# 1. POJĘCIE CIĄGU

**Def.** Funkcję $f: N \to Y$ odwzorowującą zbiór N-liczb naturalnych w pewien niepusty zbiór Y nazywamy **ciągiem nieskończonym.**

UWAGA!

N={1,2,3,…}

*Przykład*
N={1,2,3,…}
Y={*,!,#}

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | * | ! | * | # | ! | |

Wartość f(n) funkcji f dla argumentu n nazywamy n-tym wyrazem ciągu i oznaczamy $a_n$ , zaś sam ciąg oznaczamy $(a_n)$, $\{a_n\}$, $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

(*, !, *, #, !, …)
f(1) = * = $a_1$
f(2) = ! = $a_2$

**Def. Ciągiem skończonym** nazywamy funkcję, która odwzorowuje pewien skończony zbiór początkowych liczb naturalnych w niepusty zbiór Y.

UWAGA!

N={1,2,3,…,n}

*Przykład*
N={1,2,3}
Y={a,b,c,d}

| n | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| f(x) | a | c | d |

(a,c,d)

**Def.** Ciąg, którego wyrazy są liczbami nazywamy **ciągiem liczbowym**.

*Przekład*
N={1,2,3}
Y={5,4,3}

| n | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| f(x) | 4 | 3 | 5 |

(4,3,5)

## OKREŚLENIE CIĄGU

Ciąg możemy określić za pomocą:

1. przepisu słownego

np. każdej liczbie naturalnej przyporządkowujemy jej odwrotność

2. wzoru ogólnego

np. $a_n = \frac{1}{n}$

3. wzoru rekurencyjnego

np. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n - 1 \end{cases}$

*Przykład*

Wyznacz 6 początkowych wyrazów ciągu ($a_n$), a następnie sporządź jego wykres

$$a_n = 1 - \frac{1}{n}$$

$$a_1 = 1 - \frac{1}{1} = 0$$

$$a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

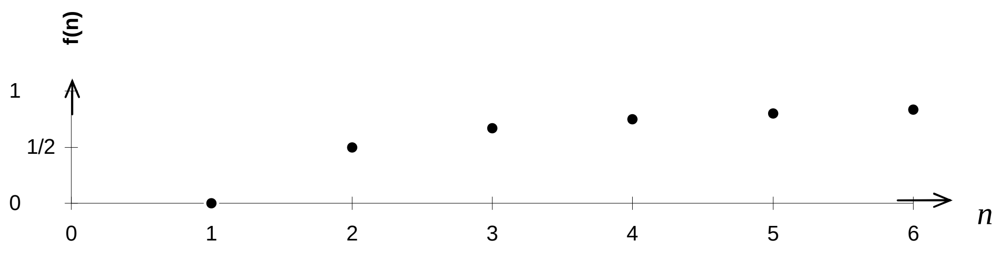
$$a_3 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$a_4 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$a_5 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$a_6 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$(a_n) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}\right)$$




## WŁASNOŚCI CIĄGÓW LICZBOWYCH

1. Monotoniczność

Ciąg $(a_n)$ jest rosnący $\Leftrightarrow a_n \langle a_{n+1}$

Ciąg $(a_n)$ jest malejący $\Leftrightarrow a_n \rangle a_{n+1}$

Ciąg $(a_n)$ jest stały $\Leftrightarrow a_n = a_{n+1}$

Ciąg niemalejący (nierosnący) nazywamy monotonicznym.

Ciąg rosnący (malejący) nazywamy ściśle monotonicznym.

*Przykład*

Zbadaj monotoniczność ciągu $(a_n)$

$$a_n = n^2 - n + 1$$

$$a_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 1 = n^2 + n + 1$$

$$a_{n+1} - a_n = n^2 + n + 1 - (n^2 - n + 1) = n^2 + n + 1 - n^2 + n - 1 = 2n$$

$$2n \rangle 0$$

$$a_{n+1} - a_n \rangle 0$$

$$a_{n+1} \rangle a_n$$

Ciąg jest rosnący

2. Ograniczenia

**Def.** Mówimy, że ciąg $(a_n)$ jest ograniczony z góry, jeśli istnieje liczba M taka, że

$$\bigwedge_{n} a_n \le M$$

Mówimy, że ciąg $(a_n)$ jest ograniczony z dołu, jeśli istnieje liczba m taka, że

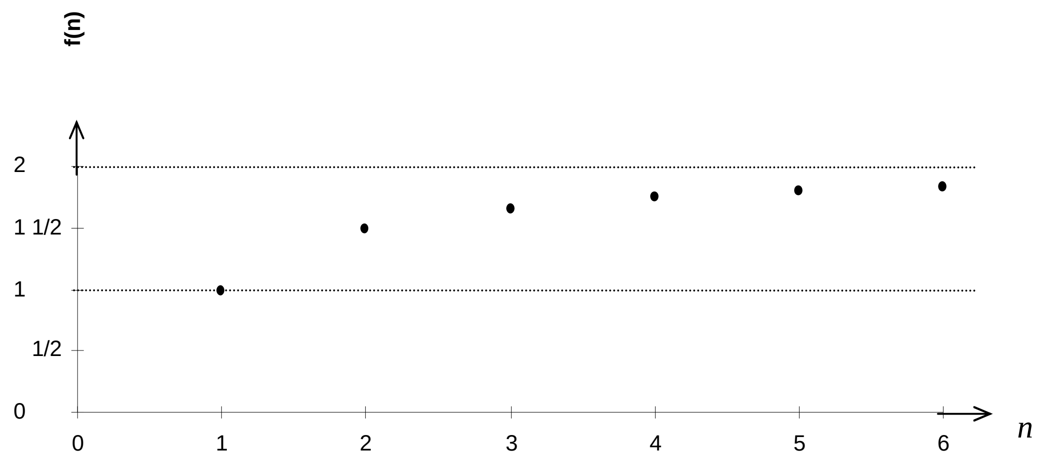
$$\bigwedge_{n} a_n \ge M$$

Mówimy, że ciąg $(a_n)$ jest ograniczony, jeśli jest ograniczony z dołu i z góry

$$\bigwedge_{n} m \le a_n \le M$$

*Przykład*

$$a_n = 2 - \frac{1}{n}$$




Ciąg jest ograniczony

# 2. INDUKCJA MATEMATYCZNA

*Przykład*

Sprawdź równość

| | | |
|---|---|---|
| $L = 1 + 2$ | $P = \frac{2 \cdot 3}{2}$ | $L = P$ |
| $L = 1 + 2 + 3$ | $P = \frac{3 \cdot 4}{2}$ | $L = P$ |
| $L = 1 + 2 + 3 + 4$ | $P = \frac{4 \cdot 5}{2}$ | $L = P$ |
| $L = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ | $P = \frac{5 \cdot 6}{2}$ | $L = P$ |

UWAGA !!!

Nie wolno zapisywać równości na zasadzie analogii.

I. DOMINO

Przyjmijmy, że ustawiono jedna za drugą nieskończenie wiele kostek domina. Aby być pewnym, że wszystkie kostki się przewrócą, muszą być spełnione dwa warunki:
1.) przewróciła się pierwsza kostka
2.) kostki są tak ustawiona, że przewrócenie którejkolwiek z nich spowoduje upadek następnej
Zasada, która mówi, że sztuka z kostkami domina musi się udać nazywa się **zasadą indukcji matematycznej**

II. INDUKCJA MATEMATYCZNA (ZUPEŁNA)

jest metodą dowodzenia twierdzeń o liczbach naturalnych.

**Tw.** Niech $T_n$ oznacza twierdzenie, w którym mowa jest o liczbie naturalnej n. Metoda indukcji matematycznej opiera się na następującej zasadzie:
Jeżeli istnieje taka liczba naturalna $n_0$ , że:
1.) twierdzenie $Tn_0$ jest prawdziwe;
2.) dla każdej liczby naturalnej $k \geq n_0$ z prawdziwości twierdzenia $T_k$ wynika prawdziwość twierdzenia $T_{k+1}$ , to twierdzenie $T_k$ jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$ .

Dowód przeprowadzony metodą indukcji matematycznej nazywamy **dowodem indukcyjnym**.

*Przykład*

Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{(n+1)^2}{4} \cdot n^2 \qquad (0)$$

Rozwiązanie

Skorzystajmy z zasady indukcji matematycznej
1.) dla $n = 1$ równość jest oczywiście prawdziwa
2.) niech $k \geq 1$ oznacza dowolną liczbę naturalną. Wykażemy, że jeśli dowodzona równość jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej k, tzn. jeżeli
zał.

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \frac{(k+1)^2}{4} \cdot k^2 \qquad (1)$$

to jest także prawdziwa dla następującej liczby naturalnej, czyli dla $k + 1$
teza:

$1^3 + 2^3 + \ldots + (k+1)^3 = \frac{(k+2)^2}{4} \cdot (k+1)^2$ ( 2 )

Dodając $(k + 1)^3$ do obu stron równości ( 1 ) otrzymujemy

$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+2)^2}{4} \cdot k^2 \cdot (k+1)^3$

Ponieważ $\frac{(k+1)^2}{4} \cdot k^2 + (k+1)^3 = \frac{(k+2)^2}{4} \cdot (k+1)^2$ więc ostatecznie zachodzi równość ( 2 ).

Na mocy indukcji matematycznej równość ( 0 ) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

<u>Zadanie1.</u>

Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n suma $4^n + 15n + 17$ jest podzielna przez 9.

Rozwiązanie

Niech $a_n = 4^n + 15n + 17$. Twierdzeniem $T_n$ , które mamy udowodnić, jest zdanie: dla każdej liczby naturalnej $n$ liczba $a_n$ jest podzielna przez 9. Stosujemy zasadę indukcji matematycznej.

1.) Dla $n = 1$ mamy $a_n = 4 + 15 + 17 = 36$ , zatem twierdzenie $T_1$ jest prawdziwe.

2.) Niech $k \geq 1$ oznacza dowolną liczbę naturalną. Wykażemy, że z podzielności $a_k$ przez 9 wynika podzielność $a_{k+1}$ przez 9. Istotnie

$$a_{k+1} = 4^{k+1} + 15(k+1) + 17 = 4(4^k + 15k + 17) - 9(5k + 4)$$

Jeśli zatem $a_k = 4^k + 15k + 17$ jest podzielne przez 9, to ponieważ $9(5k + 4)$ jest podzielne przez 9, więc $a_{k+1}$ jest także podzielne przez 9. Dla każdej liczby naturalnej $k \geq 1$ z prawdziwości twierdzenia $T_k$ . Na podstawie zasady indukcji matematycznej stwierdzamy więc, że dla każdej liczby naturalnej n suma $4^n + 15n + 17$ jest podzielna przez 9.

<u>Zadanie 2.</u>

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi:

$$n^2 \geq n$$

1.) Dla $n = 1$ mamy $n^2$ $1^2 \geq 1$ ; $1 \geq 1$ zatem twierdzenie $T_1$ jest prawdziwe.

2.) założenie $n^2 \geq n$

teza $(n + 1)^2 \geq n + 1$

dowód $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 \geq n^2 + 1 \geq n + 1$

zatem $(n + 1)^2 \geq n + 1$

Na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej.

**Tw.** (Nierówność Bernouliego)

$\bigwedge_{n} (1 + x)^n \geq 1 + nx$ dla $x \geq -1$

<u>Zadanie 3.</u>

Udowodnij nierówność Bernouliego.

1.) spr. $n_0 = 1$

$(1 + x)^1 \geq 1 + 1x$ Zatem $T_1$ jest prawdziwe

$1 + x \geq 1 + x$

2.) założenie $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

teza $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$

dowód

$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n \cdot (1 + x)^1 \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + x + nx + nx^2 =$
$= 1(n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x$
$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (1 + n)x$

Na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność Bernouliego jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej.

## 3. WZÓR DWUMIANOWY NEWTONA

**Tw.** Niech $k$ oznacza liczbę naturalną lub zero.
Symbol $k!$ ( czytamy: k silnia) definiujemy następująco:
$0! = 1$
$1! = 1$
$k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$ , gdy $k \geq 2$

*Przykład*

a.) $\frac{3!\cdot 7!}{4!\cdot 6!} = \frac{3!\cdot 6!\cdot 7}{3!\cdot 4\cdot 6!} = \frac{7}{4}$

b.) $\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} = \frac{(n-2)!\cdot(n-1)\cdot n}{2\cdot(n-2)!} = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$

**Def.** Wyrażenie $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ gdzie $n$ , $k \in$ N $\cup \{0\}$ i $n \geq k$ nazywamy **symbolem Newtona**

$\binom{n}{k}$ czytamy „n po k” lub „n nad k”.

Symbole Newtona spełniają warunek

1.) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

2.) $\binom{n}{k} + \binom{n}{n-k}$

Wartości symboli Newtona możemy ustawić w następującą tabelę mającą kształt trójkąta, zwaną **trójkątem Pascala**.

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

………………………………
………………………………

Ponieważ $\binom{n}{0} = 1$ oraz $\binom{n}{n} = 1$ dla każdego $n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, więc wszystkie wyrazy skrajne w trójkącie Pascala są równe 1. Ponadto zgodnie z $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, każdy z pozostałych wyrazów trójkąta Pascala jest sumą najbliższych dwóch wyrazów znajdujących się nad nim. Dzięki temu trójkąt Pascala łatwo jest odtworzyć w pamięci:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
………………………
………………………

**Tw.** Każdą naturalną potęgę dwumianu ($a$ + $b$) można wyrazić w postaci **wzoru dwumianowego Newtona**

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

Rozwinięcie potęgi $(a + b)^n$ zapisujemy krótko:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

*Przykład*

Wiedząc, że $\binom{n+1}{5} = \binom{n}{6}$, gdzie $n \geq 6$jest liczbą naturalną obliczyć $\binom{n}{12}$

Rozwiązanie

Poszukujemy rozwiązań równania $\binom{n+1}{5} = \binom{n}{6}$ w zbiorze liczb naturalnych nie mniejszych niż 6.

Korzystając z równania $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ zapisujemy je w postaci $\frac{(n+1)!}{5! \cdot (n-4)!} = \frac{n!}{6! \cdot (n-6)!}$ .

Ponieważ

($n$ + 1)! = $n$!( $n$ + 1), ($n$ - 4)! = ($n$ - 6)! ($n$ - 5) ($n$ - 4) i 6! = 5! · 6 , więc stąd otrzymujemy $\frac{n+1}{(n-4)(n-5)} = \frac{1}{6}$ , a następnie $n^2 - 15n + 14 = 0$. To ostatnie równanie ma dwa rozwiązania $n_1 = 1$ i $n_2 = 14$, z których tylko drugie jest nie mniejsze niż 6. Tak więc

$n = 14$ i $\binom{14}{12} = \frac{14!}{12! \cdot 2!} = \frac{14 \cdot 13}{2} = 91$

Odp: 91

<u>Zadanie 1.</u>

Nie rozwijając potęgi $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{18}$ zbadać, czy istnieje w tym rozwinięciu wyraz wprost proporcjonalny do $x$ lub do $x^2$ .

Rozwiązanie

Wyraz $(i + 1)$-szy rozwinięcia potęgi $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{18}$ ma postać $\binom{18}{i}$ $(\sqrt[3]{x})^{18-i}$ $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{i}$, czyli postać $\binom{18}{i}x^{\frac{18-i}{3}-\frac{i}{2}}$.

Sprawdzamy, czy istnieje taka liczba całkowita $i \in \langle 0;18\rangle$, aby ten wyraz miał postać $Ax$ lub $Bx^2$. W przypadku pierwszym musiałoby być spełnione równanie $\frac{18-i}{3}-\frac{i}{2}=1$, czyli równanie $36-2i-3i=6$, co zachodzi dla $i = 6$. Tak więc siódmy wyraz rozwinięcia jest proporcjonalny do $x$. Tym wyrazem jest $\binom{18}{6}x$. W przypadku drugim musiałoby być spełnione równanie $\frac{18-i}{3}-\frac{i}{2}=2$, czyli równanie $36-2i-3i=12$, co zachodzi dla $i=\frac{24}{5}$. Nie jest to jednak liczba całkowita - to oznacza, że w rozwinięciu badanej potęgi nie ma wyrazu proporcjonalnego do $x^2$.

Zadanie 2.

Ile wymiernych składników występuje w rozwinięciu potęgi $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})^{20}$ ?

Rozwiązanie

Składnikami wymiernymi są te wyrazy rozwinięcia, które mają postać

$$\binom{20}{3k}(\sqrt{3})^{2l}(\sqrt[3]{2})^{3k} \quad \text{, gdzie } 2l + 3k = 20.$$

Należy zbadać dla jakich $k, l \in \mathrm{N}$ zachodzi równość $2l+3k=20$.
Są tylko cztery takie pary $(k, l)$: (1, 10), (2, 7), (4, 4), (6, 1).
Odp: 4.

Zadanie 3.

Obliczyć $x$ wiedząc, że piąty składnik rozwinięcia potęgi $\left[(\sqrt[3]{x})^{1+\log x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right]^{16}$ jest równy 18 200.

Rozwiązanie
Zgodnie a treścią przykładu

$$\binom{16}{4}x^{12\cdot\frac{1+\log x}{3}}\cdot x^{-1}=18\,200$$

czyli

$$x^{3+4\log x}=10$$

Po obustronnym zlogarytmowaniu, przy podstawie 10, równania $x^{3+4\log x}=10$ i łatwych przekształceniach otrzymujemy

$$4\log^2 x+3\log x-1=0$$

Podstawiając następnie $\log x = t$ i rozwiązując równanie kwadratowe $4t^2+3t-1=0$ otrzymujemy dwa rozwiązania $t_1=-1$ i $t_2=\frac{1}{4}$, stąd

$$\log x=-1 \text{ lub } \log x=\tfrac{1}{4}\text{, a więc } x=\tfrac{1}{10} \text{ lub } x=\sqrt[4]{10}.$$

Odp: $x=\frac{1}{10}$ lub $x=\sqrt[4]{10}$.

# 4. ELEMENTY KOMBINATORYKI

**Permutacją** zbioru *n*-elementowego nazywamy każdy ciąg *n*-wyrazowy utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru. Liczba $P_n$ wszystkich permutacji zbioru złożonego z *n* różnych elementów wyraża się wzorem

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{n!}$$

W permutacji:
- biorą udział wszystkie elementy zbioru
- kolejność elementów jest istotna
- elementy nie mogą się powtarzać

**Kombinacją** *k*-elementów zbioru *n*-elementowego nazywamy każdy *k*-elementowy podzbiór tego zbioru. Liczba $C_n^k$ wszystkich kombinacji *k*-elementowych zbioru złożonego z *n* różnych elementów wyraża się wzorem

$$\mathbf{C_n^k} = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$$

W kombinacji:
- nie muszą brać udziału wszystkie elementy
- kolejność elementów nie jest istotna
- elementy nie mogą się powtarzać

**Wariacją bez powtórzeń** *k*-elementową zbioru złożonego z *n* różnych elementów nazywamy każdą permutację dowolnego *k*-elementowego podzbioru tego zbioru. Liczba $V_n^k$ wszystkich takich wariacji wyraża się wzorem

$$\mathbf{V_n^k} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{(n-k)!}}$$

W wariacji bez powtórzeń:
- nie muszą brać udziału wszystkie elementy
- kolejność elementów jest istotna
- elementy nie mogą się powtarzać

**Wariacją z powtórzeniami** *k*-elementową zbioru *n*-elementowego nazywamy każdy *k*-wyrazowy ciąg elementów tego zbioru. Liczba $W_n^k$ wszystkich takich wariacji wyraża się wzorem

$$\mathbf{W_n^k} = \mathbf{n^k}$$

W wariacji z powtórzeniami:
- nie muszą brać udziału wszystkie elementy
- kolejność elementów jest istotna
- elementy mogą się powtarzać

*Przykład*

W klasie liczącej 32 osoby jest tylko 6 chłopców. Na ile sposobów można wybrać 5-osobową delegację tej klasy tak aby w składzie delegacji znajdował się
a.) co najmniej jeden chłopiec
b.) dokładnie jeden chłopiec?

Rozwiązanie

a.) Pięcioosobowych delegacji klasy liczącej 32 osoby jest tyle, ile jest kombinacji 5-elementowych zbioru 32-elementowego. Tych ostatnich jest $C_{32}^{5}$. 5-osobową delegację tej klasy, w której nie będzie żadnego chłopca można wybrać na tyle sposobów, ile jest 5-elementowych kombinacji zbioru 26-elementowego, tzn. $C_{26}^{5}$. Stąd wynika, że 5-osobową delegację danej klasy, w której będzie co najmniej jeden chłopiec, można wybrać na $C_{32}^{5} - C_{26}^{5}$ sposobów.

b.) Czteroosobowych delegacji dziewcząt danej klasy jest tyle, ile jest kombinacji 4-elementowych zbioru 26-elementowego tzn. $C_{26}^{4}$. Każdą z tych delegacji należy uzupełnić jednym chłopcem spośród sześciu, co można zrobić na $C_{6}^{1} = 6$ sposobów. Stąd wynika, że 5-osobową delegację danej klasy, w której będzie dokładnie jeden chłopiec, można wybrać na $C_{6}^{1} \cdot C_{26}^{4}$ sposobów.

Zadanie 1.
Ile jest permutacji zbioru cyfr {1, 2, …, 9}, w których pierwsza i ostatnia cyfra nie sąsiadują ze sobą?

Rozwiązanie

Wszystkich możliwych permutacji danego zbioru jest $P_9 = 9!$

Permutacji danego zbioru, w których na pierwszym miejscu wystąpi 1 a na drugim 9 jest tyle, ile permutacji pozostałych siedmiu cyfr tzn. $P_7 = 7!$ Tyle samo jest permutacji danego zbioru, w których na drugim miejscu wystąpi 1 a na trzecim 9. Powtarzając to rozumowanie jeszcze 6 razy dochodzimy do wniosku, że wszystkich permutacji danego zbioru, w których 1 i 9 sąsiadują ze sobą w kolejności: 1, 9, jest $8 \cdot P_7 = 8 \cdot 7! = 8!$

Analogicznie, wszystkich permutacji danego zbioru, w których 1 i 9 sąsiadują ze sobą w kolejności: 9, 1, jest $8 \cdot P_7 = 8 \cdot 7! = 8!$

Wszystkich permutacji danego zbioru, w których 1 i 9 sąsiadują ze sobą jest zatem $2 \cdot 8!$

Tak więc wszystkich permutacji danego zbioru, w których 1 i 9 nie sąsiadują ze sobą jest $9! - 2 \cdot 8! = 7 \cdot 8!$

Odp: $7 \cdot 8!$

Zadanie 2.
Ile jest różnych liczb 4-cyfrowych utworzonych z cyfr 1, 2, 3, …, 9, jeżeli założymy, że
a.) żadna cyfra nie powtarza się w liczbie
b.) cyfry w liczbie mogą się powtarzać?

Rozwiązanie

a.) Liczb 4-cyfrowych utworzonych z cyfr 1, 2, 3, …, 9, charakteryzujących się tym, że żadna cyfra w liczbie nie powtarza się, jest tyle, ile wariacji bez powtórzeń 4-elementowych zbioru 9-elementowego, tzn. $V_9^4 = \frac{9!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024$.

b.) Liczb 4-cyfrowych utworzonych z cyfr 1, 2, 3, …, 9, charakteryzujących się tym, że cyfry w liczbie mogą się powtarzać, jest tyle, ile wariacji z powtórzeniami 4-elementowych zbioru 9-elementowego, tzn. $W_9^4 = 9^4 = 6561$.

Odp: a) 3024, b) 6561.

<u>Zadanie3.</u>
Rozwiązać równanie

a) $C_{x-2}^3 = x-4$ b) $V_{x-1}^2 + C_{x-1}^{x-3} = 63$

Rozwiązanie

a.) Zakładamy, że $x - 2 \geq 3$, skąd $x \geq 5$. Korzystając ze wzorów $\mathbf{C_n^k} = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$ i $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ rozwiązujemy równanie $\frac{(x-2)!}{3!(x-5)!} = x-4$, które przekształcamy zastępując kolejnymi równaniami równoważnymi

$$\frac{(x-5)!(x-4)(x-3)(x-2)}{6(x-5)!} = x-4$$

$$(x-4)(x-3)(x-2) = 6(x-4)$$

$$(x-4)(x^2-5x) = 0$$

Ponieważ musi być $x \geq 5$, więc równanie to ma dokładnie jedno rozwiązanie $x = 5$.

b.) Zakładamy, że $x - 1 \geq 2$, skąd $x \geq 3$. Korzystając ze wzorów $\mathbf{C_n^k} = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$, $\mathbf{V_n^k} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{(n-k)!}}$ i $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ rozwiązujemy równanie $\frac{(x-1)!}{(x-3)!} + \frac{(x-1)!}{(x-3)!\cdot 2!} = 63$, które przekształcamy zastępując kolejnymi równaniami równoważnymi

$$\frac{2}{3}(x-2)(x-1) = 63$$

$$x^2 - 3x - 40 = 0$$

Wobec założenia $x \geq 3$, równanie to ma dokładnie jedno rozwiązanie $x = 8$.

Odp: a) $x = 5$, b) $x = 8$.

# 5. CIĄG ARYTMETYCZNY

Rozpatrzmy ciągi
( 1 , 4 , 7 , 10 , … )
( 50 , 25 , 0 , -25 , … )
$\left( 1 , \frac{3}{2} , 2 \right)$

Zauważmy, że w ciągach tych różnica między kolejnymi wyrazami jest stała.

**Def.** Ciąg liczbowy, w którym różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami jest stała nazywamy **ciągiem arytmetycznym**

$$a_{n+1} - a_n = r$$

r - różnica ciągu arytmetycznego

UWAGA!

1. Ciąg arytmetyczny skończony musi mieć co najmniej 3 wyrazy
2. Jeśli $r > 0$, to ciąg arytmetyczny jest rosnący
   Jeśli $r < 0$, to ciąg arytmetyczny jest malejący
   Jeśli $r = 0$ to ciąg arytmetyczny jest stały

**Tw.** Jeżeli $(a_n)$ jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r, to n-ty wyraz ciągu $(a_n)$ wyraża się wzorem

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

**Dowód** (indukcyjny)
1.) sprawdzamy, czy wzór jest prawdziwy dla n = 1
n = 1
$a_1 = a_1 + (1-1)r$
$a_1 = a_1$
$L = P$
Twierdzenie jest prawdziwe dla n = 1
2.) założenie
$a_n = a_1 + (n-1)r$ ( $T_n$ )
Teza
$a_{n+1} = a_1 + nr$ ( $T_{n+1}$ )
Dowód
$a_{n+1} = a_n + r = a_1 + (n-1)r + r = a_1 + nr - r + r = a_1 + nr$
Na mocy indukcji matematycznej twierdzenie jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej.

*Przykład*
Wiadomo, że $a_1 = 3$ i $r = 2$. Obliczyć $a_{1996}$
$a_n = a_1 + (n-1)r$
$a_{1996} = a_1 + (1996-1)r$
$a_{1996} = 3 + 1995 \cdot 2 = 3993$

**Tw.** Każdy wyraz ciągu arytmetycznego z wyjątkiem pierwszego i ostatniego (jeśli ciąg jest skończony) jest średnią arytmetyczną wyrazów poprzedniego i następnego.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

**Dowód**

$a_{n-1} = a_1 + (n-2)r$

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$a_{n+1} = a_1 + nr$

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_1 + (n-2)r + a_1 + nr}{2} = \frac{2a_1 + 2nr - 2r}{2} = a_1 + nr - r = a_1 + (n-1)r$$

*Przykład*

Wyznaczyć $a_6$, jeśli $a_5 = 8$ i $a_7 = 4$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$a_6 = \frac{a_5 + a_7}{2}$$

$$a_6 = \frac{8+4}{2}$$

$a_6 = 6$

**Tw.** Suma n-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego wyraża się wzorem

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

**Dowód** (indukcyjny)

1.) sprawdzamy, czy wzór jest prawdziwy dla n = 1

n = 1

$$S_1 = \frac{a_1 + a_1}{2} \cdot 1 = \frac{2a_1}{2} = a_1$$

Twierdzenie jest prawdziwe dla n = 1

2.) założenie

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Teza

$$S_{n+1} = \frac{a_1 + a_{n+1}}{2} \cdot (n+1)$$

**Dowód**

$$S_{n+1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n + a_{n+1} = \frac{a_1 n + a_n n + 2a_{n+1}}{2} =$$

$$= \frac{na_1 + a_n + (n-1)a_n + 2a_{n+1}}{2} = \frac{na_1 + a_1 + (n-1)r + (n-1)a_n + 2a_{n+1}}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)a_1 + (n-1)a_{n+1} + 2a_{n+1}}{2} = \frac{(a_1 + a_{n+1})(n+1)}{2} = \frac{a_1 + a_{n+1}}{2}(n+1)$$

Na mocy indukcji matematycznej twierdzenie jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej.

*Przykład*

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych do 1 do 99

$a_1 = 1$

$a_{99} = 99$

$$S_{99} = \frac{a_1 + a_{99}}{2} \cdot 99 = \frac{1+99}{2} \cdot 99 = 50 \cdot 99 = 4950$$

Zadanie 1.

Wyznaczyć ciąg arytmetyczny, w którym suma 3 pierwszych wyrazów wynosi 27, a suma ich kwadratów 275

$(a_1 , a_2 , a_3 , \ldots)$ - szukany ciąg

Z treści zadania wynika, że

$a_1 + a_2 + a_3 = 27$

$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 275$

Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_1 + 2r$

Otrzymujemy

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r = 27 \\ a_1^2 + (a_1 + r)^2 + (a_1 + 2r)^2 = 275 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a_1 + 3r = 27 \\ a_1^2 + a_1^2 + 2a_1 r + r^2 + a_1^2 + 4a_1 r + 4r^2 = 275 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + r = 9 \\ 3a_1^2 + 6a_1 r + 5r^2 = 275 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 9 - r \\ 3(9-r)^2 + 6(9-r)r + 5r^2 = 275 \end{cases}$$

$3(81 - 18r + r^2) + 6(9r - r^2) + 5r^2 = 275$

$243 - 54r + 3r^2 + 54r - 6r^2 + 5r^2 = 275$

$243 + 2r^2 = 275$

$2r^2 = 32$

$r^2 = 16$

$$\begin{array}{lcl} r = 4 & & r = -4 \\ a_1 = 5 & & a_1 = 13 \\ a_2 = 9 & \vee & a_2 = 9 \\ a_3 = 13 & & a_3 = 5 \end{array}$$

Odp: Istnieją dwa takie ciągi o postaci ( 5 , 9 , 13 , … ) lub ( 13 , 9 , 5 , … )

Zadanie 2.

Rozwiąż równanie

$1 + 7 + 13 + 19 + \ldots + x = 280$

Lewa strona równania jest sumą ciągu arytmetycznego w którym $a_1 = 1$, $r = 6$ i $a_n = x$. Suma n wyrazów wynosi $S_n = 280$. Otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} x = 1 + (n-1)6 \\ 280 = \dfrac{1+x}{2} n \end{cases}$$

$280 = \dfrac{1 + 1 + (n-1)6}{2} n$

$560 = (2 + 6n - 6)n$

$560 = 6n^2 - 4n$

$$6n^2 - 4n - 560 = 0$$

$$3n^2 - 2n - 280 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-280) = 4 + 3360 = 3364$$

$$\sqrt{\Delta} = 58$$

$$n_1 = \frac{2-58}{2 \cdot 3} \quad \vee \quad n_2 = \frac{2+58}{2 \cdot 3}$$

$$n_1 = -\frac{28}{3} \qquad n_2 = 10$$

$$x_1 = 1 + \left(-\frac{28}{3} - 1\right)6 \qquad x_2 = 1 + (10-1) \cdot 6$$

$$x_1 = 1 - 62 = -61 \qquad x_2 = 1 + 9 \cdot 6 = 55$$

Układ ten ma dwa rozwiązania: $n = 10, x = 55$ oraz $n = -\frac{28}{3}, x = -61$

Ponieważ n oznacza liczbę sumowanych wyrazów ciągu, więc drugie z tych rozwiązań odrzucamy.

Odp: Rozwiązaniem równania jest $x = 55$.

Zadanie 3.

Wyznaczyć sumę wszystkich dwucyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 3

Liczby dwucyfrowe - 10 , 11 , … , 99

Liczby dwucyfrowe podzielne przez 3 - 12 , 15 , 18 , … , 99

$a_1 = 12$

$a_{99} = 99$

$r = 3$

Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu wyznaczam n

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$n = \frac{a_n - a_1 + r}{r}$$

$$n = \frac{99 - 12 + 3}{3} = \frac{90}{3} = 30$$

Stosując wzór na sumę otrzymamy

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{12 + 99}{2} \cdot 30 = 1665$$

# 6. CIĄG GEOMETRYCZNY

Rozpatrzmy ciągi

$\left( 1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \dots \right)$

$( 3 , 9 , 27 , 81 , \dots )$

$( 10 , 100 , 1000 )$

Zauważmy, że we wszystkich ciągach iloraz między kolejnymi wyrazami jest wielkością stałą

**Def.** Ciąg liczbowy, w którym iloraz pomiędzy kolejnymi wyrazami jest stały nazywamy **ciągiem geometrycznym**

$$\frac{a_n + 1}{a_n} = q$$

$q$ - iloraz ciągu geometrycznego

UWAGA!
1. Ciąg geometryczny musi mieć co najmniej 3 wyrazy
2. Żaden wyraz ciągu geometrycznego nie może być równy 0
   Niekiedy ciąg geometryczny definiuje się w ten sposób: $a_{n+1} = a_n \cdot q$ ,
   Wówczas mogą występować wyrazy równe 0

**Tw.** Wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego wyraża się wzorem

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

**Dowód** (indukcyjny)
1.) Sprawdzamy, czy wzór jest prawdziwy dla $n = 1$

$n = 1$

$$a_1 = a_1 \cdot q^0$$

$$a_1 = a_1$$

$$L = P$$

Twierdzenie jest prawdziwe dla n = 1

2.) założenie

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Teza

$$a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$$

**Dowód**

$$a_{n+1} = a_n \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} q = a_1 \cdot q^n$$

Na mocy indukcji matematycznej twierdzenie jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej.

*Przykład*

Wyznaczyć $a_5$, jeżeli $a_1 = \frac{1}{3}$ i $q = \frac{1}{2}$

$$a_5 = a_1 \cdot q^4$$

$$a_5 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{48}$$

**Tw.** **a)** Każdy wyraz ciągu geometrycznego z wyjątkiem $a_1$ i $a_n$, jeśli ciąg jest skończony spełnia warunek

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

**b)** Jeżeli wyrazy ciągu są dodatnie, to

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \qquad \text{- średnia geometryczna}$$

**Dowód**

$$a_{n-1} = a_1 \cdot q^{n-2}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$$

$$a_n^2 = a_1 \cdot q^{n-2} \cdot a_1 \cdot q^n = a_1^2 \cdot q^{n-2} \cdot q^n = a_1^2 \cdot q^{2n-2} = a_1^2 \cdot q^{2(n-1)} = (a_1 \cdot q^{n-1})^2 = a_n^2$$

*Przykład*

Wyznaczyć $a_n$, jeśli $a_3 = \frac{20}{9}$ i $a_5 = -\frac{80}{81}$

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

$$a_n^2 = a_3 \cdot a_5$$

$$a_n^2 = \frac{20}{9} \cdot \frac{80}{81} = \frac{1600}{729}$$

$$a_n = \frac{40}{27} \quad \vee \quad a_n = -\frac{40}{27}$$

**Tw.** Suma n-początkowych wyrazów ciągu geometrycznego wyraża się wzorem

$$S_n = \begin{cases} n \cdot a_1 & \text{dla } q = 1 \\ a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} & \text{dla } q \neq 1 \end{cases}$$

**Dowód**

a) dla $q = 1$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

ponieważ $q = 1$, ciąg jest stały

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_1 + a_1 + \ldots + a_1}_{n} = n \cdot a_1$$

b) dla $q \neq 1$ (indukcyjny)

1) dla n = 1

$$S_1 = a_1$$

$$S_1 = a_1 \frac{1-q}{1-q} = a_1$$

2) Założenie

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

Teza

$$S_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} + a_{n+1} = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} + a_1 \cdot q^n = a_1 \left( \frac{1-q^n}{1-q} + q^n \right) =$$

$$= a_1 \left( \frac{1-q^n + q^n(1-q)}{1-q} \right) = a_1 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Na mocy indukcji matematycznej twierdzenie jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej

*Przykład*

Wyznaczyć sumę 6 początkowych wyrazów ciągu geometrycznego $a_1 = 2$ i $q = 3$

Korzystając ze wzoru na sumę n-początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$S_n = 2\frac{1-3^6}{1-3} = -1(1-3^6) = -1 + 3^6 = -1 + 729 = 728$$

Zadanie 1.

Między liczby 32 i 500 wstawić dwie tak, aby wszystkie cztery tworzyły ciąg geometryczny

( 32 , $a$ , $b$ , 500 ) - dany ciąg

$a$ - pierwsza liczba

$b$ - druga liczba

Korzystam ze wzoru na średnią geometryczną

$$a_n^2 = a_{n+1} \cdot a_{n-1}$$

$$\begin{cases} a^2 = 32 \cdot b \\ b^2 = a \cdot 500 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{a^2}{32} \\ \left(\frac{a^2}{32}\right)^2 = 500a \end{cases}$$

$$\frac{a^4}{1024} = 500a$$

$$a^4 = 512000a$$

$$a^3 = 512000$$

$$a = 80$$

$$b = 200$$

Odp: Szukanymi liczbami są $a = 80$ i $b = 200$. Liczby c nie znalazłam

Zadanie 2.

Trzy liczby, których suma jest równa 7 tworzą ciąg geometryczny - malejący. Największa z nich jest iloczynem liczby $\frac{4}{3}$ przez sumy pozostałych. Wyznacz te liczby.

Niech liczby $a$ , $b$ , $c$ tworzą ciąg geometryczny malejący, więc $a > b > c$.

Z warunków zadania otrzymujemy układ równań.

$$\begin{cases} b^2 = a \cdot c \\ a+b+c=7 \\ a = \frac{4}{3}(b+c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 = a \cdot c \\ b+c=7-a \\ a = \frac{4}{3}(7-a) \end{cases}$$

$a = \frac{28}{3} - \frac{4}{3}a$

$\frac{7}{3}a = \frac{28}{3}$

$a = 4$

$$\begin{cases} b^2 = 4c \\ b+c=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 3-c \\ (3-c)^2 = 4c \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 3-c \\ 9-6c+c^2 = 4c \end{cases}$$

$c^2 - 10c + 9 = 0$

$\Delta = 100 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 64$

$\sqrt{\Delta} = 8$

$c_1 = \frac{10-8}{2}$ $\quad \vee \quad$ $c_2 = \frac{10+8}{2}$

$c_1 = 1$ $\qquad\qquad$ $c_2 = 9$

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ b_1 = 2 \\ c_1 = 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} a_2 = 4 \\ b_2 = -6 \\ c_2 = 9 \end{cases}$$

nie spełnia

Odp: Rozwiązaniem są liczby 4 , 2 , 1.

<u>Zadanie 3.</u>

Sprawdź, czy liczby $a = 3 - 2\sqrt{2}$ , $b = 10 - 7\sqrt{2}$ i $c = 34 - 24\sqrt{2}$ tworzą postęp geometryczny.

Jeżeli liczby a , b , c tworzą postęp geometryczny, to muszą spełniać warunek

$b^2 = a \cdot c$

$(10 - 7\sqrt{2})^2 = (3 - 2\sqrt{2}) \cdot (34 - 24\sqrt{2})$

$100 - 140\sqrt{2} + 98 = 102 - 72\sqrt{2} - 68\sqrt{2} + 96$

$198 - 140\sqrt{2} = 198 - 140\sqrt{2}$

$L = P$

Odp: Liczby a , b , c tworzą postęp geometryczny.

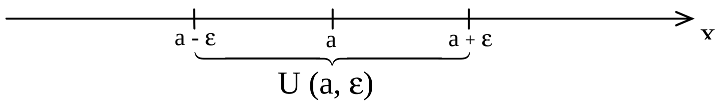
# 7. GRANICA CIĄGU LICZBOWEGO

I. Wstęp

**Def.** Ciąg, którego elementami są liczby nazywamy **ciągiem liczbowym**

**Def.** Niech dana będzie prosta (oś liczbowa) i punkt $a$ na tej prostej.
Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią (ε > 0).
Przedział otwarty ($a$ - ε , $a$ + ε) nazywamy **epsilonowym otoczeniem punktu *a***

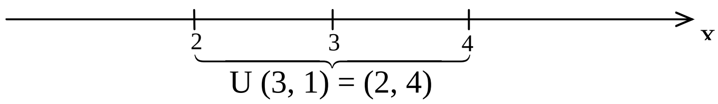
$\varepsilon > 0$




Liczbę ε nazywamy **promieniem otoczenia**.

*Przykład*

$a = 3$
$\varepsilon = 1$




Zauważmy, że punkt x należy do otoczenia punktu $a$ jeśli zachodzi

$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$
$-\varepsilon < x - a \quad \wedge \quad x - a < \varepsilon$
$-\varepsilon < x - a < \varepsilon$
$|x - a| < \varepsilon$

$|a| < d \iff a > -b$
$a < -b$
inaczej
$-b < a < b$

Zwrot „**prawie wszystkie wyrazy ciągu**" odnosi się do ciągów nieskończonych i oznacza to tyle co: wszystkie wyrazy ciągu z wyjątkiem skończonej ich liczby

*Przykład*

1. Prawie wszystkie liczby naturalne są większe od 10
   zdanie prawdziwe
2. Prawie wszystkie liczby są nieparzyste
   zdanie fałszywe

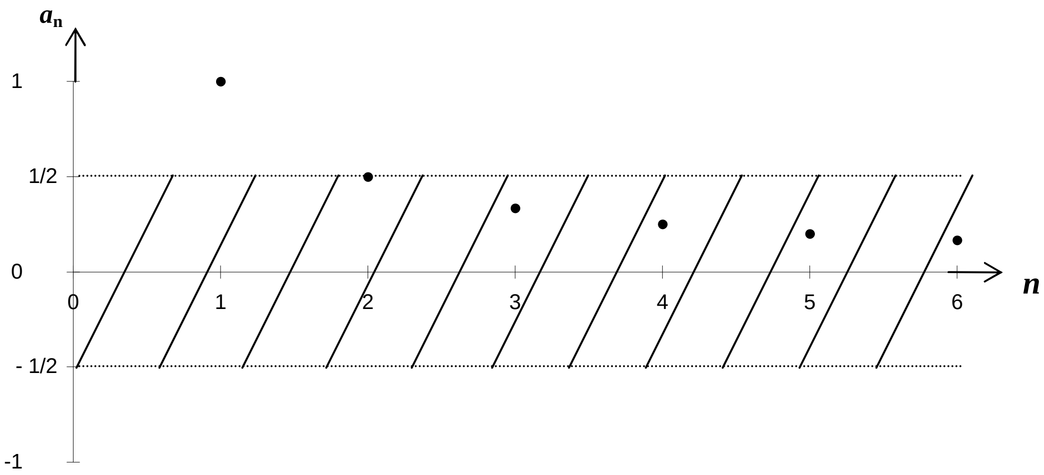
II. Granica ciągu liczbowego

*Przykład*

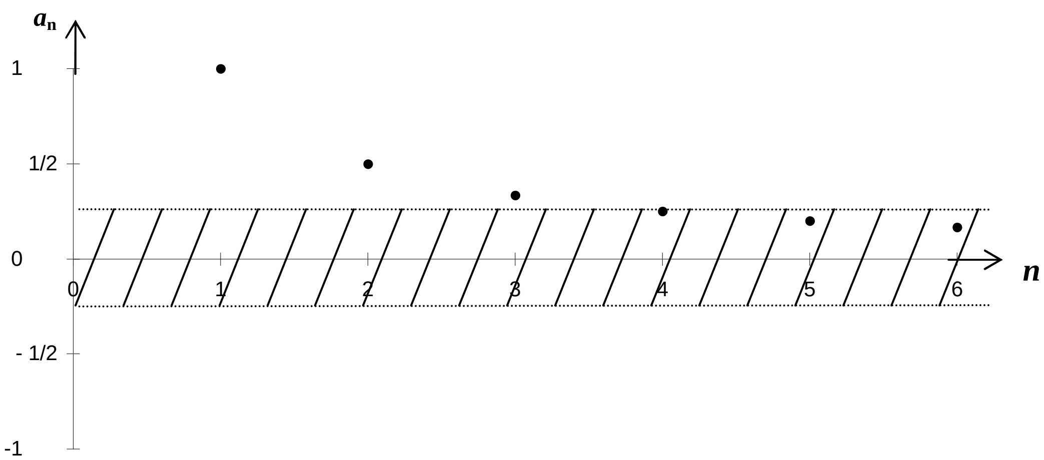
Rozważmy ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \dfrac{1}{n}$ tj. $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$

Weźmy punkt 0 i skonstruujmy kilka otoczeń tego punktu

a) $\varepsilon = \frac{1}{2}$




a) $\varepsilon = \frac{1}{4}$




W każdym wypadku poza otoczeniem punktu 0 pozostaje skończona liczba ciągu ($a_n$).
Zawsze można wyznaczyć takie $n_0$ , że po skreśleniu $n_0$ - początkowych wyrazów ciągu, wszystkie następne (tj. dla $n > n_0$ ) będą należały do tego otoczenia.
O liczbie „zero” powiemy, że jest granicą ciągu ($a_n$).

**Def.** Mówimy, że liczba *a* jest **granicą ciągu ($a_n$)**, jeśli do dowolnego otoczenia liczby *a* należą prawie wszystkie wyrazy ciągu ($a_n$).

Piszemy: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

limes - z łac. - granica
Ciąg, który ma granice nazywamy **zbieżnym**.
Zamiast $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ używa się $a_n \to a$
Powyższą definicję można zapisać następująco:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} |a_n - a| < \varepsilon$$

(Mówimy, że ciąg ($a_n$) ma granicę a, jeśli dla każdego $\varepsilon = 0$ istnieje liczba naturalna $n_0$ taka, że dla wszystkich liczb naturalnych $n > n_0$ odległość pomiędzy wyrazem ciągu $a_n$ i liczbą $a$ jest mniejsza niż ε )

Powyższą definicję sformułował August Ludwig Cauchy [czyt. Koszi] (1789 - 1857)

Jest to **definicja Cauchy'ego**.

Aby z definicji wykazać, że ciąg ($a_n$) ma granicę równą $a$ trzeba pokazać, że jeśli tylko wyraz ciągu będzie miał wskaźnik większy od $n_0$ to będzie należał do epsilonowego otoczenia punktu $a$.

*Przykład*

Korzystając z definicji wykaż, że granicą ciągu $a_n = \frac{1}{n}$ jest liczba 0.

$a_n = \frac{1}{n} \quad a = 0$

$|a_n - a| < \varepsilon$

$|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$

$|\frac{1}{n}| < \varepsilon$

$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad / \cdot n$

$1 < \varepsilon \cdot n \quad /:\varepsilon$

$\frac{1}{\varepsilon} < n$

$n > \frac{1}{\varepsilon_0}$

$n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$

Ponieważ $n_0$ ma być liczbą naturalną więc $n_0 = [\frac{1}{\varepsilon}]$

Pokazaliśmy, że istnieje taka liczba naturalna $n_0$ , że jeśli tylko $n > n_0$ , to zachodzi $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ , co oznacza, że 0 jest granicą ciągu ($a_n$).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

<u>Zadanie 1.</u>

Wykaż, że: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = 1$

$a_n = \frac{n+2}{n}$

$a = 1$

Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$

Rozpatrzmy:

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

$|\frac{n+2}{n} - 1| < \varepsilon$

$|\frac{n+2}{n} - \frac{n}{n}| < \varepsilon$

$|\frac{2}{n}| < \varepsilon$

$\frac{2}{n} < \varepsilon$

$n > \frac{2}{\varepsilon}$

Zatem $n_0 = [\frac{2}{\varepsilon}]$

Pokazaliśmy, że istnieje taka liczba $n_0$, że jeśli tylko $n > n_0$ , to zachodzi $|\frac{n+2}{n} - 1| < \varepsilon$ , co oznacza, że 1 jest granicą ciągu ($a_n$).

Zadanie 2.

Wykaż, że: $\lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{3n-1}=2$

$a_n=\frac{6n+1}{3n-1}$ $a=2$

Weźmy dowolne ε > 0
Rozpatrzmy:

$|a_n - a| < \varepsilon$

$\left|\frac{6n+1}{3n-1}-2\right|<\varepsilon$

$\left|\frac{6n+1}{3n-1}-\frac{6n-2}{3n-1}\right|<\varepsilon$

$\frac{|3|}{|3n-1|}<\varepsilon$

$3+\varepsilon<3n\cdot\varepsilon$

$n>\frac{3+\varepsilon}{3\cdot\varepsilon}$

$n_a=\left[\frac{3+\varepsilon}{3\cdot\varepsilon}\right]$

Pokazaliśmy, że istnieje taka liczba naturalna $n_0$, że jeśli tylko $n > n_0$ to zachodzi $\left|\frac{6n+1}{3n-1}-2\right|<\varepsilon$, co oznacza, że 2 jest granicą ciągu $(a_n)$.

Zadanie 3.

Wykaż, że:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2}=1$$

$a_n=\frac{n^2}{n^2+2}$ $a=1$

Weźmy dowolne ε > 0
Rozpatrzmy:

$|a_n-a|<\varepsilon$

$\left|\frac{n^2}{n^2+2}-1\right|<\varepsilon$

$\left|\frac{-2}{n^2+2}\right|<\varepsilon$

$\frac{|-2|}{|n^2+2|}<\varepsilon$

$\frac{2}{n^2+2}<\varepsilon$

$2<\varepsilon n^2+2\varepsilon$

$n^2>\frac{2-2\varepsilon}{\varepsilon}$

$n>\sqrt{\frac{2-2\varepsilon}{\varepsilon}}$

Zatem

$$n_0 = \left[\sqrt{\frac{2-2\varepsilon}{\varepsilon}}\right]$$

Pokazaliśmy, że istnieje liczba naturalna $n_0$ taka, że jeśli tylko $n > n_0$ to zachodzi $\left|\frac{n^2}{n^2+2} - 1\right| < \varepsilon$ co oznacza, że 1 jest granicą ciągu $(a_n)$.

III. Własności ciągów zbieżnych

**Tw.** Każdy ciąg może mieć co najwyżej 1 granicę.

**Tw.** Granicą ciągu stałego ( $a$ , $a$ , $a$ …) jest liczba $a$

$$\lim_{n\to\infty} a = a$$

**Tw.** ( o działaniach arytmetycznych na granicach)

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} = a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ , to:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a + b$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a - b$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$ ; $b_n \neq 0$ i $b \neq 0$

**Tw.** (o wyłączaniu stałej przed znak granicy)

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $k \in$ R , to:

$\lim\limits_{n\to\infty}(k \cdot a_n) = k \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = k \cdot a$

**Tw.** (o zachowaniu nierówności)

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ oraz $a_n \geq b_n$ , to:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ ( $a > b$ )

**Tw.** Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony

( twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, tzn. nieprawdą jest, że każdy ciąg ograniczony jest zbieżny

np.

$a_n = (-1)^n$

( -1 , 1 , -1 , 1 , … )

**Tw.** ( o trzech ciągach )

Jeżeli $a_n \leq b_n \leq c_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = b$ ,

to $(b_n)$ jest zbieżny oraz zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

**Tw.** a) Jeżeli $a_n \to a$ to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

# 8. WYZNACZANIE GRANIC CIĄGÓW ZBIEŻNYCH

I.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(3\cdot\frac{1}{n})=3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=3\cdot 0=0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}(2\cdot\frac{1}{n^2})=2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=2\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n})=2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=2\cdot 0\cdot 0=0$

II.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2}\overset{!}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2+2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n^2})}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{1+0}=1$$

**!** Jeżeli chcemy obliczyć granicę ciągu ($a_n$) , którego wzór ogólny dany jest ilorazem, należy podzielić licznik i mianownik przez najwyższą potęgę mianownika.

III.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{2n^2+3}\overset{(*)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+n}{2}}{2n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{4n^2+6}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{4+\frac{6}{n^2}}=\frac{1}{4}$$

$(*)$ zauważmy, że w liczniku mamy sumę n-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

$$S_n=\frac{1+n}{2}\cdot n=\frac{n^2+n}{2}$$

IV.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}-2n}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n^2+3n}}{n}-2}{1+\frac{3}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2}}-2}{\frac{3}{n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{3}{n}}-2}{\frac{3}{n}+1}=-1$$

V.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}-n)=\lim_{n\to\infty}\left[(\sqrt{n^2+3n}-n)\cdot\left(\frac{\sqrt{n^2+3n}+n}{\sqrt{n^2+3n}+n}\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\sqrt{n^2+3n}+n)}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}=\frac{3}{\sqrt{1}+1}=\frac{3}{2}$$

<u>Zadanie 1.</u>
Oblicz:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3-7}{n^3-2n^2+n-2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-\frac{7}{n^3}}{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}}=\dfrac{3}{1}=3$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)(1-n)}{(n+1)n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2n^2+3n-1}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=-2$

<u>Zadanie 2.</u>
Oblicz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)!-n!}{n!(n+1)!+n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n![(n+1)!-n!]}{n![(n+1)!+n!]}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=\frac{1}{1}=1$$

Zadanie 3.
Oblicz:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2-2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2-2}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2}}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1-n^2+2}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+n\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}\right)}=\frac{1}{2\cdot\infty}=0$$

# 9. LICZBA e

I. Rozpatrzmy ciąg o wyrazie ogólnym $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

( $n$ = 1 , 2 , … )

1. Wykażemy, iż ciąg ($a_n$) jest rosnący. Korzystając z nierówności Bernouliego tj. $n > 1$.

$$(1+x)^n > 1+nx \quad \text{gdzie} \quad x > -1 \ \wedge\ x \neq 0$$

i podstawiając w miejsce $x=-\frac{1}{n^2}$ otrzymamy:

$$(1-\tfrac{1}{n^2})^n > 1-\tfrac{1}{n}$$

$$[(1+\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{1}{n})]^n > 1-\tfrac{1}{n}$$

$$(1+\tfrac{1}{n})^n(\tfrac{n-1}{n})^n > \tfrac{n-1}{n} \quad /:(\tfrac{n-1}{n})$$

$$(1+\tfrac{1}{n})^n(\tfrac{n-1}{n})^n:(\tfrac{n-1}{n}) > 1$$

$$(1+\tfrac{1}{n})^n(\tfrac{n-1}{n})^{n-1} > 1 \quad /\cdot(\tfrac{n}{n-1})^{n-1}$$

$$(1+\tfrac{1}{n})^n > (\tfrac{n}{n-1})^{n-1}$$

A więc mamy

$$a_n=(1+\tfrac{1}{n})^n > (\tfrac{n}{n-1})^{n-1}=\tfrac{n-1+1}{n-1}^{n-1}=(1+\tfrac{1}{n-1})^{n-1}=a_{n-1}$$

$$a_n > a_{n-1}$$

Wniosek: Ciąg ($a_n$) jest zatem rosnący.

2. Wykażemy, że ciąg ($a_n$) jest ograniczony.
Korzystając z dwumianu Newtona otrzymamy:

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\binom{n}{0}1^n\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^0+\binom{n}{1}1^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^1+\ldots+\binom{n}{n}1^0\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n=$$

$$=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n!}{2!(n-2)!}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n!}{n!(n-n)!}\cdot\frac{1}{n^n}=1+1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n}=1+1+\frac{\frac{n(n-1)}{n^2}}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n^n}}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)n}=1+1+\frac{\frac{(n-1)}{n}}{1\cdot 2}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n^{n-1}}}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)n}=1+1+\frac{\frac{(n-1)}{n}}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{n-1}{n})}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)n}<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}<$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$a_n < 1+1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2^2}+\ldots+\tfrac{1}{2^{n-1}}$$

Zauważmy, że $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$ jest sumą n-początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o wyrażeniu $a_1 = 1$ i $q = \frac{1}{2}$

Podstawiając do wzoru na sumę n-początkowych wyrazów ciągu geometrycznego otrzymamy:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$S_n = 1 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 2(1-\frac{1}{2^n})$$

$$a_n < 1+2(1-\frac{1}{2^n}) < 1+2 = 3 \quad ; \quad a_n < 3$$

***Wniosek***

Ciąg ($a_n$) jest ograniczony z góry przez liczbę 3.

$a_n (1+\frac{1}{n})^n$

Korzystając z nierówności Bernouliego $(1 + x)^n > 1 + nx$ i podstawiając w miejsce $x = \frac{1}{n}$ otrzymamy:

$$(1+\frac{1}{n})^n > 1+n\cdot\frac{1}{n}$$

$$(1+\frac{1}{n})^n > 1+1$$

$$a_n = (1+\frac{1}{n})^n > 2$$

$$a_n > 2$$

***Wniosek***

Ciąg ($a_n$) jest ograniczony z dołu przez liczbę 2.

3. Ponieważ ciąg ($a_n$) jest ograniczony i monotoniczny, więc na mocy twierdzenia jest zbieżny - ma granicę.

   Jego granicą jest liczba **e** .

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Liczba **e** zwana inaczej liczbą Nepera jest to liczba będąca granicą ciągu liczbowego nieskończonego $(1+\frac{1}{n})^n$

**e** = 2,71821828459…

Oznaczenie jej wprowadził w 1736 roku matematyk szwajcarski Leonhard Euler. Liczba **e** jest niewymierna (podobnie jak π) i przestępna (nie jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych).

Ma szerokie zastosowanie w matematyce i w fizyce, jest podstawą logarytmu naturalnego oraz funkcji wykładniczej.

## II. GRANICE Z LICZBĄ **e**

Przy wyznaczaniu granic z liczbą **e** wygodnie jest korzystać z twierdzenia:

**Tw.** Jeżeli ciąg ($a_n$) jest takim ciągiem, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{i} \quad a_n \neq 0 \text{ , to } \lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$$

Zadanie

Wyznaczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

a.) $a_n = (1+\frac{2}{n})^n$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^n = \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{2}{n})^{\frac{n}{2}}]^2 = e^2$$

b.) $a_n = (1-\frac{1}{n})^n$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{-1}{n})^{\frac{n}{-1}}]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

c.) $a_n = (1-\frac{4}{n})^{-n+3}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{4}{n})^{-n+3} = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{4}{n})^{-n}\cdot(1-\frac{4}{n})^3 = \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{-4}{n})^{\frac{n}{-4}}]^4\cdot\lim_{n\to\infty}(1-\frac{4}{n})^3 = e^4\cdot 1 = e^4$$

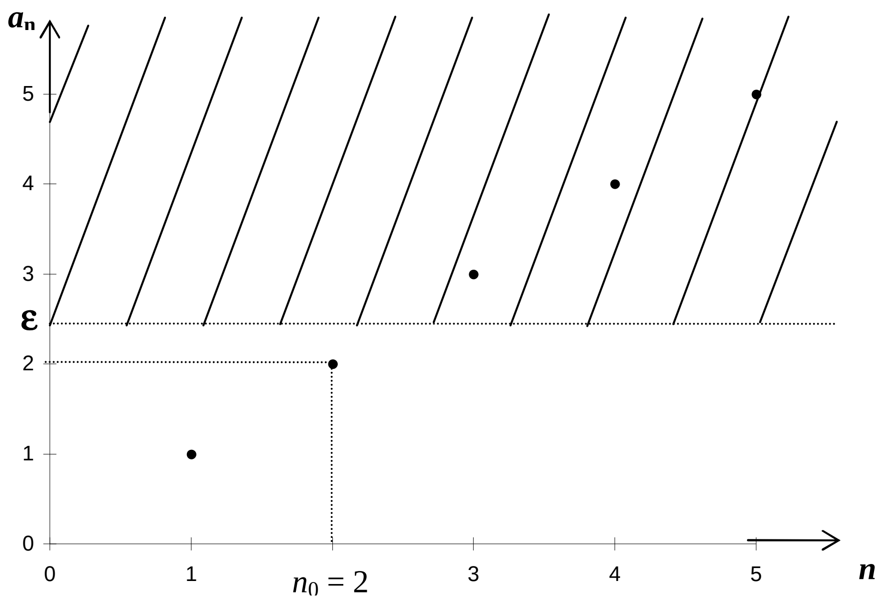
# 10. CIĄGI ZBIEŻNE DO NIESKOŃCZONOŚCI

I.

*Przykład*

Weźmy ciąg $(a_n) = n$

$(a_n) = (1, 2, 3, 4, \ldots)$




Zauważmy, że biorąc dowolną liczbę $\varepsilon > 0$ prawie wszystkie wyrazy ciągu $(a_n)$ są większe od $\varepsilon$.

**Def.** Mówimy, że ciąg $(a_n)$ dąży do $+\infty$ (jest rozbieżny do $+\infty$), jeśli dla każdej (dowolnej) liczby $\varepsilon > 0$ prawie wszystkie wyrazy ciągu są większe od $\varepsilon$.

Piszemy: $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Możemy zapisać:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0}\ \bigvee_{n_0}\ \bigwedge_{n>n_0} a_n > \varepsilon$$

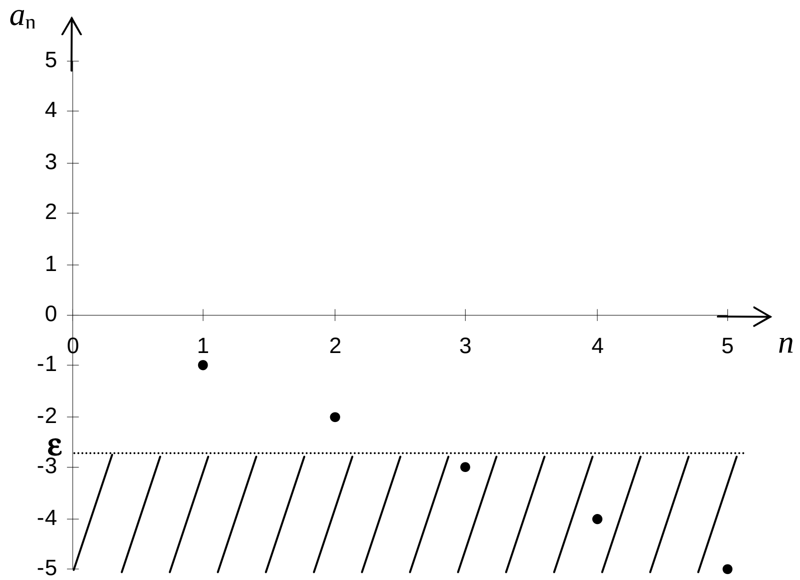
UWAGA !!!

1. Ciągami rozbieżnymi nazywa się też ciągi, które nie mają żadnej granicy.
2. Jeśli granicą ciągu $(a_n)$ jest $+\infty$ to mówimy, że ciąg ma granicę niewłaściwą.

*Przykład*

$(a_n) = -n$

$(a_n) = (-1 , -2 , -3 , \ldots)$




Zauważmy, że biorąc dowolną liczbę $\varepsilon > 0$ prawie wszystkie wyrazy ciągu są mniejsze od $-\varepsilon$ .
Powiemy, że $(a_n) \to -\infty$ .

**Def.** Mówimy, że ciąg $(a_n)$ dąży do $-\infty$ (jest rozbieżny do $-\infty$), jeśli dla każdej dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ prawie wszystkie wyrazy ciągu są mniejsze od $-\varepsilon$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} a_n < -\varepsilon$$

<u>Zadanie</u>

Korzystając z definicji wykaż, że:

$$\lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

Mamy ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = n$

Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$

$a_n > \varepsilon$

$n > \varepsilon$

$n_0 = [\ \varepsilon\ ]$

Pokazaliśmy, że istnieje taki wskaźnik $n_0 = [\ \varepsilon\ ]$ , że jeśli tylko $n > n_0$ to spełniony jest warunek $a_n > \varepsilon$ , co oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

II. Twierdzenie o ciągach rozbieżnych.

**Tw.** Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ , to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

*Przykład*

$a_n = n \to +\infty$ $\qquad$ $a_n = -n \to -\infty$

$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n} \to 0$ $\qquad$ $\frac{1}{a_n} = -\frac{1}{n} \to 0$

**Tw.** a.) Jeżeli $a_n > 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$

b.) Jeżeli $a_n < 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$

**Tw.** a.) Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ i wyrazy $b_n \geq a_n$ , to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$

b.) Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ i wyrazy $b_n \leq a_n$ , to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$

**Tw.** a.) Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ , to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = +\infty$

b.) Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ , to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = -\infty$

**Tw.** a.) Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ , to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$

b.) Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ , to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$

III. Symbole nieoznaczone

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ to o granicy ciągu ($a_n$ - $b_n$) nie można nic powiedzieć.

*Przykład*

a.) $\left.\begin{array}{ll} a_n = n & a_n \to +\infty \\ b_n = n & b_n \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(n-n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$

b.) $\left.\begin{array}{ll} a_n = 2n & a_n \to +\infty \\ b_n = n & b_n \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(2n-n) = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$

Mówimy, że są to symbole nieoznaczone typu $\infty - \infty$ . Do symboli nieoznaczonych należą także:

$$0 \cdot \infty$$

$$\frac{0}{\infty}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

W tym wypadku „0” oznacza ciąg zbieżny do zera.

## 12. SZEREG GEOMETRYCZNY

I. <u>Zenon z Elei</u> -grecki filozof. Żył ok. 490 r. p.n.e. do 430 r. p.n.e. Jako jeden z pierwszych zajmował się czasem, ruchem i pojęciem nieskończoności. Uważamy go za prekursora pojęcia szeregu. Najbardziej znane paradoksy Zenona to:

1.) ŻÓŁW I ACHILLES - Achilles nigdy nie dogoni żółwia, bo to co ściga musi przybyć tam, skąd wyruszyło to co ucieka, także to co wolniejsze musi je zawsze wyprzedzać.

2.) STRZAŁA - opiera się na tym, że czas składa się z odrębnych chwil. Jeżeli rzecz zawsze spoczywa albo porusza się, zaś to co się porusza jest zawsze w chwili teraźniejszej to lecąca strzała stoi.

3.) **!** - to co się porusza musi wpierw przybyć do połowy niż do końca drogi

## II. Szereg geometryczny

*Przykład*

Niech dany będzie $\overline{AB}$ o długości $AB = 1$

Dzielimy $\overline{AB}$ punktem $A_1$ na pół, następnie $\overline{A_1B}$ punktem $A_2$ na pół itd.

Zauważmy, że:

$$\overline{AA_1} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{A_1A_2} = \frac{1}{4}$$

$$\overline{A_2A_3} = \frac{1}{8}$$

$$\overline{A_3A_4} = \frac{1}{16}$$

Utworzony ciąg długości tworzy ciąg geometryczny

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots)$ o $a_1 = \frac{1}{2}$ i $q = \frac{1}{2}$

Tworzymy sumy częściowe

$S_1 = AA_1 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$

$S_2 = AA_1 + A_1A_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$

$S_2 = AA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{8}$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Jeżeli *n* wzrasta to $S_n \to 1$

**Def.** Niech dany będzie ciąg geometryczny nieskończony

$$(a_1, a_1 \cdot q, a_1 \cdot q^2, \ldots, a_1 \cdot q^{n-1})$$

Ciąg ( $S_n$ ) gdzie

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_1 \cdot q \\ S_3 &= a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 \\ &\cdots \\ S_n &= a_1 + a_1 \cdot q + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

nazywamy **ciągiem sum częściowych** lub **szeregiem geometrycznym** i oznaczamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 + a_1 q + \ldots$$

Jeżeli ( $S_n$ ) ma granicę S , to tę granicę nazywamy **sumą szeregu geometrycznego** , o szeregu , który ma sumę mówimy, że jest zbieżny.

UWAGA !!!

1.) Szereg geometryczny nazywa się też
**sumą nieskończonego ciągu geometrycznego**

2.) Pojęcie szeregu dotyczy dowolnego ciągu nieskończonego

*Przykład*

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots)$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1 - \tfrac{1}{2^n}) = 0$$

**Tw.** ( **Kryterium zbieżności** szeregu geometrycznego )

Szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$ jest zbieżny, wtedy i tylko wtedy gdy

$|q| < 1$ oraz zachodzi $S_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$

UWAGA !!!

Umawiamy się, że w szeregu q liczby naturalne zaczynają się od 0 (włącznie z 0)

Dowód

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 q^n}{1-q}$$

zał.

$|q| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 q^n}{1-q}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{1-q} - \lim_{n\to\infty}\frac{a_1 q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} = S$$

$(S_n)$ jest zbieżny

III. Ułamki dziesiętne okresowe

Zamień na ułamki zwykłe

a.) 0,(3)

0,3333… = x / ·10

3,33… = 10x

3,333… - 0,333… = 10x - x

3 = 9x

$x = \frac{1}{3}$

b.) 3,333… - 0,333… = 0,3 + 0,03 + 0,003 + … $\overset{(*)}{=} \frac{1}{3}$

(*) Zauważmy, że jest to szereg geometryczny

o $a_1 = 0{,}3$ i $q = \frac{1}{10}$

Ponieważ $|q| < 1$ zatem szereg ten jest zbieżny i można wyznaczyć jego sumę ze wzoru

$$S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S_n = \frac{0{,}3}{1-0{,}1} = \frac{0{,}3}{0{,}9} = \frac{1}{3}$$

Zadanie 1.

Wyznacz sumę szeregu:

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\ldots$$

Wyznaczamy q:

$$q=\frac{1}{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}+2-2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$|q|=\left|\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right|<1$$

Zatem suma szeregu wynosi:

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}{1-\frac{2\sqrt{2}}{2}}=3\sqrt{2}+4$$

Odp: Suma wynosi $3\sqrt{2}+4$.

Zadanie 2.

Rozwiąż równanie:

$$x+\tfrac{x}{2}+\tfrac{x}{4}+\ldots=2$$

Zauważmy, że lewa strona równania jest szeregiem geometrycznym o $a_1$ = x i $q=\frac{1}{2}$.

Ponieważ | q | < 1 to szereg jest zbieżny.

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{x}{\frac{1}{2}}=2x$$

S = 2 = 2x

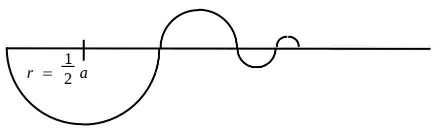
x = 2

Odp: Rozwiązaniem jest x = 2.

Zadanie 3.

Oblicz długość liny składającej się z $\infty$ liczby półokręgów jeśli ich średnice mają odpowiednio

$$a, \tfrac{1}{2}a, \tfrac{1}{4}a, \ldots$$




Zauważmy, że

$$r_1=\tfrac{1}{2}a$$
$$r_2=\tfrac{1}{4}a$$
$$r_3=\tfrac{1}{8}a$$

Długość półokręgu wyraża się wzorem: $L=\frac{2\pi r}{2}=\pi r$ zatem kolejne półokręgi będą miały długość:

$$L_1=\tfrac{a\pi}{2}$$
$$L_2=\tfrac{a\pi}{4} \qquad L_1+L_2+L_3+\ldots=\tfrac{a\pi}{2}+\tfrac{a\pi}{4}+\ldots\overset{(*)}{=}a\pi$$
$$L_3=\tfrac{a\pi}{8}$$

(*) $a_1=\frac{a\pi}{2}$

$q=\frac{1}{2}$ | q | < 1 $\rightarrow$ szereg zbieżny

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{a\pi}{2}}{1-\frac{1}{2}}=a\pi$$

Odp: Lina ma długość $a\pi$.

## ZADANIA DLA CZYTELNIKA

1. Znaleźć 4 liczby tworzące ciąg geometryczny jeżeli wiadomo, że suma wyrazów skrajnych wynosi 36, zaś suma wszystkich czterech jest równa 60.
2. Boki trójkąta tworzą ciąg geometryczny. Jaki warunek musi spełniać iloraz $q$ tego ciągu ?
3. Liczba $a$ jest pierwiastkiem równania

   $2\log(2a - 4) - \log(9 - a) = 2\log 3$

   zaś liczba $b$ wartością wyrażenia

   $(3\sqrt{5})^2(\sin 150^\circ - \cos 120^\circ)$

   Wyznacz $x$ i $y$ tak, aby liczby:

   a.) $a$ , $x$ , $b$ były trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego;

   b.) $a$ , $x$ , $b$ były trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.
4. Oblicz: $2x + 4 + \frac{8}{x} + \ldots = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5 - 16n}{3n + 1}$
5. W kwadrat $k_1$ o boku $a$ wpisano kwadrat $k_2$ tak, że wierzchołki $k_2$ są środkami boków $k_1$ . W kwadrat $k_2$ analogicznie wpisano kwadrat $k_3$ itd.
   a) obliczyć sumę pól wszystkich kwadratów
   b) obliczyć sumę obwodów wszystkich kwadratów

**Odpowiedzi:**

1. (32, 16, 8, 4) lub (4, 8, 16, 32)
2. $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) < q < \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$
3. a.) $x = 25$

b.) $y = -15$ lub $y = 15$

4. $x = 4$
5. a.) $2a^2$

   b.) $8a + 4\sqrt{2}a$

# SPIS TREŚCI