraz figury ograniczonej wyciętej z płaszczyzny przez tą łamaną.

PRZYKŁAD:





a, b, c, d - boki wielokąta

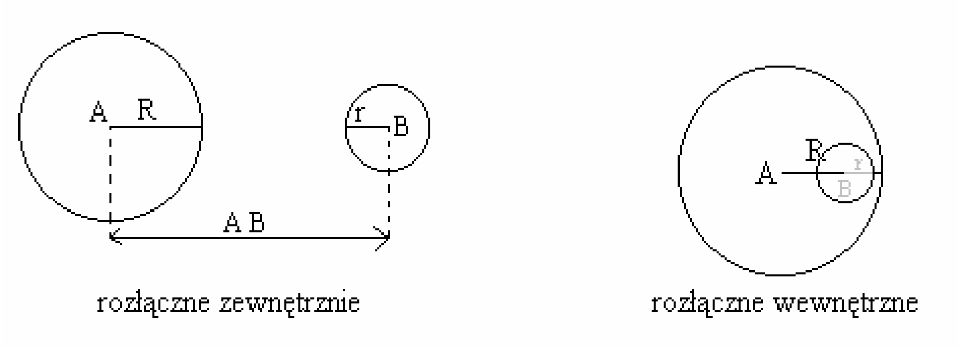
A,B,C,D - wierzchołki wielokąta

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ - kąty wewnętrzne wielokąta

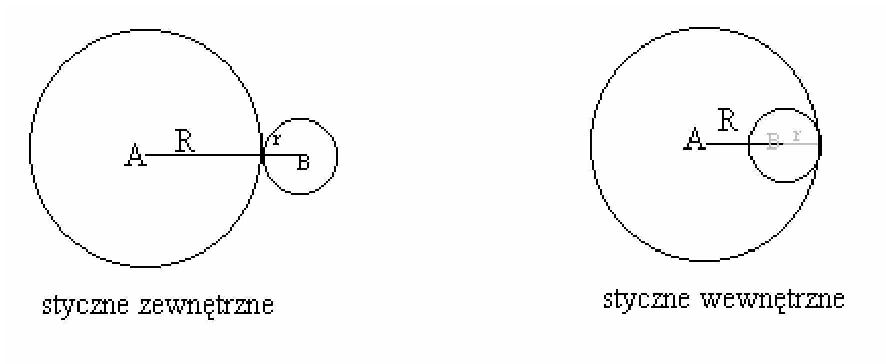
$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ - kąty zewnętrzne wielokąta

IV. Okrąg

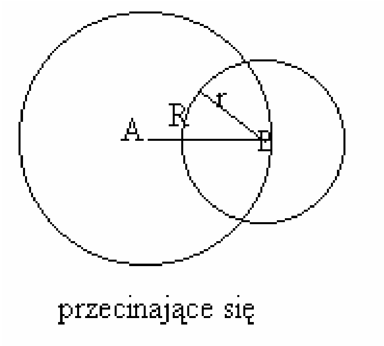
1. Wzajemne położenie dwóch okręgów.



AB>R+r AB<R-r



AB=R+r AB=R-r

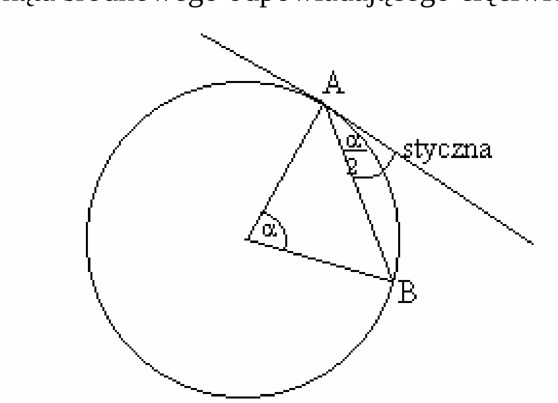


R-r<AB>R+r

2.Twierdzenia o okręgu

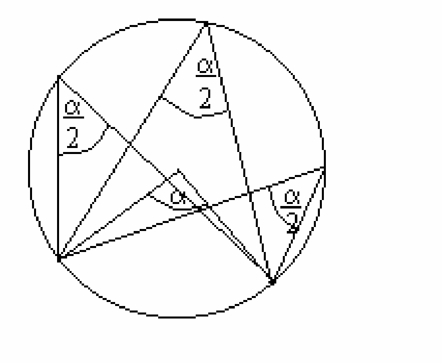
Tw.1 (o kącie między styczną a cięciwą)

Kąt ostry między cięciwą i styczną do okręgu przechodzącą przez koniec cięciwy jest równy połowie kąta środkowego odpowiadającego cięciwie.

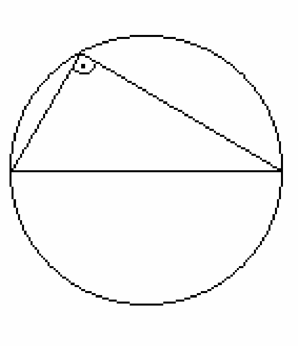


Tw.2 (o kącie środkowym i kątach wpisanych)

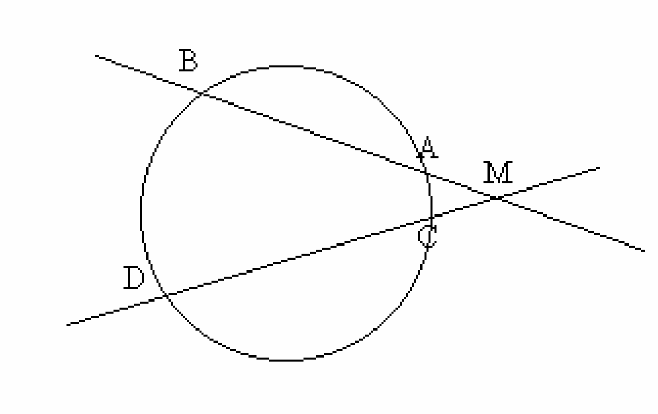
Wszystkie kąty wpisane w okrąg i oparte na tym samym łuku są równe między sobą i równe połowie kąta środkowego opartego na tym łuku.



WNIOSEK:
Jeżeli kąt oparty jest na średnicy to jest prosty.

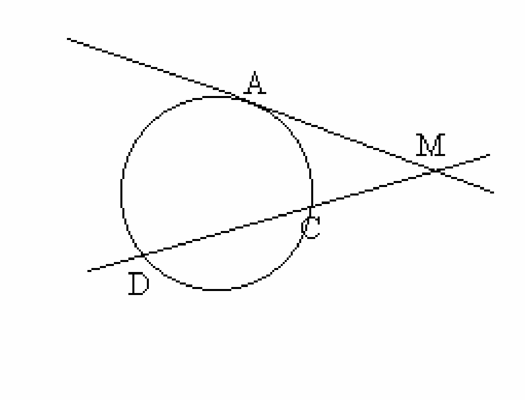


Tw.3
Jeżeli sieczne okręgu przecinają się w punkcie M to iloczyn długości odcinków każdej siecznej zawartych między tym punktem i punktami przecięcia z okręgiem jest stały.



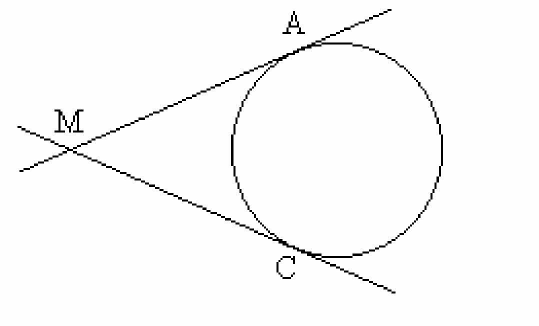
$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

WNIOSEK:
1)



$$MA^2 = MC \cdot MD$$

2)



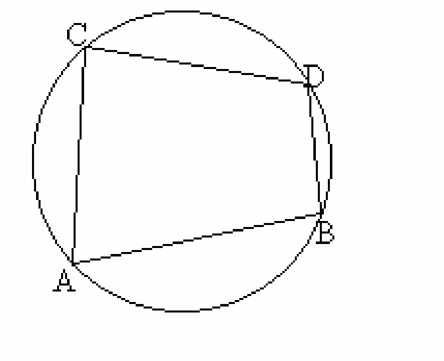
$MA^2 = MC^2$

$\Downarrow$

$MA=MC$

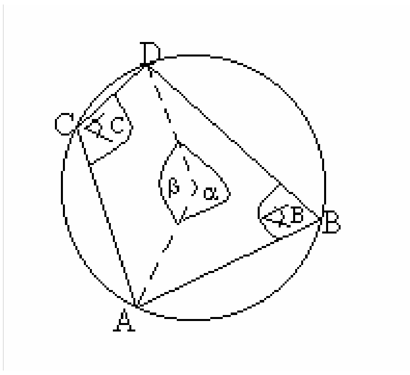
Tw.4

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to aby czworokąt można było wpisać w okrąg jest równość sum przeciwległych kątów czworokąta.



$\angle A + \angle D = \angle B + \angle C$

D.



$\beta = 2\angle B$

$\alpha = 2\angle C$

$\alpha + \beta = 2(\angle B + \angle C)$

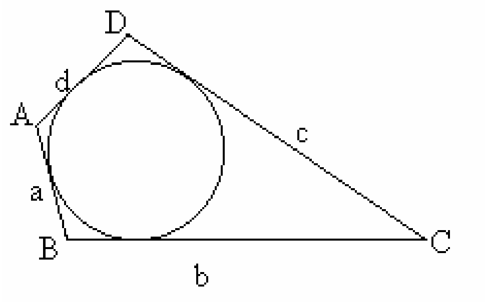
$360^0 = 2(\angle B + \angle C)$

$180^0 = \angle B + \angle C$

$\angle A + \angle D = \angle C + \angle B \qquad C.N.D.$

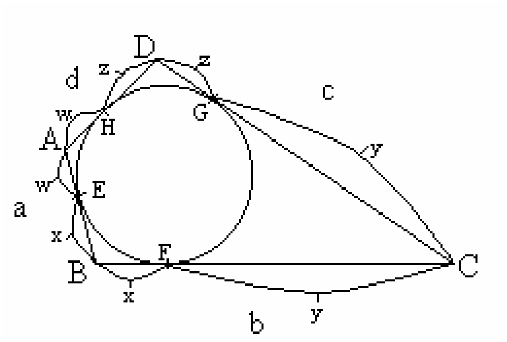
Tw.5

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to aby czworokąt można było opisać na okręgu jest równość sum długości przeciwległych boków czworokąta.



a+c=b+d

D.



Oznaczmy punktami E,F,G,H punkty styczności okręgu z bokami czworokąta.
Niech BF = x na mocy wniosku do twierdzenia zachodzi:

BE = x

analogicznie

CF = CG = y
DG = DH = z
AH = AE =w

BC = BF + FC= x+ y AB = AE + EB = w + x
AD = AH + HD = w + z CD = CG + GD = y+ z

AD + BC = x + y + z + w AB + CD = x + y + w + z

$$\Downarrow$$

AB + CD = AD + BC
a + c = d + b

C.N.D.

<u>Temat:</u> Przekształcenia geometryczne.

I. WSTĘP.

<u>Def</u>. Przekształceniem geometrycznym nazywamy funkcję przekształcającą zbiór punktów płaszczyzny α, na zbiór punktów płaszczyzny α.

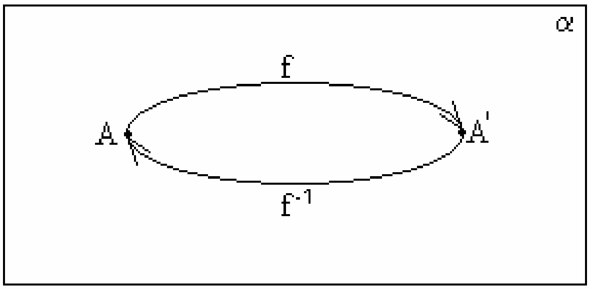
$$\mathbf{f:\alpha \to \alpha}$$

<u>Def</u>. Przekształcenie geometryczne jest funkcją przyporządkowującą każdemu punktowi $A \in \alpha$ dokładnie jeden punkt $A' \in \alpha$. Punkt A' nazywamy obrazem punktu A w przekształceniu f (A) = A'.
<u>Def</u>. Przekształceniem tożsamościowym nazywamy przekształcenie przyporządkowane każdemu punktowi $A \in \alpha$ ten sam punkt.

$$\mathbf{A \in \alpha \quad f(A) = A}$$

<u>Def.</u> Punkt $A \in \alpha$ nazywamy stałym w przekształceniu f jeśli f (A) = A.
<u>Def.</u> Przekształcenie geometryczne f nazywamy wzajemnie jednoznacznym jeśli jest różnowartościowe i „ na". Jeśli f jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym to istnieje przekształcenie f^{-1} odwrotne do danego.

$$\mathbf{A \in \alpha \qquad f(A) = A' \Leftrightarrow f^{-1}(A') = A}$$



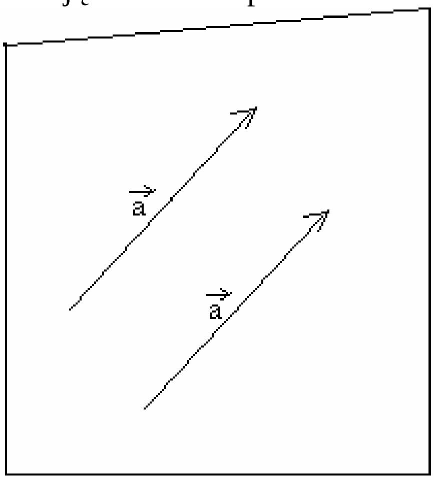
<u>Def.</u> Niech dane będą przekształcenia f i g płaszczyzny α. Weźmy dowolne A ∈ α, niech f(A) = A’ i g(A) = A” przekształcenie, które punktowi przyporządkowuje punkt A” nazywamy złożeniem przekształcenia f i g.

(gf)(A) = g[f (A)] = A”

II. Przekształcenia geometryczne.

1.

<u>Def.</u> Przesunięciem (translacją) o wektor $\vec{a}$ nazywamy przekształcenie geometryczne przyporządkowujące każdemu punktowi A ∈ α taki punkt A’ ∈ α, że $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$.

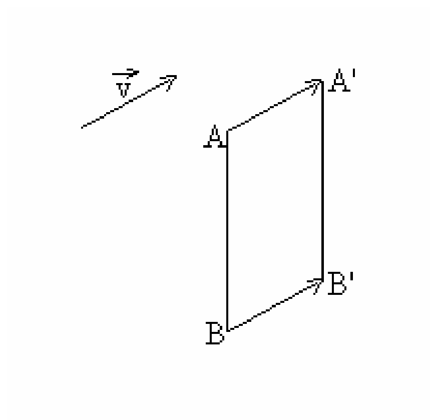


Przykład:

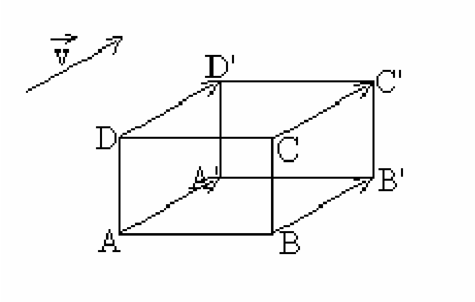
1. Znajdź obraz : a - odcinka
   b - prostokąta
   c - okręgu

w translacji o wektor $\vec{v}$.

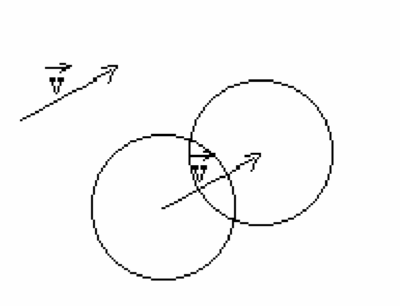
a -



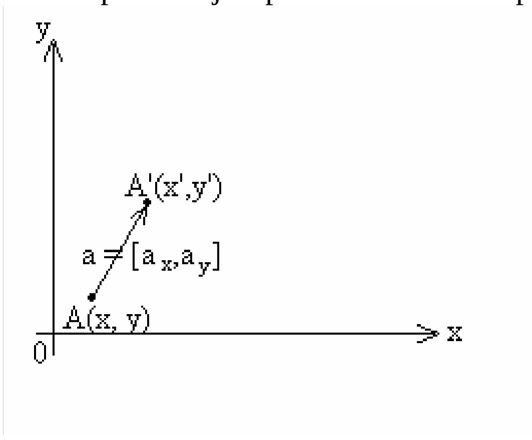
b -



c -



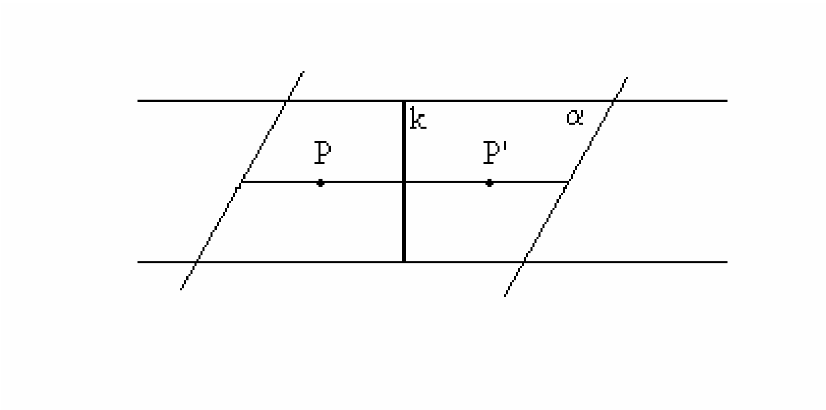
2. Jeśli punkt A jest punktem układu współrzędnych to:



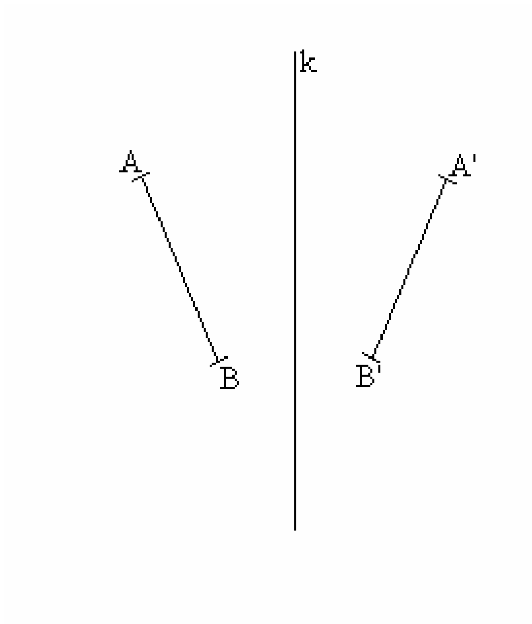
2.

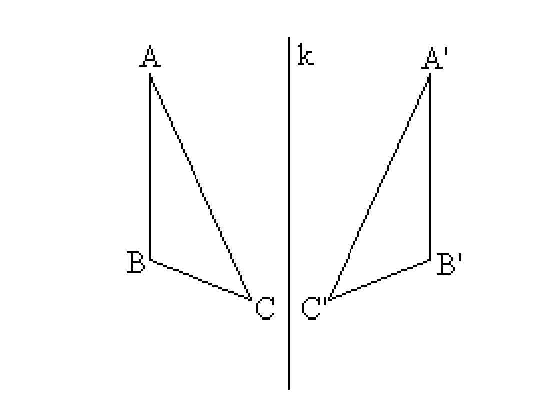
Def. Symetrią osiową (symetrię względem prostej k) nazywamy przekształcenie geometryczne przyporządkowujące , każdemu punktowi P∈ α punkt P' ∈ α leżący na prostej prostopadłej do k przechodzącej przez punkt P w tej samej odległości od prostej k co punkt P lecz po przeciwnej stronie.

Piszemy: $S_K(P) = P'$



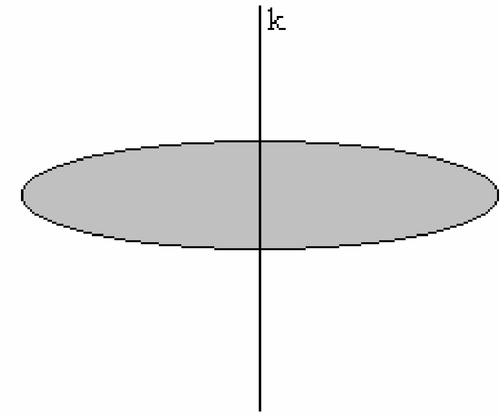
PRZYKŁAD: Znajdź obraz odcinka, trójkąta w symetrii względnej prostej.



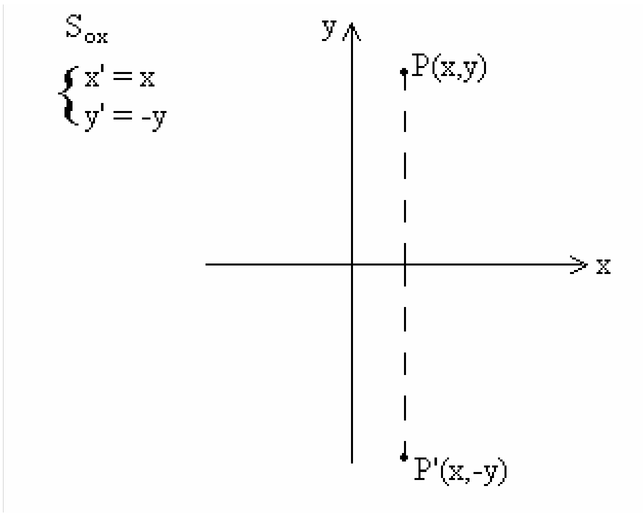


Def. Prostą k nazywamy osią symetrii figury f jeśli przekształcając tę figurę w symetrii osiowej otrzymamy tę samą figurę.

$$S_K(F) = F$$

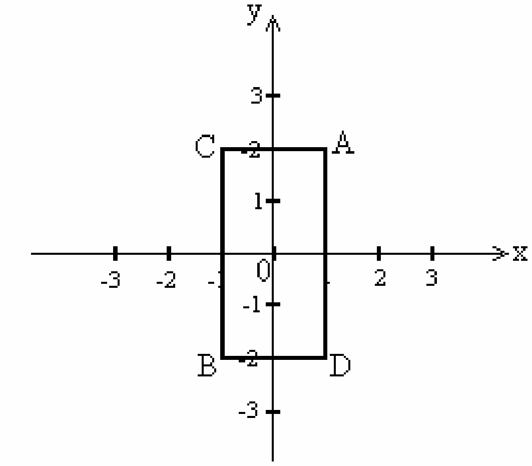


a) symetria osiowa w układzie współrzędnych

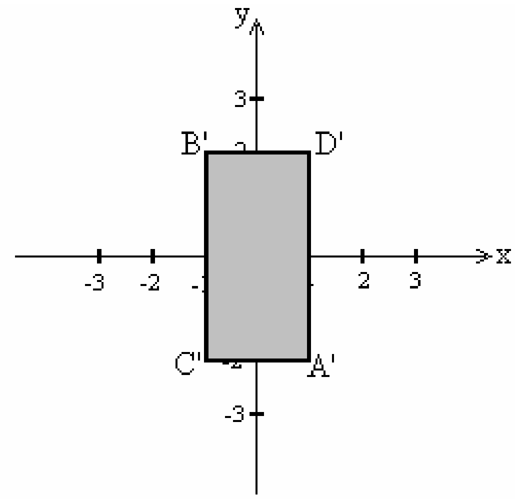


ZADANIE:

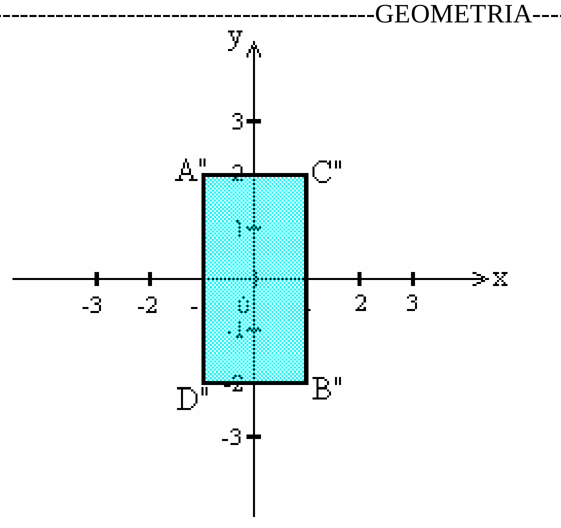
Dany jest czworokąt o wierzchołkach A(1,2), B(-1,-2), C(-1,2), D(1,-2). Wyznaczyć obraz tego czworokąta względem osi a) OX, b) OY i c) prostej k : x = y.



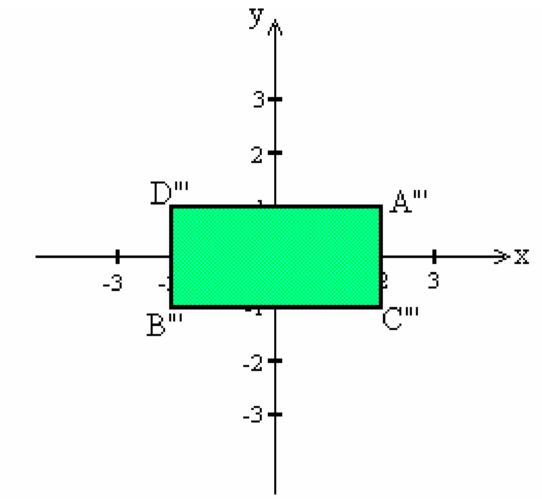
a)



b)



c)



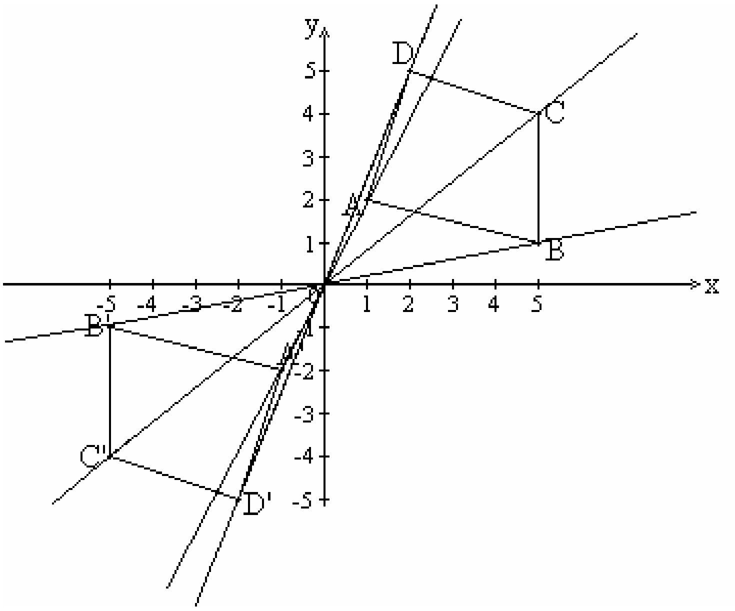
Def. Symetrią środkową (symetrią względem punktu 0) nazywamy przekształcenie przyporządkowujące każdemu punktowi P $\in$ α punkt P', leżący na prostej 0P, po przeciwnej stronie niż punkt P, punkt 0 i oznaczamy S_0:

$$S_0(P) = P'$$

Def. Punkt 0 nazywamy środkiem symetrii figury, jeśli $S_0(F) = F$

PRZYKŁAD:

Znajdź obraz czworokąta ABCD o współrzędnych A(1,2), B(5,1), C(5,4), D(2,5).



OBRÓT

Def. Obrotem płaszczyzny dookoła punktu 0 o kąt skierowany α nazywamy przekształcenie płaszczyzny przyporządkowujące 1) punktowi 0 punkt 0

2) punktowi $X \neq 0$, taki punkt X', że: 0X = 0X' oraz X0X'= $\angle\alpha$ i piszemy

$O_0^{\vec{\alpha}}(X) = X'$

Punkt 0 nazywamy środkiem obrotu, a kąt α kątem obrotu.

UWAGA 1!

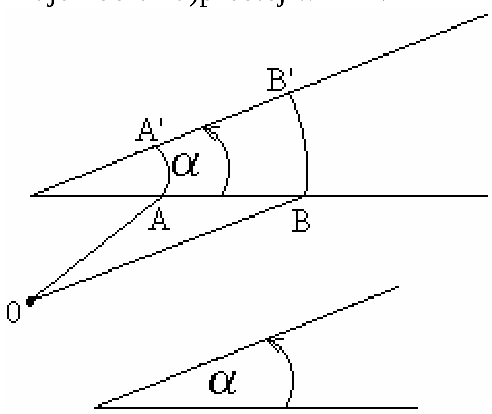
Jeżeli α jest kątem zerowym lub pełnym to $O_0^{\vec{\alpha}}$ jest odwzorowaniem tożsamościowym (odwzorowaniem zerowym płaszczyzny).

UWAGA 2!

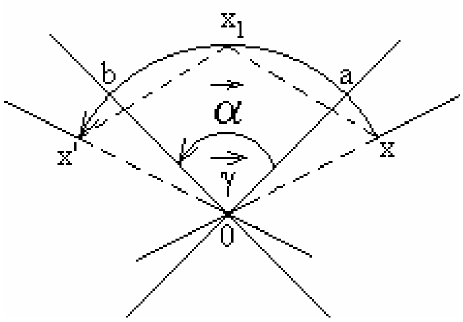
Jeżeli $\alpha = 180^\circ$ to $O_0^{\vec{\alpha}}$ jest symetrią środkową. Znajdź obraz a) prostej, b)prostokąta $O_0^{\vec{\alpha}}$.

PRZYKŁAD:

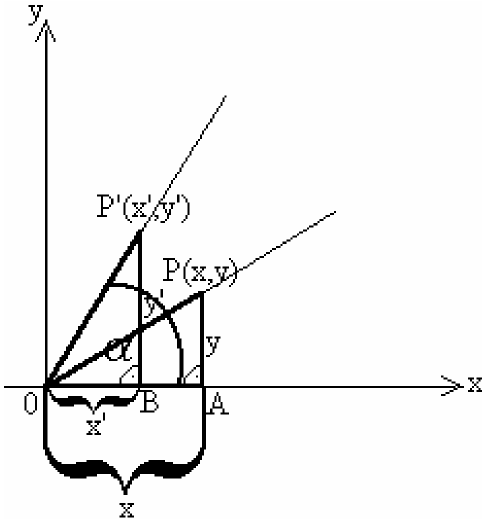
Znajdź obraz a)prostej w $O_0^{\vec{\alpha}}$.



Tw. Złożenie SbSa dwóch symetrii osiowych względem prostych a i b, przecinających się w punkcie 0 pod kątem $\vec{\gamma} = \angle(\vec{ab})$, jest obrotem płaszczyzny dookoła punktu 0 o kąt $\vec{\alpha} = 2\vec{\gamma}$.



1)Obrót w układzie współrzędnych.



OP = OP’= r>0

Z Δ OAP: $\cos\gamma = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\gamma$

$$\sin\gamma = \frac{y}{x} \Rightarrow y = r\sin\gamma$$

Z Δ 0BP’: $\begin{cases} x' = r\cos(\gamma+\alpha) \\ y' = r\sin(\gamma+\alpha) \end{cases}$

(*) sin(α+β) = sinαcosβ+cosαsinβ

cos(α+β) = cosαcosβ-sinαsinβ

Podstawiamy do wzoru:

(*) $\begin{cases} x' = r\cos\gamma\cos\alpha - r\sin\gamma\sin\alpha \\ y' = r\cos\gamma\sin\alpha + r\sin\gamma\cos\alpha \end{cases}$

x’= xcos α - ysin α

y’= xsin α + ycos α

PRZYKŁAD: Znajdź obraz wierzchołków trójkąta ABC.

A(1,4), B(3,2), C(1,-1) w obrocie wkoło początku układu współrzędnych o kąt skierowania 90^o.

A’: $\begin{cases} x' = \cos 90^o - 4\sin 90^o \\ y' = \sin 90^o + \cos 90^o \end{cases}$

$\begin{cases} x' = -4 \\ y' = 1 \end{cases}$

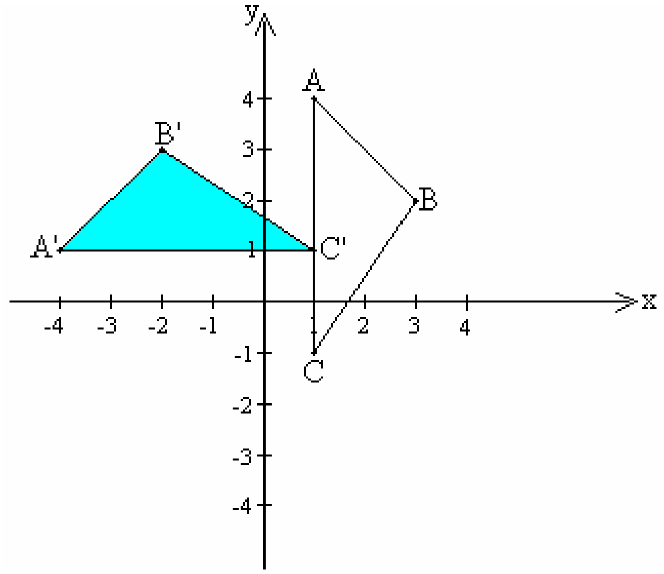
A’=(-4,1)

B’: $\begin{cases} x' = 3\cos 90^o - 2\sin 90^o \\ y' = 3\sin 90^o + 2\cos 90^o \end{cases}$

B’=(-2,3)

C’: $\begin{cases} x' = \cos 90^o + \sin 90^o \\ y' = \sin 90^o - \cos 90^o \end{cases}$

C’=(1,1)



2)Jednokładność.

Def. Jednokładnością o środku 0 i skali S≠0 nazywamy przekształcenie płaszczyzny, które dowolnemu punktowi X przyporządkowuje X’ taki, że $\overrightarrow{0X'} = S\overrightarrow{0X}$.

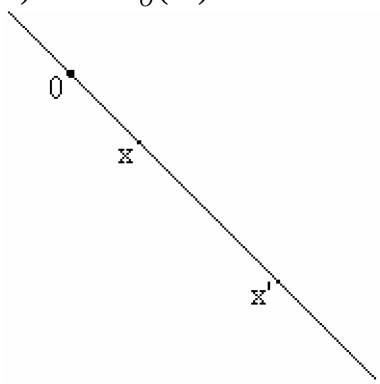
Def. Niech S będzie danym punktem, k liczbą rzeczywistą różną od 0.Jednokładnością o środku S i skali k nazywamy przekształcenie płaszczyzny, które punktowi X przyporządkowuje punkt X’ taki, że: $\overrightarrow{SX'} = k\overrightarrow{SX}$.

Jednokładność o środku S i skali k oznaczamy

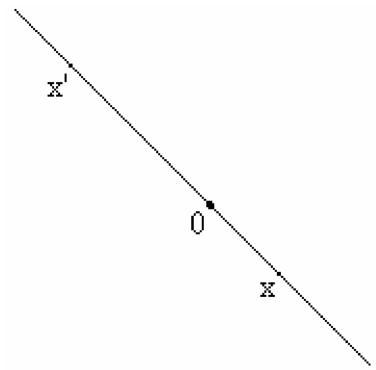
$$J_S^k(X) = X' \Leftrightarrow \overrightarrow{SX'} = k\overrightarrow{SX}$$

PRZYKŁAD:

1) k=3 $J_O^3(X) = X'$



2) k=-2 $J_o^{-2}(X) = X'$



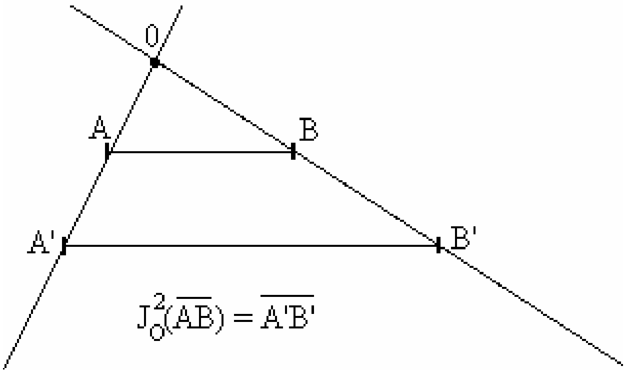
Własności jednokładności.

--GEOMETRIA---

1.Przekształcenie odwrotne do jednokładności skalii S jest jednokładnością o skalii $\frac{1}{S}$.

2.Jednokładność zachowuje równoległość prostych.
3.Jednokładność zachowuje współliniowość i uporządkowanie punktów.
4.Jednokładność przekształca kąt w kąt przystający do danego oraz skierowany w równy mu kąt skierowany w równy mu kąt skierowany.
5.Jednokładność zachowuje stosunek odcinków.
6.Jednokładność zachowuje stosunek odcinków.

ZADANIE 1:
Znaleźć obraz odcinka w jednokładności o środek 0 i skali k=2.



ZADANIE 2:

Znaleźć obraz trójkąta ABC w jednokładności o środku 0 i skali k=$-\frac{1}{2}$.

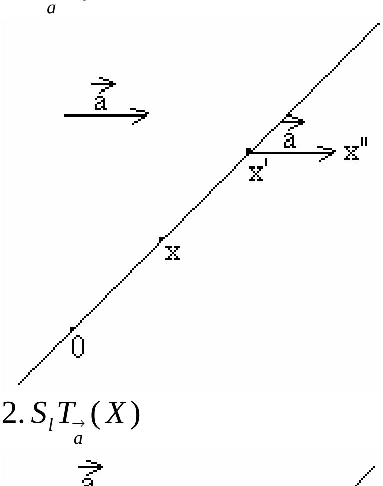
III.SKŁADANIE PRZEKSZTAŁCEŃ

Def. Niech dane będą przekształcenia f i g płaszczyzny α. Weźmy dowolne A∈α, niech f(A)=A' i g(A')=A" przekształcenie, które punktowi A' przyporządkowuje punkt A" nazywamy złożeniem przekształcenia f i g.

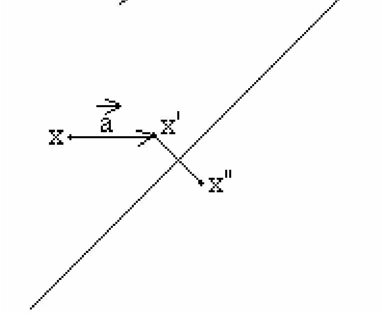
(gf)(A)=g[f(A)]=A

PRZYKŁAD:

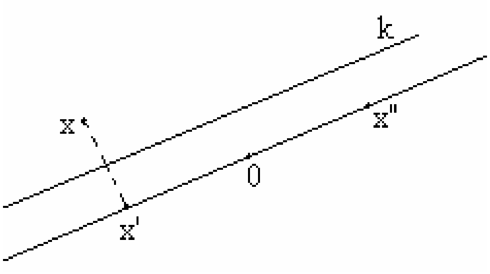
1. $T_{\vec{a}} J_o^2 (X)$



2. $S_l T_{\vec{a}} (X)$



3. $S_o S_k (X)$



4. $J_{o}^{\frac{1}{2}} S_{k}(A)$

5. $T_{\vec{a}} 0_{o}^{\alpha}(Z)$

6. $J_{B}^{3} S_{K} T_{\vec{a}} 0_{A}^{\alpha}(X)$

Temat: Twierdzenie Talesa.

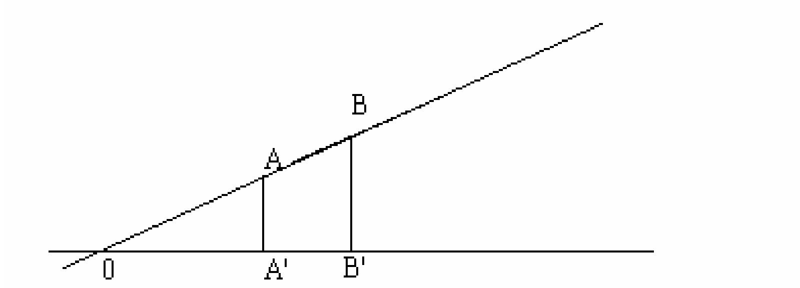
Def. Stosunkami odcinków nazywamy liczbę równą ilorazowi długości tych odcinków.

$$\frac{\left|\overline{AB}\right|}{\left|\overline{CD}\right|} = \frac{AB}{CD} = \mathrm{k} \quad ; \ \mathrm{k} \in \mathrm{R}$$

Def. Mówimy ,że odcinki $\left|\overline{AB}\right|$ i $\left|\overline{CD}\right|$ są proporcjonalne do odcinków $\left|\overline{A'B'}\right|$ i $\left|\overline{C'D'}\right|$ gdy :

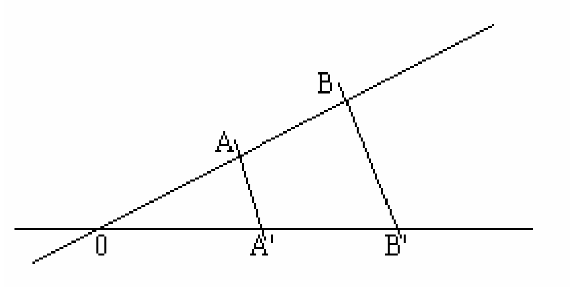
$$\frac{\left|\overline{AB}\right|}{\left|\overline{A'B'}\right|} = \frac{\left|\overline{CD}\right|}{\left|\overline{C'D'}\right|}$$

Tw. (Talesa) Jeżeli dwie proste l i l' przecinające się w punkcie 0 zostaną przecięte prostymi a,b nie przechodzącymi przez punkt 0 i równoległymi ,to odcinki wyznaczone przez punkt 0 i proste a,b na prostej i są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez punkt 0 i proste a,b na prostej l'.



$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$$

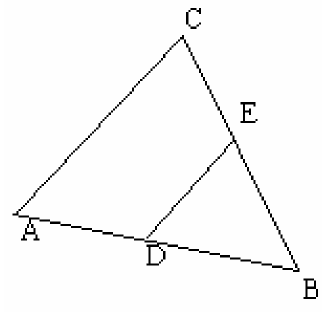
Twierdzenie odwrotne do tw Talesa.
Jeżeli ramiona kąta płaskiego przetnie się dwiema prostymi o długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do długości odpowiednich odcinków na drugim ramieniu kąta ,to proste te są równoległe.



$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$$

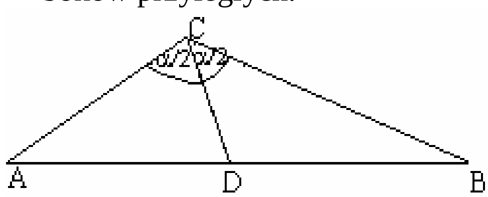
WNIOSKI:

1) Prosta równoległa do jednego boku trójkąta i przecinająca pozostałe dwa jego boki ,odcina z tego trójkąta , trójkąt o bokach proporcjonalnych do boku danego trójkąta.
2) Odcinek łączący środki boków trójkąta ma długość równą połowie długość trzeciego boku.



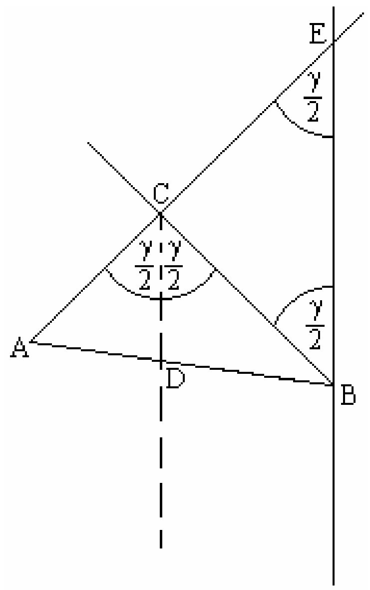
DE=$\frac{1}{2}$ AC

3) W trójkącie dwusieczna kąta wewnętrznego dzieli bok przeciwległy na odcinki proporcjonalne do boków przyległych.



$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$$

D.



$$\frac{AC}{AE} = \frac{AD}{AB}$$

Trójkąt BCE jest równoramienny ,zatem

CB = EC

$$\frac{AC}{EA} = \frac{AD}{AB}$$

$$\frac{AC}{AC + CE} = \frac{AD}{AD + BD}$$

AD(AC + CE) = AC(AD + DE)

AD·AC + AD·CE = AC·AD + AC·DE

ADCE = ACDE

ADBC = ACDE

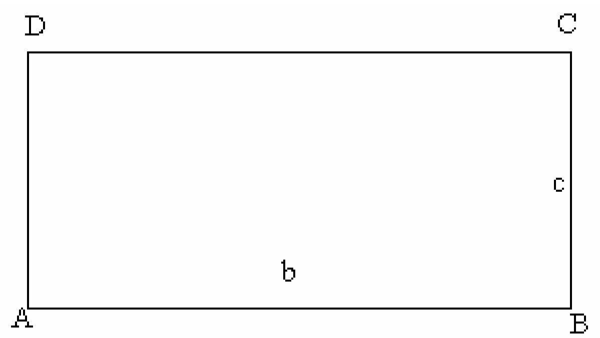
$$AD = \frac{ACDB}{BC} \quad /: DB$$

$$\frac{AD}{DBAC} = \frac{AC}{BC}$$

C.N.D.

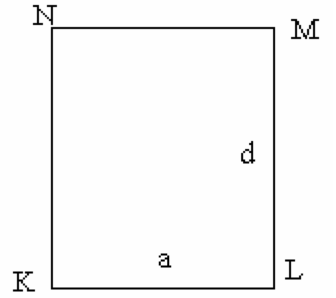
Zadanie 1.
Mając dane odcinki o długości a,b,c podaj opis konrukcji prostokąta, którego jeden z boków ma długość a, zaś jego pole jest równe polu prostokąta o bokach długości b,c.

Niech ABCD będzie danym prostokątem o bokach długości b i c, KLMN prostokątem, który mamy skonstuować.

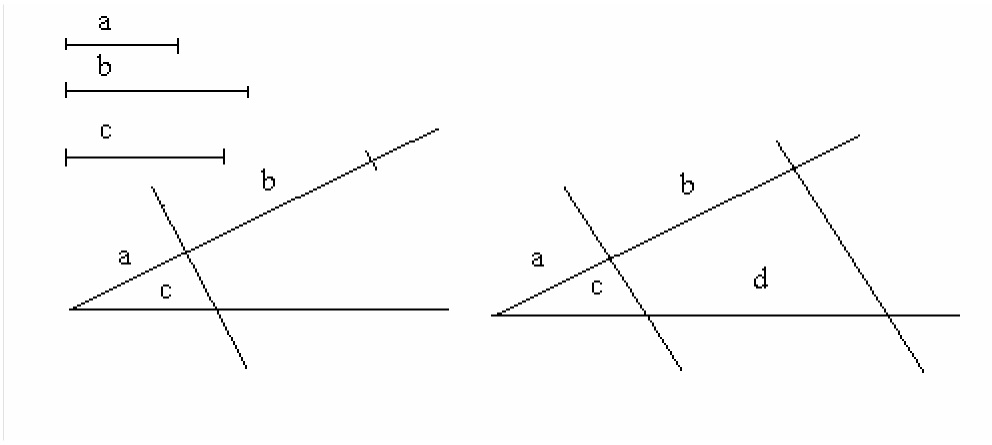


Poszukiwany prostokąt skonstruujemy, jeśli skonstruujemy odcinek o długości d taki, że:
ad = bc,
czyli

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

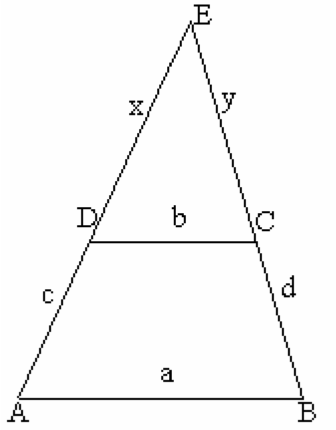


Zgodnie z powyższym warunkiem wystarczy skonstruować odcinek o długości d czwarty proporcjonalny do trzech odcinków danych. Konstruując odcinek o długości d wykorzystujemy tw. Talesa.
Konsruujemy odcinek o długości d czwarty proporcjonalny do odcinków o długości s,b,c.
konstruujemy prostokąt o bokach długości a,d.



Zadanie 2.

Podstawy trapezu mają długości a i b, zaś jego ramiona długości c i d.Oblicz długości x,y przedłużeń obu ramion trapezu do ich punktu przecięcia. Wykonaj obliczenia dla a=1,8 , b=1,2 , c=1,5 , d=1,2.



$$\begin{cases} \dfrac{y}{d} = \dfrac{x}{c} \\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{c+x}{x} = \dfrac{d+y}{y} \end{cases}$$

$$y = \frac{x}{c} \cdot d$$

$$x = \frac{(c+x)b}{a} \Rightarrow xa = cb + xb \Rightarrow xa - xb = cb \Rightarrow x(a-b) = cb \Rightarrow x = \frac{cb}{a-b}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{cb}{a-b} \\ y = \dfrac{x}{c} \cdot d \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1{,}5 \cdot 1{,}2}{1{,}8 - 1{,}2} = \dfrac{1{,}8}{0{,}6} = 3 \\ y = \dfrac{3}{1{,}5} \cdot 1{,}2 = 2{,}4 \end{cases}$$

Odp: Długości x i y wynoszą odpowiednio $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3{,}4. \end{cases}$

Zadnie 3.

Wiemy, że odcinki o długościach odpowiednio a,b,c są proporcjonalne do odcinków odługościach odpowiednio b,c,a. Udowodnij, że a=b=c.

Z deinicji proporcjonalności odcinków $\left(\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{CD}{C'D'} \right)$ otrzymujemy związek:

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a},$

skąd:

$b^2 = ac...i...a^2 = bc,$

$\frac{b^2}{a^2} = \frac{ac}{bc},$

$b^3 = a^3.$

A więc b = a.

Zatem $\frac{a}{b} = 1...i...\frac{b}{c} = 1...i...\frac{c}{a} = 1,$

czyli b=c i c=a, skąd a=b=c.

c.n.d.

Zadanie 4.
W celu zmierzenia w terenie odległości dwóch punktyów A,B oddzielinych przeszkodą (staw) obrano poza tą przeszkodą punkt C, którego odległopść od punktów A i B można zmierzyć. Na odcinkach CA i CB obrano takie punkty D i E, że $\frac{|CD|}{|CA|} = \frac{|CE|}{|CB|} = \frac{2}{5}$ .Ponadto zmierzono odcinek |DE|=78. Oblicz odległośćpunktów A i B.
Odp:Punkty A i B oddalone są od siebie o odcinek |AB|=195.

Zadanie 5.
W celu zmierzenia w terenie odległości punktów A i B, z których punkt A jest niedostępny, obrano punkt C nie leżący na prostej AB. Na odcinku CB wyznaczono punkt D dzielący ten odcinek w stosunku 2:3. Przez D wytyczono prostą równoległą do prostej AB, która przecięła prostą AC w punkcie E. Okazało się, że |DE|=5,4. Oblicz |AB|.
Odp: Odcinek |AB| = 9 lub |AB| = 13,5.

Zadanie 6.
Podstawy trapezu mają długości a i b (a>b). Znaleść długość odcinka łączącego środki przekątnychtego trapezu.
Odp: Odcinek ten ma długość $\frac{a-b}{2}$.

Zadanie 7.
Na jednym ramieniu kąta poczynając od jego wierzchołka odłożono kolejno odcinki o długościach a,b.c. W rzucie równoległym tych odcinków na drugie ramię kąta otrzymano odcinki kolejno o długościach c,a,b. Co powiesz o liczbach a,b,c?
Odp: Odcinki a,b,c są sobie równe (a = b = c).

Zadanie 8.
W trójkącie ABC prosta równoległa do boku AB dzieli ten trójkąt na dwie części o równych polach. W jakim stosunku prosta ta dzieli wysokość trójkąta?
Odp: Prosta ta dzieli wysokość danego trójkąta $1+\sqrt{2}$.

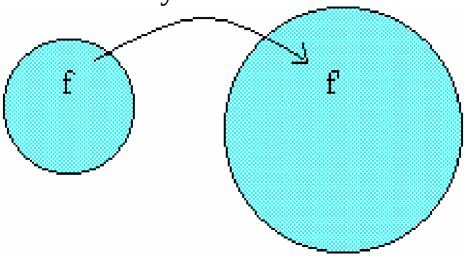
Temat: Podobieństwo.

Def. Podobieństwem P. w skali S (S>0) nazywamy ,każde wzajemne jednoznaczne przekształcenie płaszczyzny ,takie ,że jeżeli P.(X) = X’ i P.(Y) = Y’ ,to X’Y’ =S·XY .

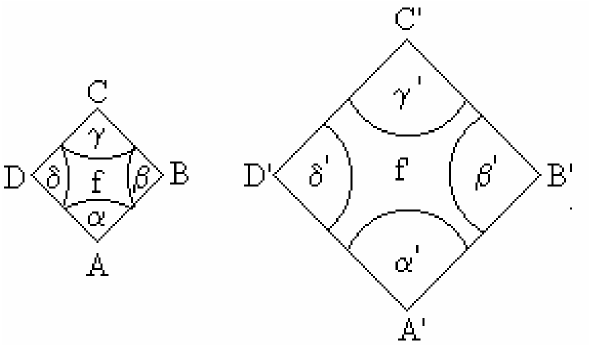
Tw. Każde podobieństwo P^S jest złożeniem jednokładności J^S i izomerii $P^S = J^S$

Własności podobieństwa:
1) Podobieństwo zachowuje stosunek odcinków.
2) Przekształceniem odwrotnym do podobieństwa w skali S jest podobieństwo w skali $\frac{1}{S}$.
3) Złożenie podobieństw w skalii S_1 i S_2 jest podobieństwem skalii $S_1 S_2$.
4) Przekształcenie tożsamościowe jest podobieństwem w skalii S=1.
5) Zbiór wszystkich podobieństw tworzy grupę przekształceń.

Def. Figura f jest podobna do figury f' jeżeli istnieje takie podobieństwo P. ,że P.(f) = f'.
Piszemy wówczas: f ~f'.



I. Podobieństwo wielokątów.
Dwa wielokąty są podobne gdy mają wszystkie kąty przystające (odpowiednie) i boki proporcjonalne (odpowiednie).

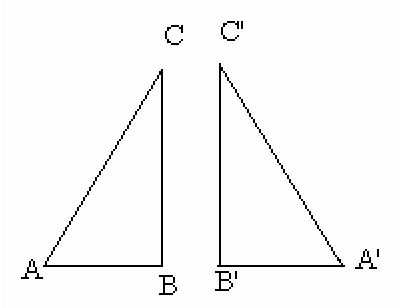


$\alpha = \alpha' \wedge \beta = \beta' \wedge \gamma = \gamma' \wedge \delta = \delta'$

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{A'D'}{AD} = S$

Kąty tych wielokątów są równe.

II.Cechy podobieństwa trójkątów.
1)**Tw.**(cecha bok-kąt-bok)
Dane są dwa trójkąty ABC i A'B'C' . Jeżeli $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \wedge \angle A \equiv \angle A'$, to trójkąty ABC i A'B'C' są podobne .
2)**Tw.** (cecha kąt-kąt-kąt)
Jeżeli $\angle A \equiv \angle A' \wedge \angle B \equiv \angle B', to: \Delta\Delta ABC \cong A'B'C'$.
3)**Tw.** (cecha bok-bok-bok)
Jeżeli dane są dwa trójkąty ABC i A'B'C' i zachodzi: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$,to trójkąty ABC i A'B'C' są podobne.
Tw. (cecha kąt-bok-kąt)Dwa trójkąty są przystające jeśli jeden bok i dwa leżące przy nim kąty w jednym trójkącie są odpowiednio przystające do boków i dwóch leżących przy nim kątów w drugim trójkącie.



Temat: Izometrie. Przystawanie figur. Cechy przystawania figur.

I. Izometrie.

Def. Przekształcenie figury f zachowujące odległości punktów tej figury (tzn. przekształcenie, w którym odległość obrazów dwóch dowolnych punktów figury f jest równa odległości tych punktów) nazywamy przekształceniem izometrycznym figury f.

Izometria jest to przekształcenie płaszczyzny na płaszczyznę zachowujące odległość punktów.

Def. Izometrią nazywamy przekształcenie geometryczne płaszczyzny $f:\alpha\rightarrow\alpha$ spełniające warunki:

1)$f(\alpha)=\alpha$ (funkcja jest „na")

2)j. f(A)=A' A(B)=A'→AB=A'B'

WŁASNOŚCI IZOMETRII.

1)Obrazem prostej jest prosta.

2)Obrazem odcinka jest odcinek.

3)Obrazem figury wypukłej jest figura wypukła.

4)Obrazem koła jest koło.

5)Obrazem wnętrza i zewnętrza danej figury jest wnętrze i zewnętrze danej figury.

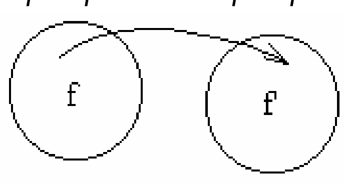
Izometriami są:

- translacja
- symetria osiowa
- obrót
- symetria środkowa

II. Przystawanie figur.

Def. Dwie figury f if' nazywamy przystającymi gdy istnieje izometria przekształcająca jedną figurę na drugą. Piszemy:

$$f \cong f' \quad \vee \quad f \equiv f''$$



WŁASNOŚCI FIGUR PRZYSTAJĄCYCH:

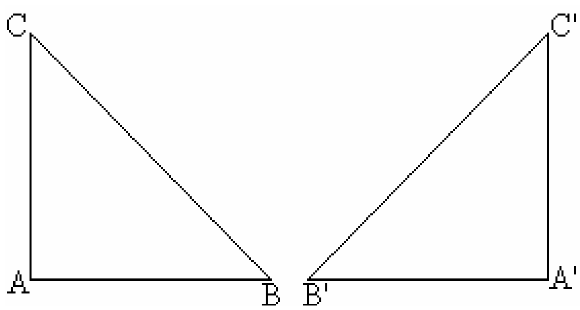
1)Każda figura jest przystająca do siebie samej. $f \equiv f$

2)Jeśli f przystaje do f', to f' przystaje do f. $f \equiv f' \Rightarrow f' \equiv f$

3)Jeśli f przystaje do f' i f' przystaje do f" to f przystaje do f". $f \equiv f' \wedge f' \equiv f'' \Rightarrow f \equiv f''$

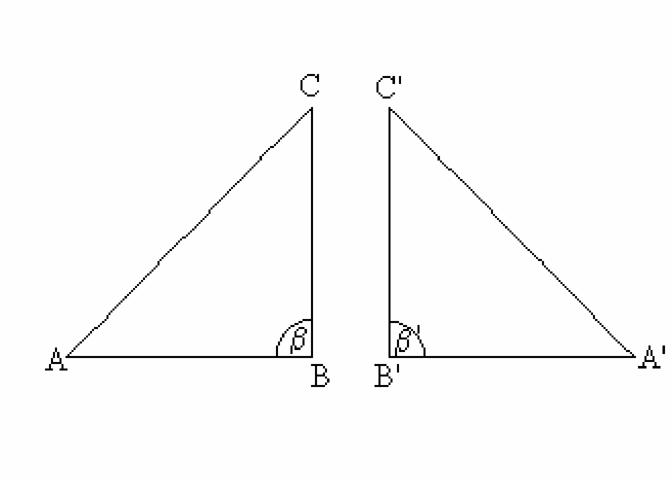
Tw. (cecha BBB)

Dwa trójkąty są przystające jeśli 3 boki jednego trójkąta są odpowiednio równe trzem bokom drugiego trójkąta.



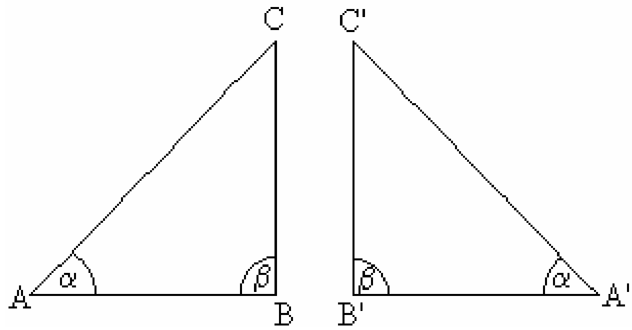
$$AB = A'B \wedge BC = B'C' \wedge CA = C'A'$$

Tw. (cecha BKB)
Dwa trójkąty są przystające, jeśli dwa boki i kąt między tymi bokami w jednym trójkącie są odpowiednio przystające do dwóch boków i kąta między tymi bokami w drugim trójkącie.



$$AB = A'B \wedge BC = B'C' \wedge \angle\beta = \angle\beta'$$

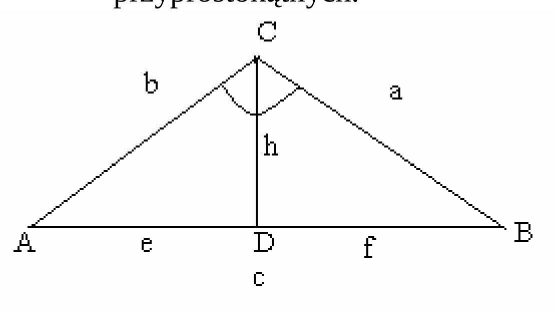
Tw.(cecha KBK)
Dwa trójkąty są przystające, jeśli jeden bok i dwa leżące przy nim kąty w jednym trójkącie są odpowiednio przystające do boków i dwóch leżących przy nim kątów w drugim trójkącie.



$$AB = A'B' \wedge \angle\alpha = \angle\alpha' \wedge \angle\beta = \angle\beta'$$

Temat: Twierdzenie Pitagorasa.

Tw. W trójkącie prostokątnym kwadrat długości przeciwprostokątnych jest równy sumie kwadratów przyprostokątnych.



Δ ABC/ Δ ACD/ Δ BCD (cecha kkk)

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{e} \Rightarrow b^2 = ce \Rightarrow b = \sqrt{ce}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{f}{a} \Rightarrow a^2 = cf \Rightarrow a\sqrt{cf}$$

$$\frac{h}{e} = \frac{f}{h} \Rightarrow h^2 = ef \Rightarrow h = \sqrt{ef}$$

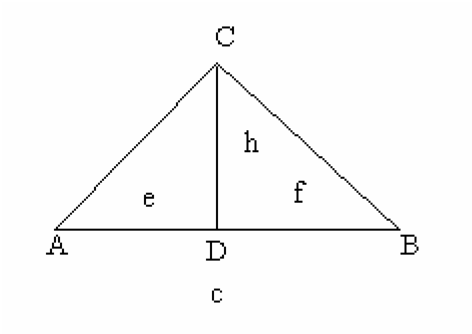
D. $a^2 + b^2 = cf + ce = c(e + f) = cc = c^2$

c.n.d.

Tw. W trójkącie prostokątnym przyprostokątna jest średnią geometryczną przeciwprostokątnej i swojego rzutu na przyprostokątną.

Tw. W trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną jest średnią geometryczną odcinków na którą dzieli przeciwprostokątna.

PRZYKŁAD: W trójkącie prostokątnym ABC ,gdzie kąt ACB jest prostokątny ,dane są rzuty przyprostokątnych na przeciwprostokątną $e=\frac{16}{5}, f=\frac{9}{5}$ .Rozwiąż dany trójkąt.



Dane:

$e=\frac{16}{5}, f=\frac{9}{5} \Rightarrow c=5$

$b=\sqrt{ce}$

$b=\sqrt{5\cdot\frac{16}{5}}=\sqrt{\frac{80}{5}}=\sqrt{16}=4$

$a=\sqrt{cf}$

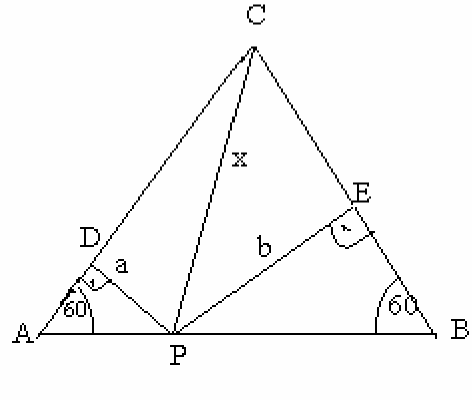
$a=\sqrt{5\cdot\frac{9}{5}}=\sqrt{9}=3$

$h=\sqrt{ef}$

$h=\sqrt{\frac{16}{5}\cdot\frac{9}{5}}=\sqrt{\frac{144}{25}}=\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{25}}=\frac{12}{5}$

Zadanie 1.

Wewnątrz kąta o mierze 60^{o} dany jest punkt P. Odległość punktu P od ramion kąta wynoszą a i b. Oblicz odległość punktu P od wierzchołka tego kąta.



$|\angle ACB|=60^{o}$

$|DP|=a$

$|PE|=b$

$|CP|=x$

Przez punkt P prowadzimy prostą AB tak, by powstały trójkąt ABC był równoboczny: $(|AB|=|AC|=|BC|)$.

z Δ ADP wyznaczamy :

$$AP = \frac{2\sqrt{3}a}{3}; AD = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

z Δ BEP wyznaczamy :

$$|BP| = \frac{2\sqrt{3}b}{3}$$

Stąd :

$$|CD| = |AP| + |BP| - |AD| = \frac{\sqrt{3}}{2}(a + 2b)$$

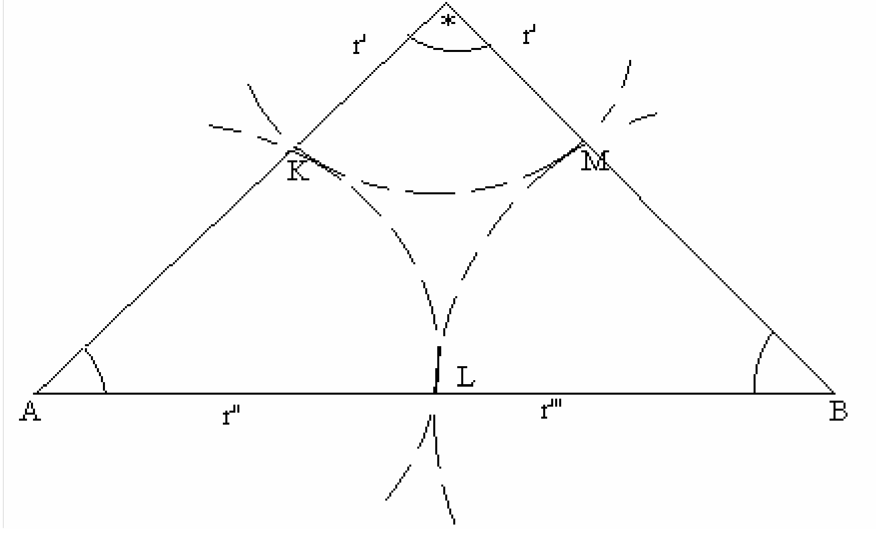
Z tw. Pitagorasa dla Δ CDP mamy :

$$x^2 = |CD|^2 + a^2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}\sqrt{3(a^2 + ab + b^2)}.$$

Odp: Odległość punktu P od wierzchołka C wynosi $x = \frac{2}{3}\sqrt{3(a^2 + ab + b^2)}.$

Zadanie 2

Każde dwa z trzech okręgów są styczne zewnętrznie. Promień jednego okręgu jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych, a środki okręgów są wierzchołkami trójkąta prostokątnego. Oblicz wartość sinusów kątów ostrych tego trójkąta.



Niech r’,r’’,r’’’ będą promieniami danych okręgów i r’’’>r’’>r’ i $r''=\frac{r'+r''}{2}$, wtedy liczby r’,r’’,r’’’w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny rosnący, którego różnica x>o.
Stąd:
r’ = r’ ; r’’ = r ‘+x ; r’’’ = r’+2x.
Ponieważ środki danych okręgów są wierzchołkami trójkąta prostokątnego, więc niech:

$$\begin{cases} a = r'+r'''= 2r'+2x \\ b = r'+r''= 2r'+x \quad \ldots i\ldots a^2 + b^2 = c^2 \\ c = r''+r'''+2r'+3x \end{cases}$$

Z tw. Pitagorasa otrzymujemy równanie:

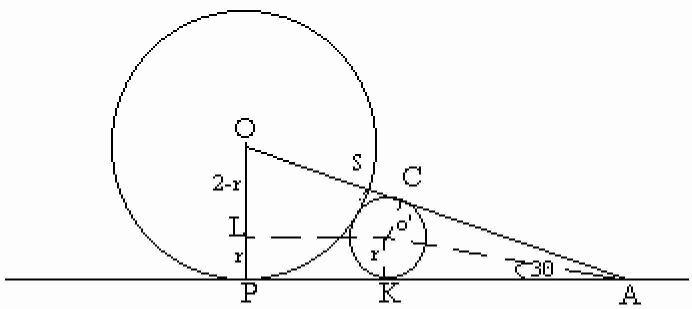
$$(2r'+2x)^2 + (2r'+x)^2 = (2r'+3x)^2 \Leftrightarrow r'^2 = x^2.$$

Stąd:

$$r' = x \Rightarrow \begin{cases} a = 4r' \\ b = 3r' \ldots i \ldots \sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{4}{5} \ldots i \ldots \sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{3}{5}. \\ c = 5r' \end{cases}$$

Odp: Sinusy kątów ostrych wynoszą odpowiednio $\sin\alpha = \frac{4}{5} \ldots i \ldots \sin\beta = \frac{3}{5}$.

Zadanie 3.
Prosta styczna w punkcie P do okręgu o promieniu 2i półprosta wychodząca ze środka okręgu mająca z nim punkt wspólny S przecinają się w punkcie A pod kątem o mierze 60^o. Znajdź długość r promienia okręgu stycznego do odcinków AP,AS,i łuku PS.
|OP|=2 ; |<PAO|= 60^o



Przyjmując oznaczenia jak na rysunku zauważmy, że:
|OO’|=2+r;|OL|=2-r;|LO’|=|PK|;|<KAO’|= 30^o
Stosując tw. Pitagorasa do Δ OLO’ mamy:

$$|PK|^2 = (2+r)^2 - (2-r)^2, skad \ldots |PK| = 2\sqrt{2r}$$

w Δ OPA : $|AP| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$;

W Δ O’KA: $|AK| = r\sqrt{3}$

Korzystając z równości:
|PK|+|AK|=|AP|
otrzymujemy równanie:

$$2\sqrt{2r} + \sqrt{3}r = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

którego rozwiązanie r$\in$(0;2) stanowi odpowiedz.

Odp: Promień okręgu wynosi $r = \frac{2}{3}(3 - 2\sqrt{2})$.

Zadanie 4.

Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Długość jednej z przyprostokątnych wynosi 6. Oblicz długość pozostałych boków oraz długość wysokości względem przeciwprostokątnej.
Odp: Pozostałe boki mają długość odpowiednio 8 i 10, a wysokość h = 4,8 (lub 4,5 , 7,5 i 3,6)

Zadanie 5.
W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długość 6 i 8. Na krótszej przyprostokątnej AC jako na średnicy, zbudowano okrąg. Obliczyć długość odcinków, na jakie okrąg ten podzielił przeciwprostokątną.
Odp: Odcinki te wynoszą odpowiednio 3,6 i 6,4.

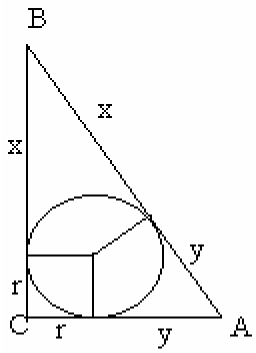
Zadanie 6.
W prostokącie połączono środki sąsiednich boków otrzymując romb, którego obwód jest równy 20 a pole 24. Oblicz długość boków prostokąta.
Odp: Boki te mają odpowiednio x = 6 i y = 8.

Zadanie 7.
Na okręgu opisano trapez prostokątny. Obliczyć pole trapezu jeżeli wiadomo, że odległość środka okręgu od końców ramienia pochyłego są równe 2 i 4.
Odp: Pole trapezu jest równe P = 14,4.

Zxadanie 8.
W kole o promieniu 5 poprowadzono dwie równoległe cięciwy oddalone od siebie o 1. Obliczyć długość cięciw wiedząc, że różnica ich długości wynosi 2.
Odp: Cięciwy mają odpowiednio 6 i 8.

Temat: Trójkąty. Punkty szczególne.

PRZYKŁAD: Udowodnij ,że w trójkącie prostokątnym punkt styczności koła wpisanego dzieli przeciwprostokątną na dwa odcinki takie ,że iloczyn ich długości jest równy polu tego trójkąta.



$$x^2 + 2xr + r^2 + y^2 + 2yr + r^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$2xy + 2r^2 + 2yr = 2xy \backslash :2$$
$$xr + r^2 + yr = xy$$

$$P=\frac{a\cdot b}{2}$$

$$P=\frac{(x+r)\cdot(y+r)}{2}$$

$$P=\frac{1}{2}\cdot(xy+xr+yr+r^2)$$

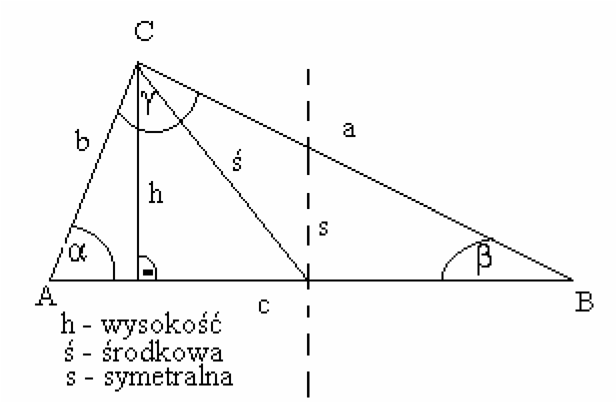
$$(x+r)^2+(y+r)^2=(x+r)^2$$

$$P=\frac{1}{2}(xy+xy)$$

$$P=xy$$

c.n.d.

Punkty szczególne w trójkącie:



1)Trzy symetralne boków przecinają się w jednym punkcie ,który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.
2)Trzy dwusieczne kątów wewnętrznych przecinają się w jednym punkcie ,który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.
3)Dwie dwusieczne kątów zewnętrznych trójkąta oraz dwusieczna kąta wewnętrznego nie przylegającego do tych kątów ,przecinają się w jednym punkcie ,który jest środkiem okręgu dopisanego.(każdy trójkąt ma trzy takie okręgi)
4)Trzy środkowe przecinają się w jednym punkcie zwanym środkiem ciężkości trójkąta. Punkt ten dzieli je w stosunku 2:1.
5)Trzy wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie zwanym ortocentrum trójkąta.

Tw. Suma kątów wewnętrznych w trójkącie wynosi 180^o.

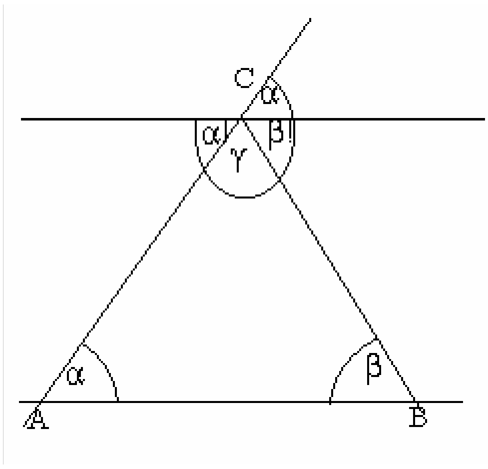
$\alpha+\beta+\gamma=180^o$

$<\alpha' = <\alpha$

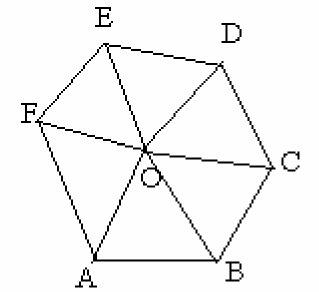
$<\beta' = <b$

$\alpha'+\beta'+\gamma'=180^o$

$\alpha+\beta+\gamma=180^o$



6)Suma kątów wewnętrznych n-kąta wynosi 360^{o}



$n \cdot 180^{o} - 360^{o} = 180^{o}(n-2)$

7)Kąt zewnętrzny jest równy sumie kątów wewnętrznych do niego nie przylegających.

Temat: Konstrukcje geometryczne.

Rozwiązanie zadania konstrukcyjnego składa się z następujących etapów:

-analiza

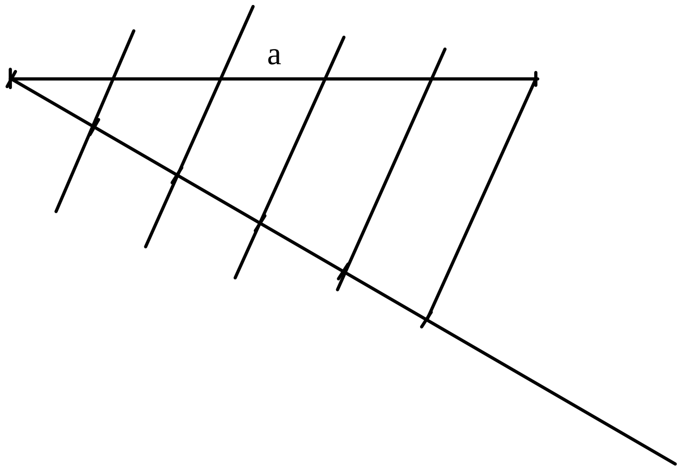
-konstrukcja

-dowód

-dyskusja.

PRZYKŁAD:

Dany odcinek *a* podzielić na pięć równych części.



OPIS KONSTRUKCJI:

1.Konstrułujemy dowolną prostą i odmierzamy na niej dany odcinek *a*

2.Kreślimy prostą przechodzącą przez jeden z końców danego odcinka
i nachyloną pod dowolnym kątem do tego odcinka.

3.Od punktu przecięcia się prostej z odcinkiem odmierzamy cyrklem na
prostej dowolną długość pięć razy.

4.Koniec ostatniego piątego odcinka łączymy z końcem danego odcinka *a* i powstaje pomocniczy odcinek *k*.

5.Z każdego końca pięciu skonstruowanych wcześniej odcinków prowadzimy w kierunku odcinka *a* proste równoległe do odcinka *k* .

PRZYKŁAD:

Zbudować odcinek o długości $x = \sqrt{2a^2 - b^2}$ mając dane *a* i *b*.
Wskazówka: korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.
OPIS KONSTRUKCJI:

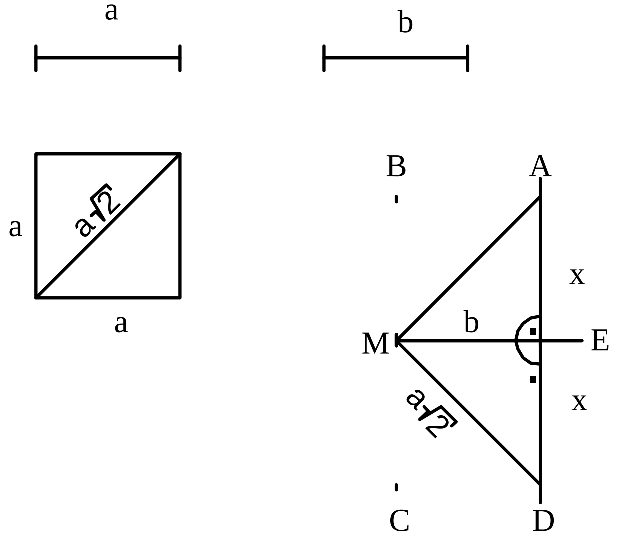
1.Rysuję kwadrat o boku *a* ,przekątna kwadratu jest równa $a\sqrt{2}$

2.Na dowolnej prostej odkładam odcinek EM o długości *b*.

3.Konstrułujemy proste prostopadłe *c, d* przechodzące przez końce odcinka EM.

4.W końcach odcinka EM odkładamy odcinki o długości $a\sqrt{2}$ .Punkty przecięcia się tego odcinka z prostymi *c* ,*d* oznaczamy przez A,B,C,D. Odcinki BM, MC, AE, DE są to szukane odcinki o długości *x*.

dane



DYSKUSJA: Jeżeli $2a^2 - b^2 > 0$ -to istnieją cztery rozwiązania,

$2a^2 - b^2 < 0$ -nie ma rozwiązania

$2a^2 - b^2 = 0$ -istnieje jedno rozwiązanie.

PRZYKŁAD:

Dane są trzy odcinki o długościach p., q, r. Znaleźć odcinek o długości x spełniający warunek: $p \div q = r \div x$.

OPIS KONSTRUKCJI:

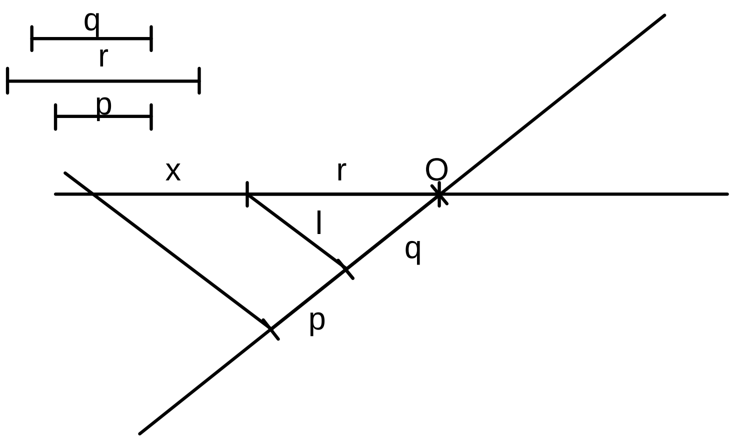
1.Rysujemy dwie proste przecinające się w punkcie O

2.Na jednej z prostych odkładamy odcinek o długości p i q po obu stronach punktu O. Na drugiej prostej odkładamy odcinek o długości r i początku w punkcie O po obu stronach punktu O.

3.Przez końce odcinka p i q prowadzimy prostą l.

4.Rysujemy prostą równoległą do prostej l w końcu odcinka q.

dane



ZADANIE1.

Znaleźć zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, z których dany odcinek AB widać pod pewnym kątem α.

ODP: wskazówka-korzystamy z twierdzenia o kątach wpisanych w okrąg opartych na tym samym łuku.

Jeżeli $\alpha \in <0, 90) \cup (90, 180)$ wtedy istnieją dwa rozwiązania,

jeżeli $\alpha = 90$ to istnieje jedno rozwiązanie.

ZADANIE 2.

Zbudować trójkąt ABC mając dane długości boków AB AC oraz długość środkowej AD.

ODP: wskazówka -szukany trójkąt jest połową równoległoboku.

Istnieją cztery rozwiązania, gdy długość dowolnego odcinka jest mniejsza od sumy długości dwóch pozostałych; w przeciwnym razie brak rozwiązania.

ZADANIE 3.

Dany jest odcinek jednostkowy. Zbudować odcinki o długości $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{2}$.

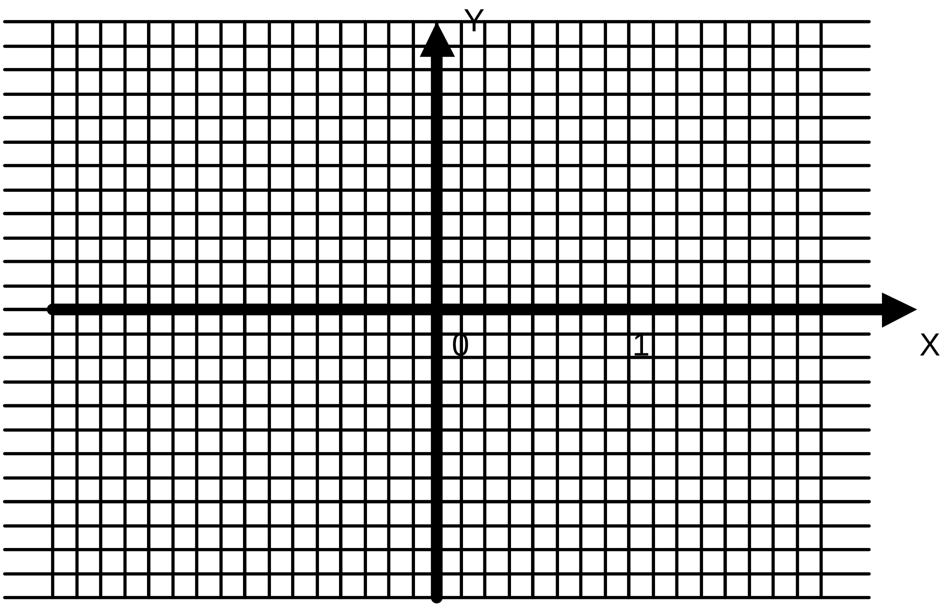
ZADANIE 4.

Dane są dwa punkty A, B odległe o 5cm. Zbudować okrąg o promieniu 4cm przechodzący przez te punkty.

ZADANIE 5

.Mając dane odcinki a i b zbudować odcinek o długości $\sqrt{a \cdot b}$

Temat: Miara Jordana.



Zbiór wszystkich kwadratów numerujemy siecią zerową i oznaczamy K_0

Pole pojedynczego kwadratu jest równe P= $1 = \frac{1}{2^0}$

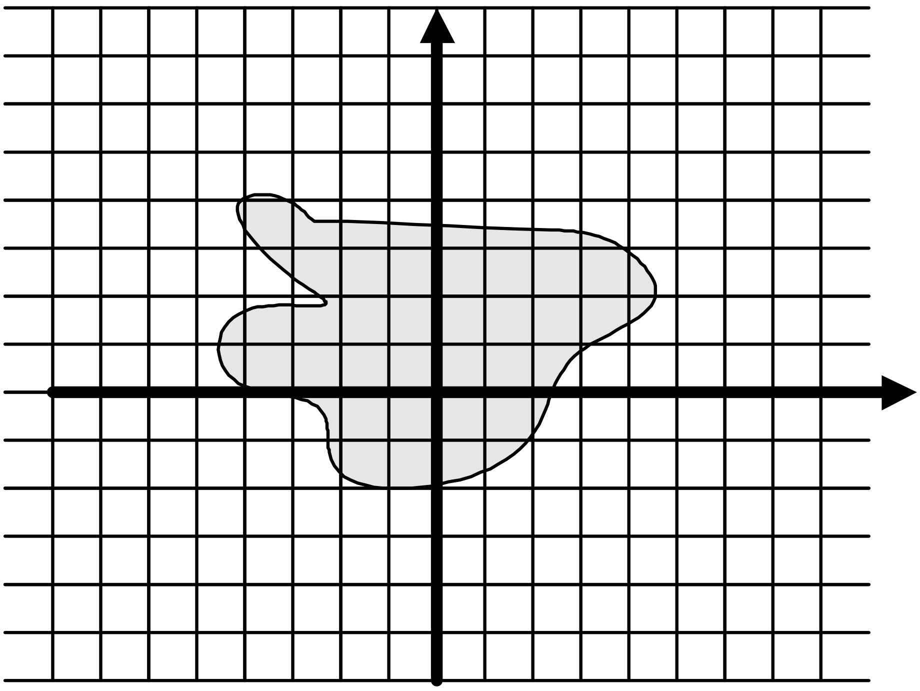
K_1 -sieć pierwsza P= $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}$

K_2 -sieć druga P= $\frac{1}{2^4}$

....

K_n -sieć n-ta P= $\frac{1}{2^{2n}}$

Co to jest miara i jak powstaje?

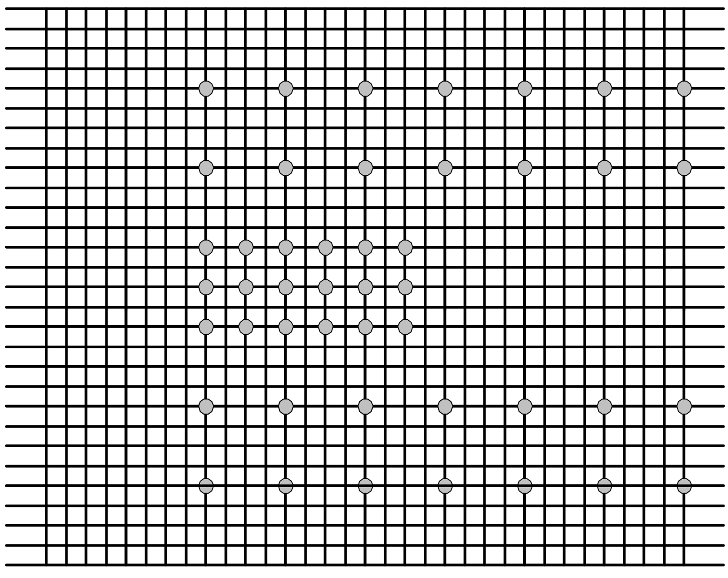


Mamy dowolną figurę F i nakładamy na nią sieć K_0, a następnie wyznaczamy liczbę W_0 kwadratów zawartych w figurze F.
W_0=0
Wyznaczamy liczbę kwadratów Z_0 wyznaczających figurę F (są to te kwadraty, które mają chociaż jeden punkt wspólny).
Z_0=21
Na figurę F nakładamy sieć K_1 i wtedy W_1=6, Z_1=23.
Nakładamy na figurę F kolejne sieci i obliczamy ich pola. Zauważmy, że dla pól zachodzi
$W_0 \le W_1 \le W_2 \le \ldots \le W_n \le Z_n \le \ldots \le Z_1 \le Z_0$
Otrzymujemy dwa ciągi $\{W_n\},\{Z_n\}$, które są ograniczone i monotoniczne więc są zbieżne.

Istnieje zatem granica $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = W(F)$ $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = Z(F)$.

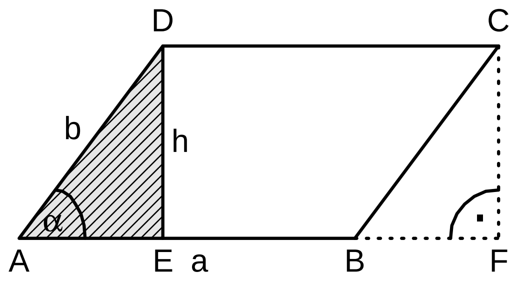
Liczbę W(F) nazywamy **miarą wewnętrzną** , zaś liczbę Z(F) - **miarą zewnętrzną.**
Def. Mówimy, że **figura F jest mierzalna** (ma pole) jeżeli miara wewnętrzna jest równa mierze zewnętrznej: **W(F)=Z(F)=m(F)** .Liczbę m.(F) nazywamy **miarą (polem)** figury F.
WŁASNOŚCI MIARY :
1. Pole figury jest liczbą nieujemną $m(F) \ge 0$.
2. Figury przystające mają równe pola $F_1 \equiv F_2 \Rightarrow m(F_1) = m(F_2)$.
3. Figura będąca sumą dwóch figur nie mających wspólnych punktów wewnętrznych ma pole równe sumie pól figur składowych: $F = F_1 \cup F_2 \quad \wedge \quad F_1 \cap F_2 = \emptyset \quad \Rightarrow \quad m(F) = m(F_1) + m(F_2)$
4. Jeżeli figury F_1 i F_2 mają pola i figura $F_1 \subset F_2$ to $m(F_1) \le m(F_2)$.
5. Pole prostokąta o bokach a i b jest równe $a \cdot b$.
6. Każda figura zawarta w odcinku ma pole równe 0.
7. Każdy łuk okręgu ma pole równe 0.

Przykład:
Kwadrat - sito to przykład figury , która nie ma pola (jest niemierzalna).



W(F)=0
Z(F)=1
W(F)$\neq$Z(F).

Temat: Pola figur płaskich.
RÓWNOLEGŁOBOK



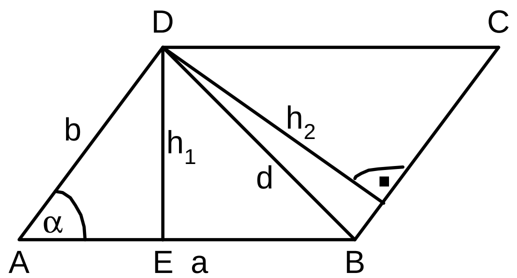
1. **2.**

$\Delta AED \equiv \Delta BFC$ (bkb) z ΔAED: $\sin\alpha = \dfrac{h}{b}$ $h = b \cdot \sin\alpha$

$$S = a \cdot h \qquad S = a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

Przykład:

W równoległoboku wysokości mają długości h_1, h_2, a obwód wynosi $2p$. Wyznaczyć kąt ostry równoległoboku i jego pole.



$2p = 2a + 2b$

$2p = 2(a+b)$

$a + b = p$

$S = \frac{1}{2}(ah_1 + bh_2)$

$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}ab\sin\alpha = \frac{1}{2}ah_1 = \frac{1}{2}bh_2$

$\sin\alpha = \frac{h_1}{b} \Rightarrow h_1 = b\cdot\sin\alpha$

$a = \frac{ph_2}{h_1 + h_2}$

$b = \frac{ph_1}{h_1 + h_2}$

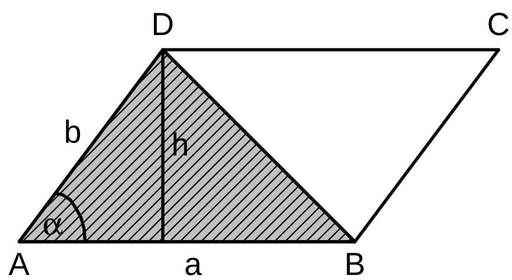
$a\cdot b\cdot\sin\alpha = b\cdot h_2$

$\sin\alpha = \frac{h_1(h_1+h_2)}{ph_1} = \frac{h_1+h_2}{p}$

$S = \frac{1}{2}\cdot 2ah_1 = ah_1 = \frac{ph_1h_2}{h_1+h_2}$

$ODP.: \quad \sin\alpha = \frac{h_1+h_2}{p}, \quad S = \frac{ph_1h_2}{h_1+h_2}.$

TRÓJKĄT



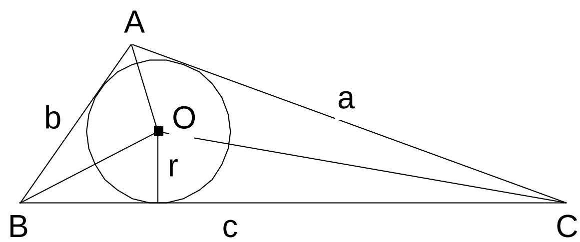
1.

$$S = \frac{1}{2}a\cdot h$$

2.

$$S = \frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\alpha$$

3.



$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}$$

$$S = \frac{1}{2}c \cdot r + \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r$$

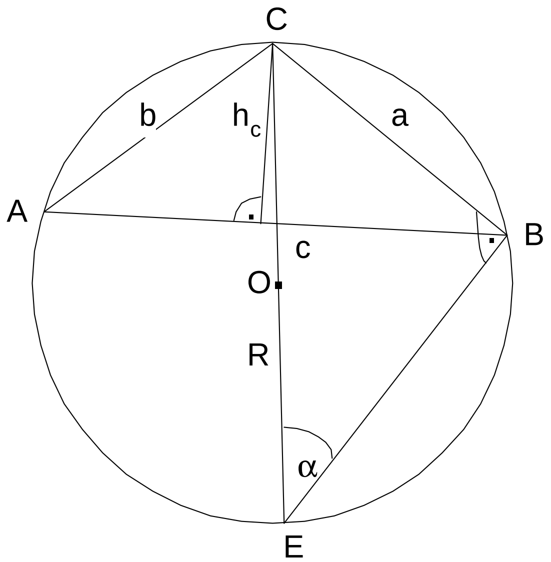
$$S = r \cdot \frac{a+b+c}{2}$$

obwód trójkąta: $2p = a+b+c$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = r \cdot p$$

4.



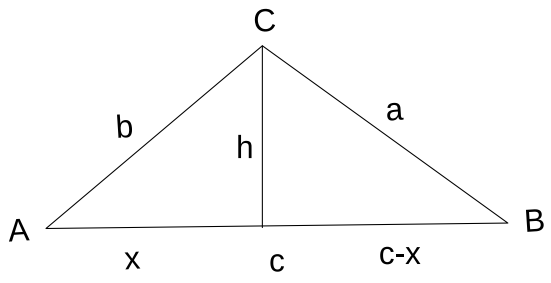
$$2R \cdot h_c \cdot c = abc$$

$$R \cdot 4 \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c}_{S} = abc$$

$$R \cdot 4 \cdot S = abc$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

5.



Z twierdzenia Pitagorasa Δ ADC: $b^2 = x^2 + h_c^2$

Δ BDC: $a^2 = h_c^2 + (c-x)^2$

$b^2 - a^2 = x^2 + h_c^2 - h_c^2 - (c - x)^2$

$b^2 - a^2 = x^2 - (c - x)^2$

$b^2 - a^2 = x^2 - (c^2 - 2cx + x^2)$

$b^2 - a^2 = x^2 - c^2 + 2cx - x^2$

$2cx = b^2 + c^2 - a^2$

$x = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$

Podstawiamy wyznaczony x do równania:

$** 2bc - b^2 - c^2 = -\left(b^2 - 2bc + c^2\right)$

$a + b + c = 2p$ -obwód trójkąta

$b + c - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a)$

$a + c - b = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b)$

$a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c)$

$h_c^2 = \dfrac{2p \cdot 2(p-a) \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-c)}{4c^2} \quad / \cdot c^2$

$h_c^2 \cdot c^2 = p(p-a) \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-c)$

$h_c^2 \cdot c^2 = 4p(p-a)(p-b)(p-c)$

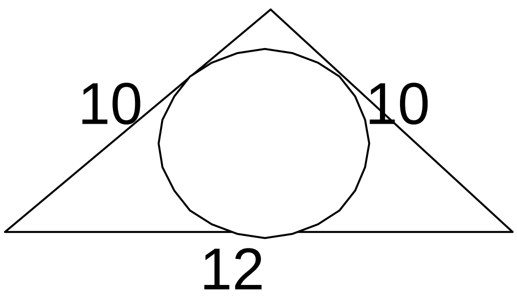
$h_c \cdot c = \sqrt{4p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad / : 2$

$\dfrac{h_c \cdot c}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ WZÓR HERONA

Przykład:

Trójkąt ma boki równe 12, 10 10.Oblicz odległość środka okręgu wpisanego w ten trójkąt od jego boku.



$S=\sqrt{p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)}$

$p=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}(10+10+12)=16$

$S=\sqrt{16\cdot(16-10)\cdot(16-10)\cdot(16-12)}$

$S=\sqrt{16\cdot 6\cdot 6\cdot 4}=48$

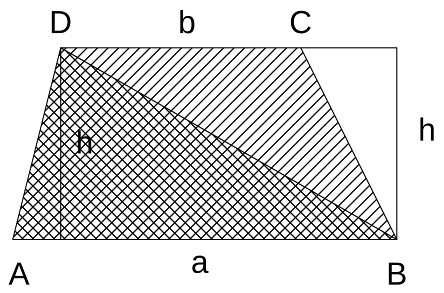
$S=p\cdot r$

$48=16\cdot r$

$r=\frac{48}{16}=3$

ODP.: Szukana odległość wynosi 3.

TRAPEZ



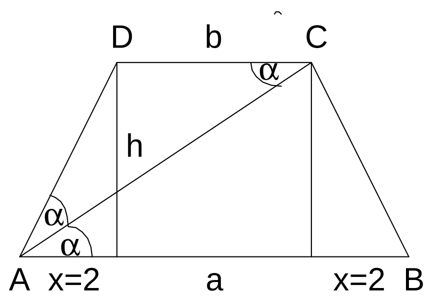
$S=S_{ABD}+S_{BCD}$

$S=\frac{1}{2}a\cdot h+\frac{1}{2}b\cdot h$

$$S=\frac{1}{2}(a+b)h=\frac{a+b}{2}\cdot h$$

Przykład:

Oblicz pole trapezu równoramiennego, którego ramię ma długość równą 4, jedna z podstaw jest dwa razy większa od drugiej, a przekątna dzieli kąt przy podstawie na połowę.



$AB=2DC$

$S=\frac{1}{2}(a+b)h$

Z trójkąta ΔADC : wiemy, że jest to trójkąt równoramienny zatem dwa kąty przy podstawie AC są sobie równe i dlatego: $b=4\Rightarrow a=8$

$2x + b = a$

$2x = 8 - 4$

$x = 2$

korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta Δ ADE obliczamy h :

$x^2 + h^2 = c^2$

$4 + h^2 = 16$

$h^2 = 12$

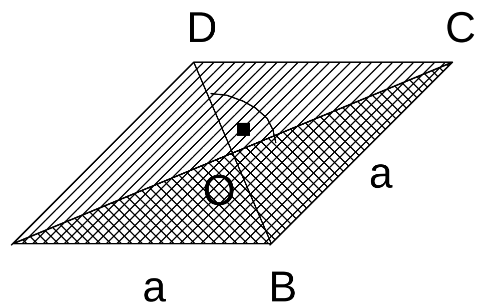
$h = 2\sqrt{3}$

$S = \frac{1}{2}(a + b)h$

$S = 12\sqrt{3}$

ODP.: Pole trapezu wynosi $12\sqrt{3}$.

ROMB



$AC = 2p = e$

$BD = 2q = f$

$S = S_{ACD} + S_{ABC}$

$S = \frac{1}{2} AC \cdot OD + \frac{1}{2} AC \cdot OB$

$S = \frac{1}{2} \cdot 2p \cdot q + \frac{1}{2} \cdot 2p \cdot q$

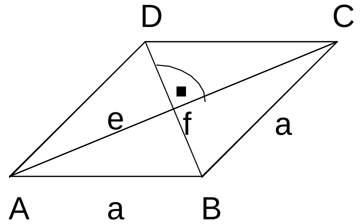
$S = 2pq$

$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e \cdot \frac{1}{2} \cdot f = \frac{1}{2} ef$

$$S = \frac{ef}{2}$$

Przykład:

Obwód rombu jest równy 20cm a suma jego przekątnych wynosi 14cm. Oblicz pole rombu.



$O = 20cm$

$O = 4a = 20 : 4 = 5cm$

$S = \frac{ef}{2}$

$e + f = 14$

Z ΔABD mamy:

$\left(\frac{1}{2}e\right)^2 + \left(\frac{1}{2}f\right)^2 = a^2$

$\begin{cases} \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}f^2 = 25 \quad /\cdot 4 \\ f + e = 14 \end{cases}$

$\begin{cases} e^2 + f^2 = 100 \\ f = 14 - e \end{cases}$

$e^2 + (14 - e)^2 = 100$

$2e^2 - 28e + 196 = 100 \qquad / : 2$

$e^2 - 14e + 48 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 196 - 192 = 4$

$\sqrt{\Delta} = 2$

$e_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad e_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$e_1 = 6 \quad \vee \quad e_2 = 8$

$f_1 = 14 - e_1 \quad \vee \quad f_2 = 14 - e_2$

$f_1 = 8 \quad \vee \quad f_2 = 6$

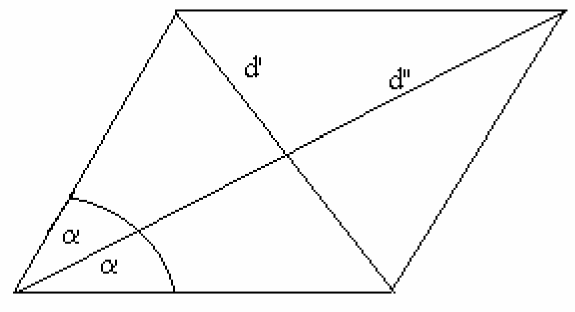
$\begin{cases} e_1 = 6 \\ f_1 = 8 \end{cases} \vee \begin{cases} e_2 = 8 \\ f_2 = 6 \end{cases}$

$S = \frac{48}{2} = 24cm^2.$

ODP.: Pole rombu jest równe $24\,cm^2$.

Zadanie 1

Obliczyć długość przekątnych rombu o polu S i kącie ostrym o mierze 2α



Przekątne w rombie są wzajemnie prostopadłe, a ich wspólny punkt dzieli je na odcinki o równych długościach. Pole rombu, którego przekątne mają długości d’ i d’’wyraża wzór $S = \frac{d' \cdot d''}{2}$. Zgodnie z rysunkiem:

$$\frac{\frac{d''}{2}}{\frac{d'}{2}} = ctg\alpha \Rightarrow d'' = d' ctg\alpha$$

Ponieważ d’d’’ = 2S, więc $d'^2 ctg\alpha = 2S$, stąd

$d' = \sqrt{2S \cdot tg\alpha}$,

$d'' = \sqrt{2S \cdot ctg\alpha}$

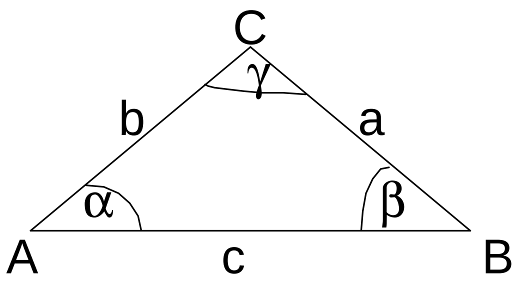
Odp: Długości przekątnych rombu wynoszą odpowiednio d’ i d’’ (jak wyżej).

Zadanie 2.
Stosunek przekątnych rombu jest rwny 2:3. Znaleść stosunek długości boku rombu do długości promienia koła wpisanego w romb.

Odp: Stounek ten wynosi $\frac{a}{r} = \frac{4\left[\left(\frac{d'}{2}\right)^2 + \left(\frac{d''}{2}\right)^2\right]}{d' \cdot d''}$

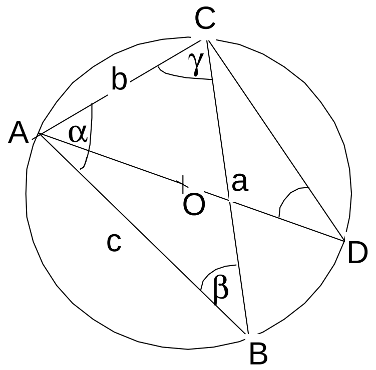
Temat: Twierdzenie sinusów (Synelliusa).

Tw.
W każdym trójkącie stosunek długości boków do sinusa przeciwległego kąta jest stały i równy średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

D.
a) dla kąta ostrego:



$\angle ADC = \angle ABC = \beta$ jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku AC

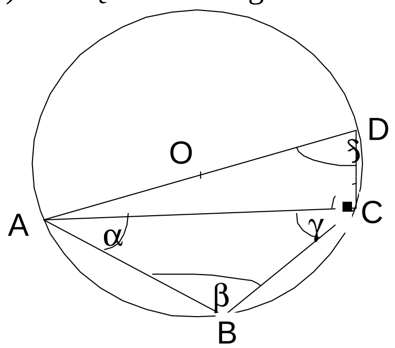
$\angle ACD = 90^\circ$ kąt oparty na średnicy

$\Delta ABC = 90^\circ \Rightarrow \sin\beta = \dfrac{AC}{AD}$

$AD = 2R$

$\sin\beta = \dfrac{b}{2R} \Rightarrow \dfrac{b}{\sin\beta} = 2R$

b) dla kąta rozwartego



$\angle\beta > 90^\circ$

$\angle\delta = 180^\circ - \angle\beta$

$\angle\beta + \angle\delta = 180^\circ$ z twierdzenia o czworokącie wpisanym w okrąg

$\Delta ACD = 90^\circ \Rightarrow \dfrac{AC}{AD} = \sin\delta \Rightarrow \dfrac{b}{2R} = \sin(180^\circ - \beta) = \sin\beta$

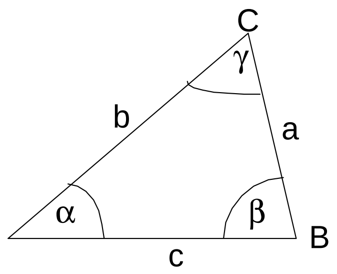
$$\frac{b}{2R} = \sin\beta \Rightarrow \frac{b}{\sin\beta} = 2R \quad .$$

cnd.

Def. Rozwiązać trójkąt tzn. wyznaczyć długości wszystkich jego boków i miary jego kątów.

Przykład:

Rozwiązać trójkąt jeżeli a =4, b= $\sqrt{8}$, $\angle\beta = 30^\circ$.



korzystamy z twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin 30^\circ}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$$

$$\frac{4}{\sin\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$$

$$\frac{4}{\sin\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$2=2\sqrt{2}\sin\alpha$$

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\angle\alpha=45^\circ$$

$$\angle\gamma=180^\circ-(\angle\alpha+\angle\beta)=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=105^\circ$$

$$\angle\gamma=105^\circ$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{c}{\sin 105^\circ}$$

$$\frac{8}{\sqrt{2}}=\frac{c}{\sin(60^\circ+45^\circ)}$$

$$\frac{8}{\sqrt{2}}=\frac{c}{\sin 60^\circ\cos 45^\circ+\sin 45^\circ\cos 60^\circ}$$

$$\frac{8}{\sqrt{2}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2\cdot 2}+\frac{\sqrt{2}\cdot 1}{2\cdot 2}}$$

$$8\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)}{4}=c\sqrt{2}\quad /:\sqrt{2}$$

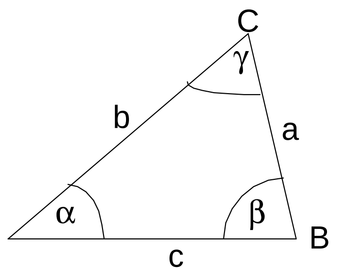
$$c=2(\sqrt{3}+1)$$

ODP.: Bok $c = 2(\sqrt{3}+1)$, zaś kąt $\angle\alpha = 45^\circ$ i $\angle\gamma = 105^\circ$.

<u>Temat:</u> Twierdzenie cosinusów.

Tw.

W każdym trójkącie kwadrat jednego boku jest równy sumie kwadratów dwóch pozostałych boków pomniejszony o podwójny iloczyn tych boków i cosinusa kąta między nimi.



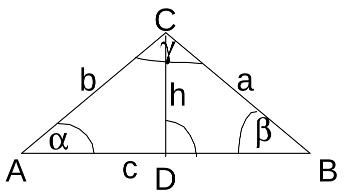
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

D.

1. $\alpha = 90^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$
2. $\alpha < 90^\circ$



$\frac{AD}{b} = \cos\alpha \Rightarrow AD = b\cos\alpha$

$DB = c - b\cos\alpha$

korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla ΔADC i ΔDBC

$b^2 = h^2 + (AD)^2 = h^2 + b^2\cos^2\alpha$

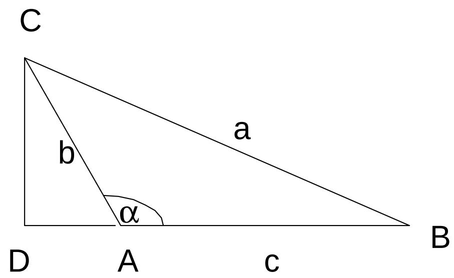
$a^2 = h^2 + (DB)^2 = h^2 + (c - b\cos\alpha)^2$

$b^2 - a^2 = b^2\cos^2\alpha - c^2 + 2bc\cos\alpha - b^2\cos^2\alpha$

$b^2 - a^2 = -c^2 - 2bc\cos\alpha$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

3. $\alpha > 90^\circ$



$\angle DAC = 180^\circ - \alpha$

$\frac{DA}{b} = \cos\left(180^\circ - \alpha\right) \Rightarrow DA = b\cos\left(180^\circ - \alpha\right) = -b\,\cos\alpha$

$DB = AD + c = c - b\cos\alpha$

korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla $\Delta CBD\ i\ \Delta CDA$

$h^2 + (AD)^2 = b^2$

$h^2 + (DB)^2 = a^2$

$(AD)^2 - (DB)^2 = b^2 - a^2$

$(-b\cos\alpha)^2 - (c - b\cos\alpha)^2 = b^2 - a^2$

$b^2\cos^2\alpha - c^2 - 2bc\cos\alpha - b^2\cos^2\alpha - b^2 - c^2$

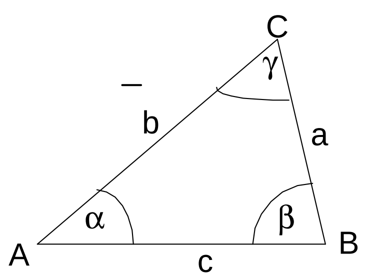
$-c^2 + 2b\cos\alpha = b^2 - a^2$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

cnd.

Przykład:

W trójkącie dane są dwa boki a = 10, b = 6 i kąt między nimi $\alpha = 60^\circ$. Oblicz trzeci bok i pozostałe kąty.



$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$c^2 = 5^2 + 7^2 - 2\cdot 5\cdot 7\cdot \cos\,60^\circ$

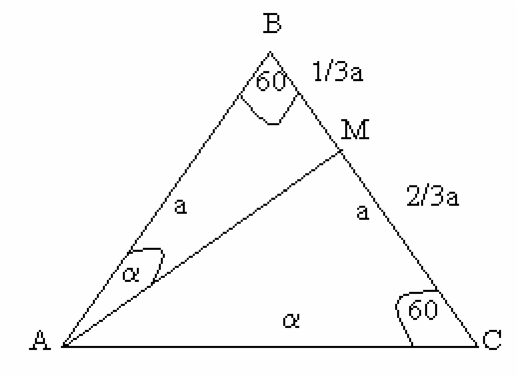
$c^2 = 25 + 49 - 2\cdot 35\cdot \frac{1}{2}$

$c^2 = 74 - 35$

$c = \sqrt{39}$

Zadanie 1.

W trójkącie równobocznym ABC na boku BC wybrano punkt M taki, że $\left|BM\right| = \frac{1}{2}\left|MC\right|$. Wyznacz sinus kąta CAM.



$$\left|CM\right| + \left|MB\right| = a \Rightarrow \left|CM\right| = \frac{2}{3}a ... i ... \left|MB\right| = \frac{1}{3}a$$

Stosując twierdzenie cosinusów do trójkąta ABM, otrzymujemy:

$$\left|AM\right|^2 = a^2 + \left(\frac{1}{3}a\right)^2 - 2a \cdot \frac{1}{3}a \cdot \cos 60^o \Leftrightarrow \left|AM\right| = \frac{2\sqrt{7}}{3}.$$

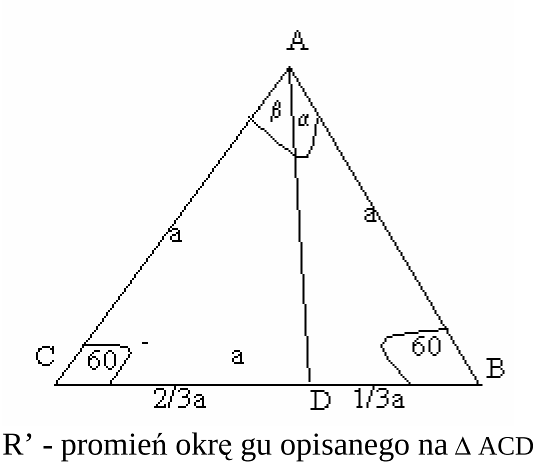
Stosując twierdzenie sinusów do trójkąta AMC, otrzymujemy:

$$\frac{\frac{2}{3}a}{\sin\alpha} = \frac{\left|AM\right|}{\sin 60^o} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

Odp: Sinus kąta CAM wynosi $\frac{\sqrt{21}}{7}$

Zadanie 2.

Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt D, że |CD|:|DB|=2:1.
Oblicz stosunek długości promieni okręgów opisanych na trójkątach ACD i ABD.



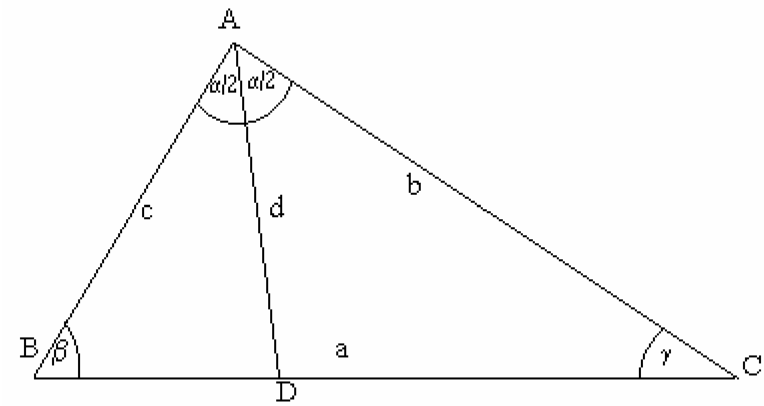
R' - promień okrę gu opisanego na Δ ACD
R" - promień okręgu opisanego na Δ ADB.
Korzystając z tw. sinusów do trójkątów ACD i ADB otrzymujemy:

$$2R' = \frac{\left|AD\right|}{\sin 60^o} ... i ... 2R'' = \frac{\left|AD\right|}{\sin 60^o},$$

stąd wnioskujemy, że R'=R", czyli R':R" = 1.
Odp: Stosunek promieni danych okręgów wynosi 1.

Zadanie 3.

Wyznacz długości dwusiecznych kąta A w trójkącie ABC o bokach długości a,b,c.



Niech d będzie długością dwusiecznej kąta A w trójkącie ABC.
Ponieważ

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ADC}$$

$$\frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}cd \cdot \sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}bd \cdot \sin\frac{\alpha}{2}, \text{ skąd}$$

$$d = \frac{2bc}{b+c} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Wykorzystując związki :

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{(z tw.cosinusów) i}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad \text{(z wzoru na cosinus podwojonego kąta i z warunku, że } \frac{\alpha}{2} \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)\text{),}$$

otrzymujemy:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{bc}}.$$

Podstawiając do równości $d = \frac{2bc}{b+c} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$ za $\cos\frac{\alpha}{2}$ otrzymane wyrażenie otrzymujemy

$$d = \frac{\sqrt{bc\left[(b+c)^2 - a^2\right]}}{b+c}$$

Odp: Długość dwusiecznej kąta A wynosi d (jak wyżej).

Zadanie 4.
Boki trójkąta ABC mają długości |AB|=4, |AC| = |BC| = 8. Oblicz stosunek pól figur, na które symetralna boku AC rozcina trójkąt ABC.

Odp: Stosunek pól w/w figur wynosi $\frac{S_{\Delta CDE}}{S_{ABED}} = \frac{2}{5}$.

Zadanie 5.
Długość boków pewnego trójkąta są kolejnymi liczbami naturalnymi. Kąty wewnętrzne tego trójkąta mają tę własność, że miara kąta największego jest dwukrotnością miary kąta najmniejszego. Wyznacz długości boków tego trójkąta.
Odp: Boki te mają odpowiednio a =4 , b = 5 i c = 6.

Zadanie 6.
Pole S trójkąta ABC spełnia równanie $S = a^2 - (b-c)^2$, gdzie a,b,c są długościami boków trójkąta.
Znajdź sinus tego kąta BAC.

Odp: Sinus tego kąta wynosi $\frac{8}{17}$.

Zadanie 7.
Długości boków trójkąta są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Jaki warunek spełnia stosunek długości najkrótszego z boków do różnicy ciągu, jeżeli trójkąt jest rozwartokątny?

Odp: Warunkiem tym jest $\frac{a}{r} \in (1;3)$.

Zadanie 8.
W trapezie ABCD, w którym AB||CD dane są: |AC| = 16 , |<DAC| = |<ABC| = α. Wiedząc, że proste AD i BC są prostopadłe oblicz pole tego trapezu.

Odp: Pole trapezu jest równe $P = \frac{(c+b)\cdot h}{2} = a^2 ctg 2\alpha$.

Temat: **Iloczyn skalarny wektorów**.

Def.: Iloczynem skalarnym dwóch niezerowych wektorów $\vec{u}$ *i* $\vec{v}$ nazywamy liczbę

$$\vec{u} \circ \vec{v} = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \cos\angle\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$$

$\vec{u} = \vec{0}$ lub $\vec{v} = \vec{0}$ *, to* $\vec{u} \circ \vec{v} = 0$

Iloczyn skalarny wektorów $\begin{matrix}\vec{u} = [u_x, u_y] \\ \vec{v} = [v_x, v_y]\end{matrix}$ wyraża się wzorem $\vec{u} \circ \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y$

WŁASNOŚCI ILOCZYNU SKALARNEGO

1. $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$
2. $k\left(\vec{u} \circ \vec{v}\right) = \left(k\vec{u}\right) \circ \vec{v} = \vec{u} \circ \left(k\vec{v}\right)$, $k \in R$
3. $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \circ \vec{w} = \vec{u} \circ \vec{w} + \vec{v} \circ \vec{w}$
4. $\left(\vec{u}\right)^2 = \vec{u} \circ \vec{u} = \left(\left|\vec{u}\right|\right)^2$, $\left|\vec{u}\right|$-długość wektora

Dwa niezerowe **wektory** są **prostopadłe** wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn skalarny jest równy zero.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \circ \vec{v} = 0$$

$$\vec{u} \circ \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \cos\angle\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\angle\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 0$$

$$\angle\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 90^\circ \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

cnd

Korzystając z iloczynu skalarnego wyznaczamy kąt między tymi wektorami:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \cos\angle\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$$

$$\cos\angle\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|}$$

Wyznacznikiem pary niezerowych wektorów $\vec{u} = [u_x, u_y]$ i $\vec{v} = [v_x, v_y]$ nazywamy liczbę

$$d\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x$$

Korzystając z wyznacznika pary wektorów możemy obliczyć pole trójkąta:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left| d\left(\vec{AB}, \vec{AC}\right) \right|$$