RACHUNEK CAŁKOWY

RYS HISTORYCZNY

Już starożytni znali pewne idee i metody zaliczane dziś do rachunku całkowego. Takimi właśnie metodami i to z zachowaniem należytej precyzji logicznej, uczony grecki ARCHIMEDES (III w. Przed Chrystusem) obliczał objętości i pola powierzchni różnych brył.

Właściwy rozwój metod całkowych nastąpił w XVII w. i wiąże się z badaniami matematyka włoskiego F.B. CAVALIERIEGO, angielskiego J. WALLISA, astronoma niemieckiego J. KEPLERA. Okres ten zamykają prace I. NEWTONA oraz niemieckiego matematyka i filozofa G. W. LEIBNIZA, zawierające systematyczny wykład teorii i metod związanych z pojęciem całki, wprowadzające terminologię i oznaczenia, ukazujące związek rachunku całkowego z różniczkowym oraz praktyczne metody całkowania prostych typów funkcji. Dlatego też NEWTONA i LEIBNIZA uważa się za twórców rachunku całkowego.

W XVIII i XIX w. coraz szerzej używano całki w różnych działach fizyki. Uwolnienie teorii całki od nieścisłości i oparcie jej na pojęciu granicy jest zasługą francuskiego matematyka i fizyka A. L. CAUCHY'EGO.

Dalszy rozwój teorii dotyczących całek to także prace Niemca G. F. B. RIEMANNA oraz Francuza H. LEBESGUE'A.

I.CAŁKA NIEOZNACZONA

1. Pojęcie funkcji pierwotnej

Definicja:

Niech dana będzie funkcja f: D→R. Funkcją pierwotną funkcji f nazywamy funkcję F: D→R taką, że:

$$\bigwedge_{x \in D} F'(x) = f(x)$$

Dla każdego x należącego do dziedziny pochodna funkcji pierwotnej jest równa funkcji f.

Przykład 1

$f(x) = x \qquad f: R\to R$

1. Funkcją pierwotną funkcji f jest:

$$F(x)=\frac{1}{2}x^2 \qquad F:R\to R$$

bo: $F'(x) = (\frac{1}{2}x^2)' = x = f(x)$

2. Funkcją pierwotną funkcji f jest również:

$$G(x) = \frac{1}{2}x^2+e \qquad F:R\to R$$

bo: $G'(x) = (\frac{1}{2}x^2 + e)' = x = f(x)$

Przykład 2

$f(x) = x^2 \qquad f: R\to R$

Funkcją pierwotną funkcji f jest:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4 \qquad F: R \to R$$

bo: $F'(x) = (\frac{1}{3}x^3 + 4) = x^2 = f(x)$

2. Funkcja f może posiadać również inną funkcję pierwotną:

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3 \qquad G: R \to R$$

bo: $G'(x) = (\frac{1}{3}x^3 + 4) = x^2 = f(x)$

Twierdzenie:

Jeżeli funkcje $F: D \to R$ i $G: D \to R$ są funkcjami pierwotnymi funkcji $f: D \to R$ to istnieje takie $C \in R$ że zachodzi:

$$\mathbf{G(x) = F(x) + C}$$

Dowód:

Funkcje F(x) i G(x) są funkcjami pierwotnymi funkcji f zatem na mocy definicji funkcji pierwotnej mamy:

$$\bigwedge_{X \in D} F'(x) = f(x)$$

$$\bigwedge_{X \in D} G'(x) = f(x)$$

Na mocy twierdzenia o pochodnej różnicy dwóch funkcji różniczkowalnych [które to twierdzenie czytelnik winien mieć już przyswojone, a jeżeli nie to z pewnością znajdzie je w powyższej pracy w rozdziale POCHODNA FUNKCJI] otrzymamy:

$$(G - F)'(x) = [F(x) - G(x)]' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Zatem funkcja (F - G)(x) musi być funkcją stałą

$$(G - F)(x) = C$$
$$G(x) - F(x) = C$$
$$\mathbf{G(x) = F(x) + C}$$

Co należało dowieść.

Twierdzenie:

Funkcje pierwotne funkcji f(x) różnią się co najwyżej o stałą

Zapis: $G(x) = F(x) + C$ oznacza rodzinę funkcji f.

Definicja:

Zbiór wszystkich funkcji pierwotnych (rodzinę) funkcji $f: D \to R$ nazywamy *CAŁKĄ NIEOZNACZONĄ* funkcji $f: D \to R$ i oznaczamy:

$$\int f(x)dx$$

LEGENDA:

[c]-symbol całki
f -funkcja podcałkowa
d - wyznacza zmienną całkowania

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Powyższą definicję sformułował Newton. O funkcji dla której istnieje całka mówimy, że jest całkowalna (w sensie Newtona).

2. Podstawowe wzory rachunku całkowego.

1. $\int 0dx = c$

2. $\int 1dx = [c]dx = x + C$

3. $\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C$

4. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ dla $n \neq -1$ i $x \in R_+$

5. $\int \sqrt{dx} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$ dla $x \in R_+$

6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg}x + C$

9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg}x + C$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$

11. $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \mathrm{arc\,tg}x + C = -\mathrm{arc\,ctg}x + C$

12. $\int e^x dx = e^x + C$

13. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

14. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $a>0$ i $a \neq 1$

Dowód:

Dowód polega na zróżniczkowaniu prawych stron każdego z podanych wyżej wzorów.

1. $F(x) = C$

   $F'(x) = (C)' = 0 = f(x)$

2. $F(x) = x$

   $F'(x) = (x)' = 1 = f(x)$

3. $F(x) = \frac{1}{2}x^2$

   $F'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x = f(x)$

4. $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

   $F'(x) = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1}\cdot(n+1)\cdot x^n = x^n = f(x)$

5. $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

   $F(x) = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)' = \frac{2}{3}\cdot\left(\sqrt{x^3}\right)' = \frac{2}{3}\cdot\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{3}{2}-1} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{x} = f(x)$

W przypadku funkcji trygonometrycznych dowód opiera się o twierdzenie dotyczące pochodnych funkcji trygonometrycznych. Twierdzenie te czytelnik znajdzie w niniejszej publikacji w dziale POCHODNA.

6.F(x) = -cosx

$F'(x) = (-\cos x)' = -1(\cos x)' = -1\cdot(-\sin x) = \sin x = f(x)$

7.F(x) = sinx

$F'(x) = (\sin x)' = \cos x$

8.F(x) = tgx

$$F'(x) = (\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = f(x)$$

9.F(x) = -ctgx

$$F'(x) = (-\mathrm{ctg}x)' = -1\cdot(\mathrm{ctg}x)' = -1\cdot\left(\frac{-1}{\sin^2 x}\right) = \frac{1}{\sin^2 x} = f(x)$$

W przypadku funkcji cyklometrycznych dowód opiera się również na twierdzeniu o pochodnej funkcji cyklometrycznych, które to twierdzenie czytelnik znajdzie w niniejszej publikacji w dziale POCHODNA.

10.

a.F(x) = arc sinx

$$F'(x) = (\mathrm{arc}\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = f(x)$$

b.F(x) = -cosx

$$F'(x) = (-\mathrm{arc}\cos x)' = -1\cdot(\mathrm{arccos}x) = -1\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = f(x)$$

11.

a.F(x) = arc tgx

$$F'(x) = (\mathrm{arc\,tg}x)' = \frac{1}{1+x^2} = f(x)$$

b.F(x) = - arc ctgx

$$F'(x) = (-\mathrm{arc\,ctg}x)' = -1\cdot(\mathrm{arc\,ctg}x) = -1\cdot\left(\frac{-1}{1+x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} = f(x)$$

12.F(x) = e^x

$F'(x) = (e^x)' = e^x\cdot\ln e = e^x$

13.F(x) = $\ln|x|$

$$F'(x) = \left(\ln|x|\right)' = \left(\log_e|x|\right)' = \frac{1}{|x|\cdot\ln e} = \frac{1}{x} = f(x)$$

14.F(x) = $\frac{a^x}{\ln a}$ dla $a>0$, $a\neq1$

$$F'(x) = \left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = \left(a^x\right)'\cdot\left(\frac{1}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a}\cdot a^x\cdot\ln a = a^x = f(x)$$

Twierdzenie:

Jeżeli funkcja $F:D\to R$ jest funkcją pierwotną funkcji $f:D\to R$ i funkcja $G:D\to R$ jest funkcją pierwotną $g: D\to R$, to:

1. $\int(f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + C$
2. $\int(f-g)(x)dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx = F(x) - G(x) + C$
3. $\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx = k\cdot F(x) + C$

Dowód:

Dowód polega na zróżniczkowaniu prawych stron równań.

Zauważmy że: $F'(x) = f(x)$ i $G'(x) = g(x)$ wtedy mamy:

a. $[F(x) + G(x)]' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$

zatem funkcje F(x) i G(x) są funkcjami pierwotnymi funkcji f(x) i g(x).

b. $[F(x) - G(x)]' = F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x) = (f-g)(x)$

zatem funkcje F(x) i G(x) są funkcjami pierwotnymi funkcji f(x) i g(x).

c. $[k \cdot F(x)] = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$

zatem funkcja F(x) jest funkcją pierwotną funkcji f(x).

Co należało dowieść.

Zadanie:

Wyznacz całkę nieoznaczoną.

1. $\int \left(x^3 + 2x - 1\right)dx = \int x^3 dx + \int 2x dx - \int 1 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + 2\int x dx - x = \frac{x^4}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 - x =$

$= \frac{x^4}{4} + x^2 - x = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - x + C$

Zadanie:

Wyznaczyć kilka funkcji pierwotnych f(x) = 2x i narysować ich wykresy w jednym układzie współrzędnych.

Wyznaczamy wszystkie funkcje pierwotne funkcji f(x).

$\int f(x)dx = \int 2x dx = 2\int x dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 = x^2 + C$

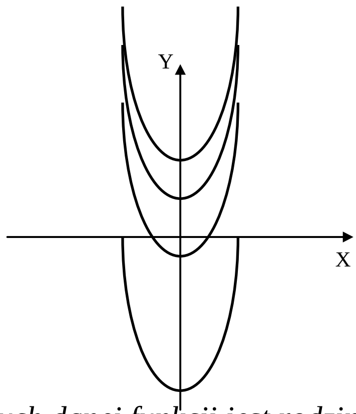
$c = -\frac{1}{2}$ $F(x) = x^2 - \frac{1}{2}$

$c = 0$ $F(x) = x^2$

$c = 1$ $F(x) = x^2 + 1$

$c = 2$ $F(x) = x^2 + 2$

$c = -4$ $F(x) = x^2 - 4$



Wniosek: *Geometrycznie wykres wszystkich funkcji pierwotnych danej funkcji jest rodziną krzywych „równoległych" przesuniętych względem krzywej* y = F(x) *o wektor* (0,C).

Zadanie:

Wyznaczyć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = x - x^3$ do wykresu której należy punkt P(-1,2).

Wyznaczamy wszystkie funkcje pierwotne funkcji f(x).

$\int f(x)dx = \int x - x^3 dx = \int x dx - \int x^3 dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{4} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + C$

Otrzymaliśmy rodzinę krzywych $G(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$

Aby punkt należał do krzywej musi spełniać jej równanie.

$2 = \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 - \frac{1}{4} \cdot (-1)^4 + C$

$2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + C$

$C = 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$C = \frac{7}{4}$

ODP: Szukana funkcja ma postać $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{4}$

Zadanie:

Oblicz całkę nieoznaczoną.

1. $\int 3x^2 dx$

2. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{2} dx$

3. $\int (x-1)^2 dx$

4. $\int x^3 - 3\cos x \, dx$

5. $\int \left(2e^x - \sqrt{x}\right)dx$

II. CAŁKOWANIE PRZEZ CZĘŚCI

Twierdzenie: < o całkowaniu przez części >

Jeżeli funkcje f i g mają w przedziale D ciągłe pochodne f' i g' to zachodzi wzór:

$$\int f(x)g^{/}(x)dx = f(x)g(x) - \int f^{/}(x)g(x)dx$$

Dowód:

Dowód polega na zróżniczkowaniu prawej strony równania.

$$\left[f(x)g(x) - \int f^{/}(x)g(x)dx\right]^{/} = f^{/}(x)g(x) + f(x)g^{/}(x) - f^{/}(x)g(x) = f(x)g^{/}(x)$$

Otrzymaliśmy lewą stronę równania.

Co należało dowieść.

Przykład:

Oblicz: $\int x \cdot \cos x \, dx$

Zauważmy, iż mamy do czynienia z iloczynem funkcji podcałkowych. Jeżeli jedną z nich
Potraktujemy jako pochodną pewnej innej funkcji np.:

g'(x) = cosx

A drugą jako zwyczajną funkcję np.: f(x) = x

Możemy zastosować wzór.

Najpierw uporządkujemy funkcje i ich pochodne niezbędne do podstawienia do wzoru.

f(x) = x	f'(x) = 1
g'(x) = cosx	g(x) = sinx

Podstawiając do wzoru otrzymujemy:

$$\int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx = x \cdot \sin x + \cos x + C$$

Zadanie:

Oblicz:

1. $\int x \cdot \cos x \, dx = \left\{\begin{matrix} f(x) = x & \vdots \; f^{/}(x) = 1 \\ g^{/}(x) = \cos x & \vdots \; g(x) = \sin x \end{matrix}\right\} = x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx = x \cdot \sin x + \cos x + C$

2. $\int x^2 \cdot e^x \, dx = \left\{\begin{matrix} f(x) = x^2 & \vdots \; f^{/}(x) = 2x \\ g^{/}(x) = e^x & \vdots \; g(x) = e^x \end{matrix}\right\} = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x \, dx = x^2 \cdot e^x - 2\int x \cdot e^x \, dx =$

$= \left\{\begin{matrix} f(x) = x & \vdots \; f^{/}(x) = 1 \\ g^{/}(x) = e^x & \vdots \; g(x) = e^x \end{matrix}\right\} = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot \left(x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx\right) = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot \left(x \cdot e^x - \int e^x \, dx\right) =$

$= x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + C$

3. $\int e^x \cdot \cos x \, dx = \left\{\begin{matrix} f(x) = e^x & \vdots \; f^{/}(x) = e^x \\ g^{/}(x) = \cos x & \vdots \; g(x) = \sin x \end{matrix}\right\} = e\sin x - \int e\sin x \, dx = \left\{\begin{matrix} f(x) = e^x & \vdots \; f^{/}(x) = e^x \\ g^{/}(x) = \sin x & \vdots \; g(x) = -\cos x \end{matrix}\right\} =$

$= e^x \cdot \sin x - \left(e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x)dx\right) = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \cos x \, dx$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$2 \cdot \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x \cdot (\sin x + \cos x) + C$$

Zadanie:

Oblicz całkę nieoznaczoną korzystając z metody całkowania przez części.

1. $\int x \cdot e^x dx$
2. $\int \sqrt{x} \cdot x^2 dx$
3. $\int x^2 \cdot \sin x \, dx$
4. $\int \cos^2 x \, dx$
5. $\int \frac{\cos x}{x} dx$

III. CAŁKOWANIE PRZEZ PODSTAWIENIE

Metoda całkowania *przez podstawienie*, zwana jest także metodą całkowania przez zmianę zmiennej.

Twierdzenie:< pierwsze o całkowaniu przez podstawienie t = h(x) >

Jeżeli:

1. Funkcja h(x) jest różniczkowalna w przedziale D i przekształca go na przedział T
2. Funkcja g(t) ma w przedziale T funkcję pierwotną G(t)
3. f(x) = g[h(x)] w przedziale D

to:

$$\int f(x) dx = G[h(x)] + C$$

Dowód:

Funkcja złożona G[h(x)] jest funkcją pierwotną funkcji f(x), ponieważ dla każdego $x \in D$ mamy:

(G[h(x)])' = G'[h(x)]·h'(x) = g[h(x)]·h'(x) = f(x)

Co należało dowieść.

Przykład:

Obliczyć: $\int (2x+3)^6 dx$

Podstawiamy za t = 2x+3, czyli h(x) = 2x+3. Stąd h'(x) = 2, dt = 2dx. Ponieważ

$$(2x+3)^6 = \frac{1}{2}(2x+3)^6 \cdot 2$$

więc g(t) = $\frac{1}{2}t^6$. Mamy tu D = T = (-∞ ; +∞). Korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie, otrzymujemy:

$$\int (2x+3)^6 dx = \int \frac{1}{2} t^6 dt = \frac{1}{14} t^7 + C = \frac{1}{14}(2x+3)^7 + C$$

Twierdzenie: < drugie o całkowaniu przez podstawienie x = φ(t) >

Jeżeli:

1. Funkcja jest różniczkowalna i różnowartościowa w przedziale T i przekształca go na przedział D.
2. Funkcja f ma w przedziale D funkcję pierwotną F

to prawdziwa jest na tym przedziale równość:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt$$

Dowód:

Niniejszy dowód opiera się na twierdzeniu o pochodnej funkcji złożonej. Dokładny dowód zainteresowany czytelnik znajdzie w publikacji autorstwa W. Żakowskiego i G. Decewicza pt.: ”Matematyka (Podręczniki akademickie)”,w dziale rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej.

Zadanie:

Oblicz całkę nieoznaczoną korzystając z metody całkowania przez podstawienie.

1. $$\int \sin 2x\, dx = \left\{\begin{array}{l} t = 2x \\ 1dt = 2dx \\ \frac{1}{2}dt = dx \end{array}\right\} = \sin t \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \sin t\, dt = -\frac{1}{2}\cos t = -\frac{1}{2} \cdot 2x + C$$

2. $$\int \sqrt{4x+2}\, dx = \left\{\begin{array}{l} t = 4x+2 \\ dt = 4dx \\ \frac{1}{4}dt = dx \end{array}\right\} = \int \sqrt{t} \cdot \frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}\int \sqrt{t}\, dt = \frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{2}}\, dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6} \cdot t^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (4x+2)^{\frac{3}{2}} + C$$

3. $$\int \cos\frac{5}{2}x\, dx = \left\{\begin{array}{l} x = \frac{2}{5}t \\ dx = \frac{2}{5}dt \\ t = \frac{5}{2}x \end{array}\right\} = \int \cos\left(\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5}t\right)\frac{2}{5}dt = \frac{2}{5}\int \cos t\, dt = \frac{2}{5} \cdot \sin t = \frac{2}{5} \cdot \sin\frac{5}{2}x + C$$

Zadanie:

Oblicz samodzielnie stosując metodę podstawiania.

1. $\int \cos(x+2)\, dx$
2. $\int (x+1)^{1998}\, dx$
3. $\int x\sqrt{x^2-3}\, dx$
4. $\int \frac{2}{(4x-2)^3}\, dx$
5. $\int x \cdot e^{-x^2}\, dx$

IV. CAŁKOWANIE FUNKCJI WYMIERNYCH.

I. Przy obliczaniu całek funkcji wymiernej skorzystać można z rozkładu tejże funkcji na ułamki proste.

Definicja:

Funkcję wymierną postaci $f(x) = \frac{1}{(x-a)^n}$ nazywamy ułamki prostym.

Przykład:

Dokonaj rozkładu na ułamki proste funkcji.

$$f(x) = \frac{2x+5}{x^2+x-2}$$

1.Dążymy do przedstawienia dwumianu w mianowniku jako iloczynu dwóch jednomianów, wyznaczając pierwiastki równania $x^2 + x - 2$ otrzymujemy:

$$\frac{2x+5}{x^2+x-2} = \frac{2x+5}{(x+2)\cdot(x-1)}$$

2.Rozkładamy funkcję na sumę ułamków prostych.

$$\frac{2x+5}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x-1)}$$

3.Dodajemy otrzymane ułamki sprowadzając do wspólnego mianownika.

$$\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x-1)}=\frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}=\frac{(A+B)x-A+2B}{(x+2)(x-1)}$$

4.Mamy więc:

$$\frac{2x+5}{(x+2)(x-1)}=\frac{(A+B)x-A+2B}{(x+2)(x-1)}$$

Ułamki te są sobie równe wtedy i tylko wtedy gdy:

$$2x + 5 = (A + B)x - A + 2B$$

Jeżeli wielomiany tego samego stopnia są sobie równe muszą mieć takie same współczynniki przy odpowiednich potęgach.
Więc:

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 2B-A=5 \end{cases}$$

Rozwiązujemy otrzymany układ równań

$$\begin{cases} A=-\frac{1}{3} \\ B=\frac{7}{3} \end{cases}$$

5.Podstawiając (do punktu 2) otrzymamy:

$$\frac{2x+5}{x^2+x-2}=-\frac{1}{3(x+2)}+\frac{7}{3(x-1)}$$

Jeżeli musielibyśmy obliczyć całkę powyższej funkcji możemy skorzystać z otrzymanej postaci sumy ułamków prostych.

$$\int\frac{2x+5}{x^2+x-2}=\int\left(-\frac{1}{3(x+2)}+\frac{7}{3(x-1)}\right)dx=\int\left(-\frac{1}{3(x+2)}\right)+\int\frac{7}{3(x-1)}=-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+2}dx+\frac{7}{3}\int\frac{1}{x-1}dx=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln|x+2|+\frac{7}{3}\ln|x-1|+C$$

II. Wśród pozostałych metod, obok omówionej już metody podstawienia istnieje także inna gdzie stosuje się dzielenie licznika (jedno lub wielomianu) przez mianownik (także jedno lub wielomianu).

Przykład:

Wyznacz całkę nieoznaczoną.

$$\int\frac{x+2}{4x-1}dx$$

Dzielimy licznik przez mianownik:

$$(x+2):(4x-1)=\frac{1}{4}$$

$$x-\frac{1}{4}$$

____

$$=\frac{9}{4}$$

Ponieważ w ilorazie dzielnik jest taki sam jak mianownik ewentualnej reszty będącej ułamkiem zwykłym np.:

$$\frac{15}{4} = 3 + \frac{3}{4}$$

$$\frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2}$$

Wynik dzielenia naszych jednomianów będący inną postacią funkcji podcałkowej zapisujemy:

$$\int \frac{x+2}{4x-1}dx = \int \left(\frac{1}{4} + \frac{\frac{9}{4}}{4x-1} \right) dx$$

Obliczenie takiej całki jest już proste:

$$\int \left(\frac{1}{4} + \frac{\frac{9}{4}}{4x-1} \right) dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{9}{4}\int \frac{1}{4x-1}dx = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{4}\ln|4x-1| + C$$

III. Po wyliczeniu szeregu całek funkcji wymiernej gdzie $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ nasuwa się wniosek:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

który to można z powodzeniem stosować.

Przykład:

Oblicz: $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

Zauważmy iż licznik jest pochodną mianownika

$$(x^2+1)' = 2x$$

Zatem można skorzystać z wniosku

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln|x^2+1| + C$$

Zadanie:

Oblicz całkę funkcji wymiernej.

1. $\int \frac{dx}{2x^2+9x-5}$

mianownik: $2x^2 + 9x - 5 = 0$

$$\Delta = 121 \quad \sqrt{\Delta} = 11$$

$$x_1 = -5 \ \vee \ x_2 = \frac{1}{2}$$

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+5) = 0$$

$$(2x-1)(x+5) = 0$$

$$= \frac{1}{2x^2+9x-5} = \frac{1}{(2x-1)(x+5)} = \frac{A}{(2x-1)} + \frac{B}{(x+5)} = \frac{A(x+5)+B(2x-1)}{(2x-1)(x+5)} = \frac{Ax+5A+2Bx-B}{(2x-1)(x+5)}$$

licznik: $x(A + 2B) + 5A - B = 1$

$$\begin{cases} A + 2B = 0 \\ 5A - B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{2}{11} \\ B = -\frac{1}{11} \end{cases}$$

Podstawiając otrzymamy:

$$\int \frac{dx}{2x^2+9x-5} = \int \left(\frac{\frac{2}{11}}{2x-1} + \frac{-\frac{1}{11}}{x+5} \right) dx = \frac{2}{11}\int \frac{1}{2x-1}\,dx - \frac{1}{11}\int \frac{1}{x+5}\,dx = \frac{2}{11}\cdot\frac{1}{2}\ln|2x-1| - \frac{1}{11}\cdot\ln|x+5| + C$$

2. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+6}dx$

Pamiętając że: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$

Mamy: $$\int \frac{2x+1}{x^2+x+6}dx = \ln|x^2+x+6| + C$$

4. $$\int \frac{cx+d}{ax+b}dx \overset{*}{=} \int \left(\frac{c}{a} + \frac{d-\frac{bc}{a}}{ax+b} \right) dx = \int \frac{c}{a}dx + \int \frac{d-\frac{bc}{a}}{ax+b} = \frac{c}{a}\int dx + \left(d-\frac{bc}{a}\right)\cdot\int \frac{1}{ax+b}dx =$$

$(*)$ $(cx+d)(ax+b) = \frac{c}{a}$

$$= \frac{c}{a}x + \left(d-\frac{bc}{a}\right)\cdot\frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

$cx - \frac{bc}{a}$

____

$d - \frac{bc}{a}$

Zadanie:

Wyznacz całkę funkcji wymiernej.

1. $\int \frac{11x-1}{2x^2-5x-3}dx$
2. $\int \frac{3x-4}{x^2-x-6}dx$
3. $\int \frac{x^3+2x^2+1}{x^2+1}dx$
4. $\int \frac{4x+6}{x^2+3x}dx$
5. $\int \frac{x^2+x+1}{x^2+x+2}dx$

V.CAŁKA FUNKCJI NIEWYMIERNYCH

Przy obliczaniu całki funkcji niewymiernej korzysta się z metod omówionych w punkcie III. CAŁKOWANIE PRZEZ PODSTAWIENIE.

Przykład 1:

Oblicz:

$$\int \sqrt{3x+1}\,dx = \left\{\begin{array}{ll} 3x+1 = t & \\ 3dx = & dt \\ dx = & \frac{1}{3}dt \end{array}\right\} = \int \sqrt{t}\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{t^3} = \frac{2}{9}\cdot\sqrt{(3x+1)^3} + C$$

Przykład 2:

Oblicz:

$$\int \sqrt{3x+1}\,dx = \left\{\begin{array}{l} t^2 = 3x+1 \\ 2tdt = 3dx \\ dx = \frac{2}{3}tdt \end{array}\right\} = \int t\cdot\frac{2}{3}tdt = \frac{2}{3}\int t^2dt = \frac{2}{3}\cdot\frac{t^3}{3} = \frac{2}{9}t^3 = \frac{2}{9}\left(\sqrt{3x+1}\right)^3 + C$$

Zadanie:

Wyznacz całkę funkcji niewymiernej.

1. $$\int \frac{1}{\sqrt{3-5x}}dx = \left\{\begin{array}{l} t^2 = 3x-5x \\ 2tdt = -5dx \\ dx = -\frac{2}{5}tdt \end{array}\right\} = \int \frac{1}{t}\cdot -\frac{2}{5}tdt = -\frac{2}{5}\int dt = -\frac{2}{5}t + C$$

2. $$\int x\sqrt{2x-3}\,dx = \left\{\begin{array}{l} t = \sqrt{2x-3} \\ t^2 = 2x-3 \\ 2tdt = 2dx \\ dx = tdt \\ z\quad t^2 = 2x-3 \\ x = \frac{t^2+3}{2} \end{array}\right\} = \int \frac{t^2+3}{2}\cdot t\cdot tdt = \frac{1}{2}\int\left(t^2+3\right)\cdot t^2dt = \frac{1}{2}\int\left(t^2+3t^2\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int t^4dt + 3\int t^2dt\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{t^5}{5} + 3\cdot\frac{t^3}{3}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{t^5}{5} + \frac{5t^3}{5}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^5+5t^3}{5} = \frac{t^5+5t^3}{10} + C$$

Zadanie:

Wyznacz całkę podanych funkcji niewymiernych.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$
2. $\int \sqrt{x}\cdot\sqrt{x^2+1}dx$
3. $\int \sqrt{\frac{2x+1}{x^2+x+3}}dx$
4. $\int \left(\sqrt[3]{x} + \cos\sqrt{x}\right)dx$
5. $\int \sqrt[5]{\frac{2x^2+1}{x^2-1}}dx$

VI. CAŁKA OZNACZONA

1.

Definicja:

Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale <a,b> i F jej funkcją pierwotną.
Liczbę F(b) – F(a) nazywamy całką oznaczoną funkcji f na przedziale <a,b> i oznaczamy:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Liczby a i b nazywamy odpowiednio dolną i górną granicą całkowania.

Przykład:

Oblicz:

1. $$\int_1^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

2.

3. $\int_1^e \frac{1}{x}dx = \left[\ln|x|\right]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$

Całka oznaczona zachowuje wszystkie „własności” (wzory) całki nieoznaczonej.
Ponadto:

Twierdzenie:

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
3. Jeżeli a< c< b, to: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Dowód:

1. $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$
2. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -[F(b) + F(a)] = -[F(a) + F(b)] = -\int_b^a f(x)dx$

.3. $\int_a^c f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = \left[F(c) - F(a)\right] + \left[F(b) - F(c)\right] = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = -F(a) + F(b) =$

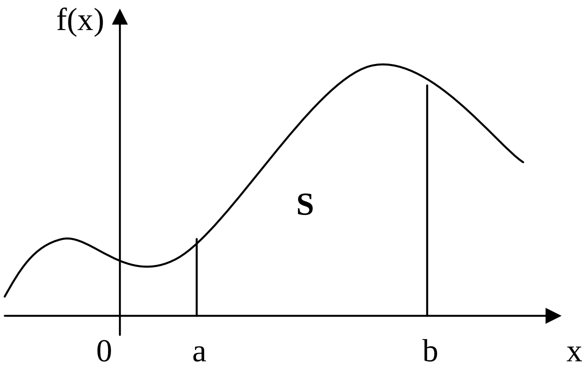
$= F(b) – F(a) = \int_a^b f(x)dx$

Co należało dowieść.

2.Interpretacja geometryczna całki oznaczonej.

Twierdzenie:

Jeżeli funkcja f jest ciągła i nieujemna na przedziale domkniętym <a,b>, to całka oznaczona z funkcji f jest równa polu figury ograniczonej prostymi x = a, x = b, osią OX i krzywą y = f(x).



Obszar S przedstawia trapez krzywoliniowy. $S = \int_a^b f(x)dx$

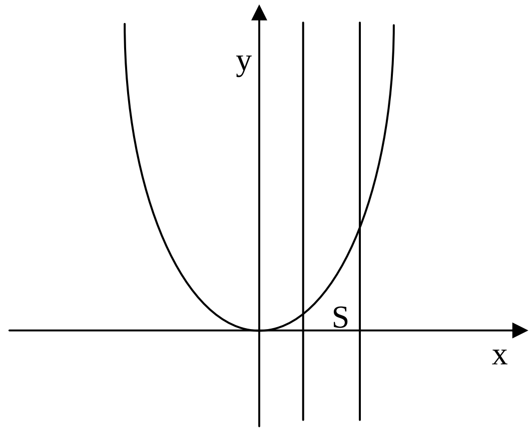
Jeżeli funkcja f jest niedodatnia na przedziale <a,b> to pole trapezu krzywoliniowego wyraża się wzorem:

$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

Przykład:

Oblicz pole obszaru ograniczonego łukiem paraboli $y = x^2$, prostymi x = 1 i osią OX.

A = 1
B = 2
$F(x) = x^2$



Korzystając ze wzoru:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

Mamy:

$$S = \int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

ODP: Pole obszaru wynosi $\frac{7}{3}$

3.Geometryczne zastosowanie całki oznaczonej.

Twierdzenie:

Niech y = f(x) będzie funkcją ciągłą na przedziale <a,b> wtedy:

1. Objętość bryły obrotowej powstałej poprzez obrót obszaru ograniczonego łukiem krzywej y = f(x), prostymi x = a i x = b oraz osią OX dookoła tej osi wyraża się wzorem:

$$V = \Pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

2. Pole powierzchni bocznej:

$$P = 2\Pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left[f^{/}(x)\right]^2}\,dx$$

3. Długość łuku krzywej:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f^{/}(x)\right]^2}\,dx$$

Przykład:

Wyznacz pole powierzchni bocznej kuli.

1. Kula jest bryłą obrotową powstałą poprzez obrót obszaru będącego półkolem powstałym z przepołowienia koła wzdłuż średnicy tegoż koła na osi OX. Obszar ów jest więc ograniczony:
- łukiem krzywej $x^2 + y^2 = r^2$ (równanie okręgu).
- Prostymi x = r, x = -r (to znaczy że jest ograniczony zasięgiem swego promienia)
- Osią OX (wokół której się obraca).
2. Wyznaczamy elementy niezbędne do wykorzystania we wzorach.
   a. Przekształcając równanie okręgu

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$
$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$
$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

   b. Obliczając pochodną powyższej funkcji

$$f^{/}(x) = \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^{/} = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

c. $f^2(x) = \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 = r^2 - x^2$

$$\left[f'(x)\right]^2 = \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

d. $a = -r \qquad b = r$

3. Podstawiając do stosownych wzorów otrzymamy:

a. $$V = \Pi\int_{-r}^{r}\left(r^2 - x^2\right)dx = \Pi\left[\int_{-r}^{r} r^2dx - \int_{-r}^{r} x^2dx\right] = \Pi\left[r^2\int_{-r}^{r} dx - \int_{-r}^{r} x^2dx\right] = \Pi\left[r^2\left[x\right]_{-r}^{r} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}\right] =$$

$$= \Pi\left[r^2\left(r + r\right) - \left(\frac{r^3}{3} + \frac{r^3}{3}\right)\right] = \Pi\left[2r^3 - \frac{2r^3}{3}\right] = \Pi\frac{4r^3}{3} = \frac{4}{3}\Pi r^3$$

b. $$P = 2\Pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2 - x^2}\cdot\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}dx = 2\Pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2 - x^2}\cdot\sqrt{\frac{r^2 + x^2 - x^2}{r^2 - x^2}}dx = 2\Pi\int\sqrt{r^2 - x^2\cdot\frac{r}{r^2 - x^2}}dx =$$

$$= 2\Pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2}dx = 2\Pi\int_{-r}^{r} rdx = 2\Pi r\int_{-r}^{r} dx = 2\Pi r\left[x\right]_{-r}^{r} = 2\Pi r\left(r + r\right) = 2\Pi r\cdot 2r = 4\Pi r^2$$

Po sprawdzeniu wyników z ogólnie znanymi wzorami na objętość i pole powierzchni kuli czytelnik przekona się że są identyczne.

Zadanie:

Wyznacz całkę oznaczoną podanych funkcji.

1. $\int_{0}^{\pi}\sin x\, dx$
2. $\int_{2}^{3}\left(x^2 - 4x\right)dx$
3. $\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\cos^2 x\, dx$
4. $\int_{0}^{1}\sqrt{x + 1}dx$
5. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$

VII. CAŁKA NIEWŁAŚCIWA

Twierdzenie:

Funkcja ciągła ma całkę oznaczoną w przedziale domkniętym <a,b> jeśli funkcja f jest określona na przedziale <a,+∞) i ciągła, to jest całkowalna w każdym przedziale <a,t> i <a,+∞).

Granicę skończoną nazywamy całą niewłaściwą funkcji f i oznaczamy:

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)\, dx$$

co możemy zapisać jako: $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$

Przykład 1:

Oblicz: $\int_{a}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t x^{-2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{t}+1\right) = 1$$

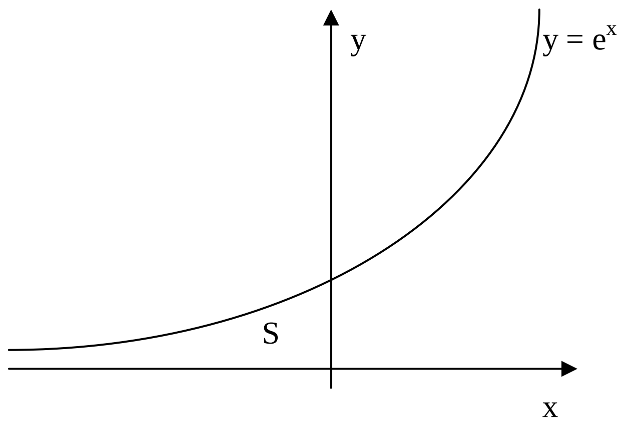
Przykład 2: < w którym obliczona całka okaże się całką w rzeczywistości nieistniejącą >

Oblicz: $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{1}{x}dx = \lim_{t\to+\infty}[\ln x]_1^t = \lim_{t\to+\infty}(\ln t - \ln 1) = \lim_{t\to+\infty}(\ln t) = +\infty$$

Zadanie:

Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywą $y = e^x$ i osiami układu współrzędnych.



$y = e^x$
$b = 0$

$$S = \int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 e^x dx = \lim_{t\to-\infty}\left[e^x\right] = \lim_{t\to-\infty}\left(1-e^t\right) = \lim_{t\to-\infty}1 - \lim_{t\to-\infty}e^t$$

Ponieważ wartość wyrażenia $\lim_{t\to-\infty}e^t$ dąży do zera, to otrzymujemy ostatecznie:

$$\lim_{t\to-\infty}1 - 0 = \lim_{t\to-\infty}1 = 1$$

ODP: Pole powierzchni obszaru ograniczonego krzywą $y = e^x$ i osiami układu współrzędnych wynosi 1 j^2.