

S. Seweryn, J. Hulak, P. Chmara

# *Logarytmy a medycyna – prawo Webera - Fechnera*



*Logarytmy a medycyna –  
prawo Webera – Fechnera*

# *Spis treści*

<i>1. Definicja i jej wyjaśnienie .....</i>	<i>4</i>
<i>2. Biografie autorów.....</i>	<i>5</i>
<i>3. Analiza wzoru .....</i>	<i>6</i>
<i>4. Pojęcie logarytmu naturalnego.....</i>	<i>8</i>
<i>5. Działanie prawa.....</i>	<i>9</i>
<i>6. Przydatność prawa w obecnych czasach.....</i>	<i>10</i>
<i>7. Prawo Webera – Fechnera w medycynie.....</i>	<i>14</i>
<i>8. Podsumowanie .....</i>	<i>17</i>
<i>9. Summary.....</i>	<i>18</i>
<i>Bibliografia .....</i>	<i>19</i>

## **Wprowadzenie**

Logarytmy to działania matematyczne, które kiedyś zastępowały kalkulator. Dzięki nim ludzkość w dawnych epokach mogła dokonywać obliczeń, z którymi do tej pory większość młodzieży licealnej sobie nie radzi. Aktualnie są stosowane w wielu dziedzinach życia, chociaż wielu nawet o tym nie wie. Przykładem takiej sytuacji jest prawo Webera – Fechnera, stosowane między innymi we współczesnej medycynie. To właśnie stosując opracowany przez Fechnera wzór, bazujący na logarytmie naturalnym, potrafimy określić reakcję ludzkich zmysłów na bodźce fizyczne. Jest to podstawa psychofizyki.



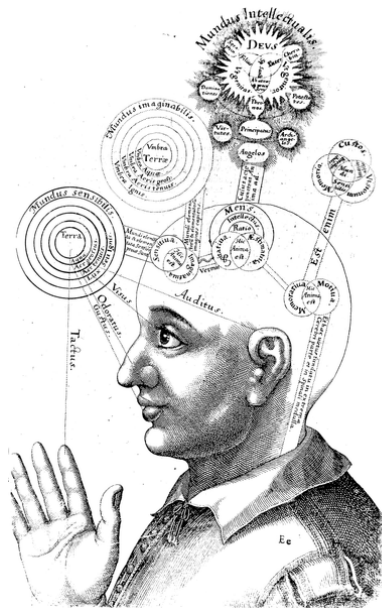
## 1. Definicja prawa i jej wyjaśnienie

„Prawo Webera-Fechnera – prawo wyrażające relację pomiędzy fizyczną miarą bodźca a reakcją układu biologicznego. Dotyczy ono reakcji na bodźce takich zmysłów jak wzrok, słuch czy poczucie temperatury. Jest to prawo fenomenologiczne będące wynikiem wielu obserwacji praktycznych i znajdujące wiele zastosowań technicznych. Wartość reakcji układu biologicznego jest proporcjonalna do logarytmu bodźca.”

Prawo to można wyrazić wzorem:  $w = k \cdot \ln \frac{B}{B_0}$

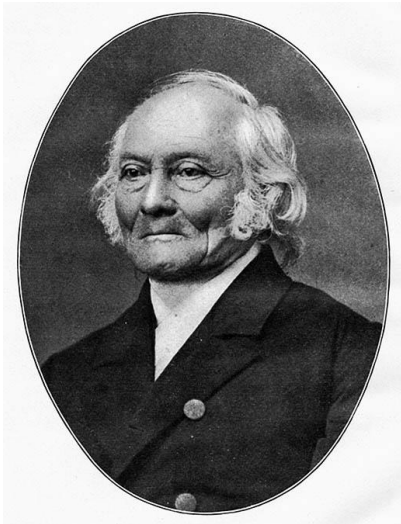
- Czyli:

Prawo tych dwóch panów mówi w jaki sposób organizm reaguje na zmianę intensywności czynnika zewnętrznego i można to obliczyć mnożąc współczynnik proporcjonalności z logarytmem ilorazu ze zmiany natężenia bodźca i jego pierwotnym nasileniem. (*przyp. aut.* wyjaśnienie wzoru roz. 3)



\* rys.1.  
Oddziaływanie bodźców  
na zmysły człowieka

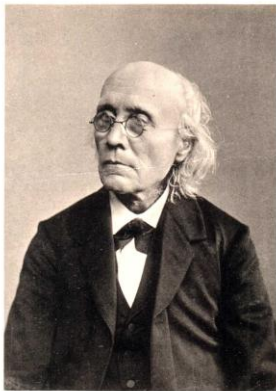
## 2. Biografie autorów prawa



Ernst Heinrich Weber

Niemiecki anatom, fizjolog i psycholog. Urodził się 24 czerwca 1795 r. w Wittenberdze, zmarł 26 stycznia 1878 r. w Lipsku. Był jednym z pierwszych psychologów prowadzących doświadczenia. W swojej pracy nie ograniczał się jedynie do siedzenia przy biurku i rozważania interesujących go zagadnień. Obiektem wiodącym w jego badaniach był zmysł dotyku, a ich wyniki zamieścił później w dziele „De Tactu” w 1834 r.

Badał rozmieszczenie zakończeń nerwowych w ludzkim ciele. Określił zależność między bodźcem a receptorem, które zostało zmatematyzowane przez Gustava Theodora Fechnera i znane jako prawo Webera – Fechnera.



*G. Th. Fechner*

Gustav Theodor Fechner

Niemiecki fizyk i filozof. Urodził się 19 kwietnia 1801 r. w Żarkach Wielkich, zmarł w 18 listopada 1887 r. w Lipsku. Zainicjował badania nad zjawiskami psychicznymi. Głównie zajmował się procesami elektrochemicznymi. Za pomocą doświadczeń i matematyki odkrył związek wrażeń psychicznych z bodźcami fizycznymi, który opisał w książce „Elemente der Psychophysik” wydanej w 1860 r. Jego największe

dokonanie to zmatematyzowanie twierdzenia Webera, które stało się podstawą psychofizyki.

### 3. Analiza wzoru

Prawo Webera – Fechnera zostało słownie podane przez Webera w formie:

*„Jeśli porównywane są wielkości bodźców, na naszą percepcję oddziałuje nie arytmetyczna różnica pomiędzy nimi, lecz stosunek porównywanych wielkości”*,

a 30 lat później Fechner podał następujący wzór wyrażający te prawo:

$$dw = k \frac{dB}{B},$$

$dw$  – różniczkowa zmiana intensywności wrażenia

$dB$  – różniczkowa zmiana wielkości bodźca

$B$  – wielkość bodźca

$k$  – współczynnik proporcjonalności

Aby uprościć to wyrażenie musimy je scałkować:

$$\int dw = \int k \frac{dB}{B}$$

$$w + A = k \cdot \ln B + a \quad A, a - \text{stałe}$$

$$w = k \cdot \ln B + (a - A) \quad a - A - \text{są stałymi, więc możemy je zapisać jako } const$$

Więc otrzymujemy równanie w postaci:

$$w = k \ln B + const$$

Przyjmując warunki progu percepcji (skrajne wartości bodźca będące w stanie pobudzić receptory człowieka) intensywność wrażenia jest minimalna ( $w = 0$ ), a wartość bodźca jest równa jego wartości progowej ( $B = B_0$ ), otrzymujemy wzór:

$$k \ln B_0 + const = 0$$

Po przekształceniu wzoru otrzymujemy *const* :

$$const = -k \ln B_0,$$

Otrzymaną wartość podstawiamy do wzoru określającego intensywność wrażenia i otrzymujemy:

$$w = k \cdot \ln B - k \cdot \ln B_0$$

$$w = k(\ln B - \ln B_0)$$

Zauważmy z łatwością, że jak się odejmuje to się dzieli (własności logarytmów). Po tej skomplikowanej operacji matematycznej otrzymujemy aktualnie używaną postać wzoru:

$$w = k \cdot \ln \frac{B}{B_0}$$

Po zestawieniu obu wzorów:

$$dw = k \frac{dB}{B}, \quad \text{i} \quad w = k \cdot \ln \frac{B}{B_0},$$

dochodzimy do wniosku, że wzór po prawej gwarantuje prostsze obliczenia, które jest w stanie wykonać uczeń szkoły średniej. Potwierdza to fakt, iż logarytmy są w programie nauczania szkół ponadgimnazjalnych, natomiast o różniczkach można dowiedzieć się dopiero na studiach.



#### 4. Pojęcie logarytmu naturalnego

Logarytm, którego podstawą jest niewymierna liczba  $e$ , jest nazywany logarytmem naturalnym i zapisywany w postaci  $\ln$ .

Liczba  $e$ , która jest podstawą tego logarytmu, jest nazywana „liczbą Nepera” na cześć jej francuskiego odkrywcy.

Definiujemy ją jako granicę ciągu o wyrazach :  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Jest także sumą szeregu:  $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$

W 1728 r. szwajcarski matematyk Daniel Bernoulli po raz pierwszy podał przybliżoną wartość, a w bardzo dużym przybliżeniu wynosi ona 2,72.

W XVIII w. analizą tej liczby zajmował się Euler i oznaczył ją symbolem  $e$ . Rozwinął ją do następującej postaci:

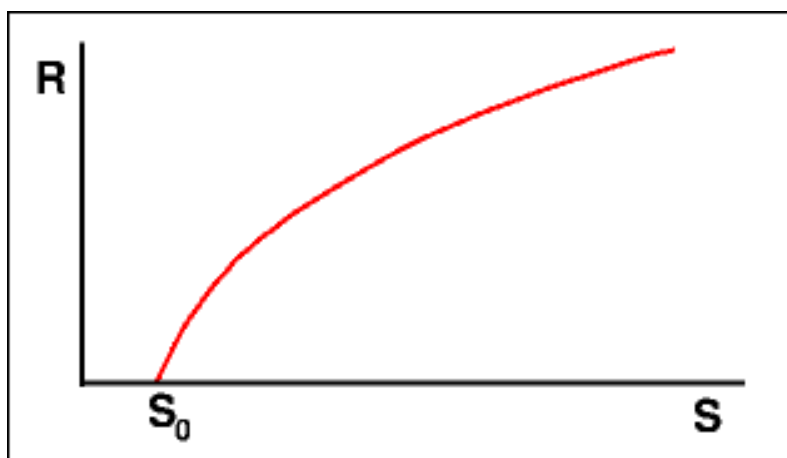
$$e = 2 + \frac{2}{2 + \frac{3}{3 + \frac{4}{4 + \frac{5}{5 + \dots}}}}$$

Podsumowując, liczba  $e$  jest niewymierna i znamy tylko jej przybliżenie co nigdy nam nie da dokładnego wyniku. Z tego powodu liczba  $2e$  to  $2e$ , a nie  $5,436563657\dots$ . Liczba ta jest wykorzystywana w wielu dziedzinach, m. in. w logarytmie naturalnym, który jest stosowany w prawie Webera – Fechnera.

## 5. Działanie prawa

A więc znamy już treść prawa i do czego się ono odnosi. Nie wiemy jednak co ono oznacza w praktyce. Aby to wytłumaczyć, posłużymy się przykładem początkujących pirotechników. Na początku swojej przygody z materiałami wybuchowymi mogą popełnić jeden elementarny błąd. Jego skutki mogą się niestety okazać tragiczne. Wyobraźmy sobie przygotowywanie noworocznego pokazu sztucznych ogni. Na pirotechnikach w tym czasie spoczywa wielka odpowiedzialność. Z jednej strony ich celem jest upiększenie tej szczególnej nocy i sprostanie oczekiwaniom widzów, z drugiej strony jednak nie mogą zapomnieć o kwestiach bezpieczeństwa. Powszechnie wiadomo, że zachwyty publiczności budzą najbardziej spektakularne wybuchy, jak je jednak uzyskać? I tutaj mamy do czynienia z psikusem, który zastawia nam nasz własny organizm. Wydaje nam się, że zwiększenie ilości materiałów wybuchowych, użytych do stworzenia petardy, zwiększy wprost proporcjonalnie efekt wizualny. Tak się jednak nie dzieje. Przykładowo, gdy zwiększymy skład petardy dziesięciokrotnie, obserwowany efekt jest nie dziesięciokrotnie, lecz jedynie dwukrotnie bardziej okazały. Dzieje się tak, ponieważ bodźce docierające do naszego organizmu analizowane są przez nasz mózg w sposób logarytmiczny. Naukowcy sądzą, że jest to naturalny sposób ludzkiego organizmu potrzebny do ochrony przed nadmierną ilością bodźca, która może się okazać groźna dla zdrowia.

Logarytmiczną reakcję organizmu, która jest opisana w prawie Webera – Fechnera, można przedstawić na wykresie zależności wielkości bodźca od poziomu wrażenia rejestrowanego przez człowieka.



**R** - intensywność wrażenia

**S<sub>0</sub>** – wartość progowa  
bodźca

**S** – wartość bodźca

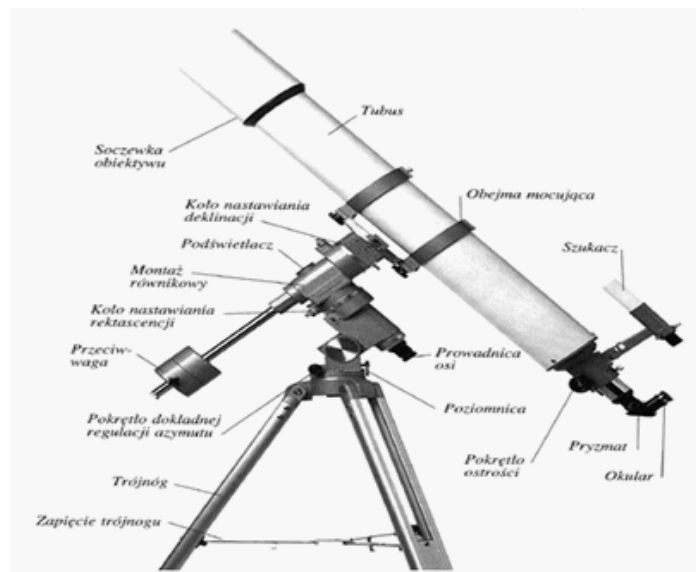
## 6. Przydatność i zastosowanie prawa w obecnych czasach

Wielu z was, czytelników, zastanawia się zapewne po co komu to potrzebne. A więc nam, każdemu z mieszkańców tej naszej pięknej planety. To właśnie dzięki tym dwóm dżentelmenom możemy dowiedzieć się jakiego teleskopu użyć, aby zobaczyć Marsjan na Marsie albo Plutonów na Plutonie. To korzystając z ich prawa możemy sprawdzić czy dźwięk może nas zabić, a jeśli tak, to jakie powinno być jego natężenie, czy też jaki ładunek należy dodać do fajerwerków, aby uzyskać dobry efekt świetlny itd.

- Astronomia

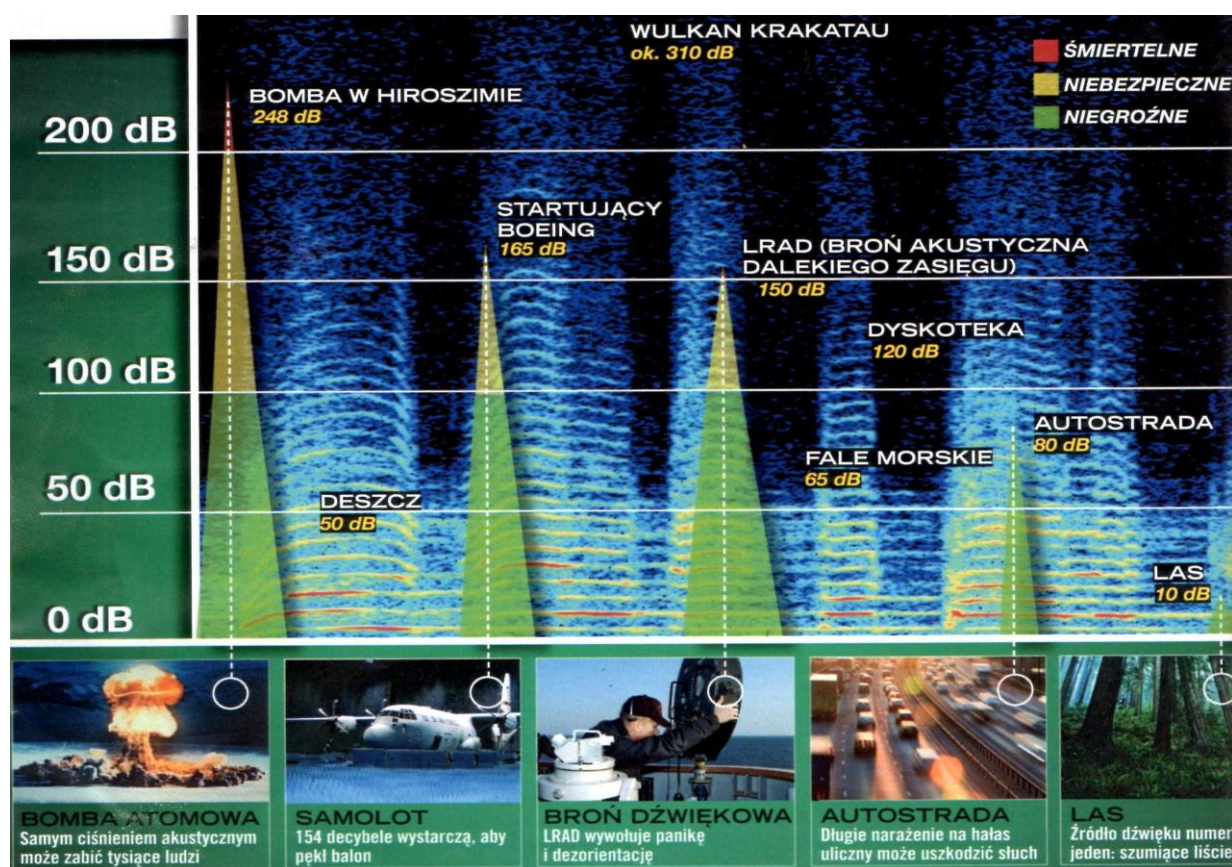
Wyobraźmy sobie, że jesteśmy profesjonalnymi inżynierami i budujemy profesjonalne obserwatorium. Aby wszystko było profesjonalne, musimy wybudować pomieszczenie, w którym natężenie światła będzie takie, że źrenica oka obserwatora będzie miała identyczną średnicę jak okular teleskopu, przez który ogląda wszechświat. Aby tak było, musimy zastosować prawo Webera – Fechnera. Gdy już wybudujemy to profesjonalne obserwatorium i zmienimy profesję na profesjonalnego astronoma, możemy obserwować wszechświat. Aby wszystko ładnie widzieć, musimy dobrać odpowiednie powiększenie. I tu znowu korzystamy z wspomnianego wcześniej prawa, które głosi, że intensywność wrażenia to logarytm z ilorazu zmiany wartości bodźca. Dzięki temu możemy się dowiedzieć, ile razy trzeba by powiększyć powierzchnię obiektywu, aby zobaczyć jaśniejszy obiekt.

\* rys.2.  
Teleskop



- Dźwięki

Prawo Webera – Fechnera odnosi się do zmysłów, a jednym z nich jest słuch. Ludzie zazwyczaj nie zdają sobie sprawy, jakie możliwości niesie za sobą zrozumienie zasad działania ludzkiego narządu słuchu. Dźwięk odbierany przez ucho może być użyty w różnych celach. Zazwyczaj jego zadaniem jest umiłanie czasu np. podczas wypełniania domowych obowiązków, lecz wykorzystany być może również w celu manipulacji ludzkimi zachowaniami. Słyszalne i niesłyszalne przez człowieka dźwięki mają wpływ na cały jego organizm, stąd nasuwa się pytanie, czy jakiś rodzaj dźwięku może nam zaszkodzić albo nawet zabić? Okazuje się, że jest to możliwe. Już przy 65 dB uaktywnia się hormon stresu, a przy 85 dB nasz słuch zostaje uszkodzony. Pierwszy ból rejestrujemy przy natężeniu 107 dB, przy natężeniu o 30 dB większym ciało zaczyna drgać, a przy 145 dB nasz wzrok zaczyna szwankować. 148 dB to ból całego ciała, a gdy natężenie dźwięku osiąga wartość 158 dB tracimy świadomość. Dawką śmiertelną dla człowieka jest 190 dB, czyli natężenie dźwięku w przypadku eksplozji laski dynamitu. Z tego możemy wywnioskować, że niekoniecznie zabija nas ładunek wybuchowy, ale bardziej śmiertelny jest hałas emitowany przez wybuch ładunku.



\* rys.3. Porównanie przykładowych wielkości natężenia dźwięku

- Pirotechnika

Prawo Webera – Fechnera stosowane jest również przez pirotechników. To właśnie dzięki temu równaniu są w stanie stworzyć ładunek, który ma większy efekt dźwiękowy i świetlny, a jednocześnie mogą określić jego zasięg rażenia. Dzięki temu tworzone są coraz lepsze fajerwerki, które upiększają nam noc sylwestrową, a widowiska te są coraz bezpieczniejsze.



\* rys.4.  
Skutki braku znajomości prawa Webera – Fechnera w pirotechnice

- Zapachy

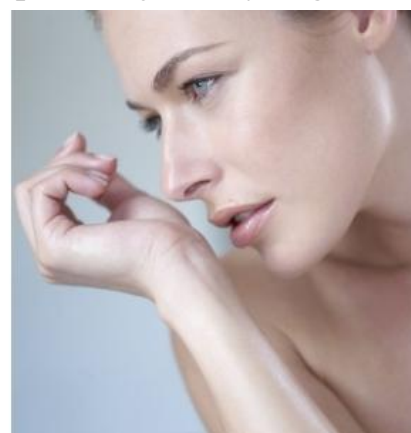
W przemyśle perfumeryjnym znajomość prawa Webera – Fechnera jest niezbędna. To dzięki niemu możliwe jest określenie proporcji składników tworzonego zapachu, aby jego intensywność była odpowiadająca wymaganiom konsumenta. Określają go wzorem:

$$S_Z = k \cdot \log(c_{od}/Z) = k \cdot \log c_{od} - k \cdot \log Z$$

$$k \cdot \log c_{od} = S_0$$

$$\log c_{od} = S_0/k$$

$$c_{od} = 10^{S_0/k}$$



$S_Z$  - intensywność zapachu próbki rozcieńczonej Z-krotnie;

k - współczynnik Webera- Fechnera

$c_{od}$  - liczba jednostek zapachu w próbce przed rozcieńczeniem

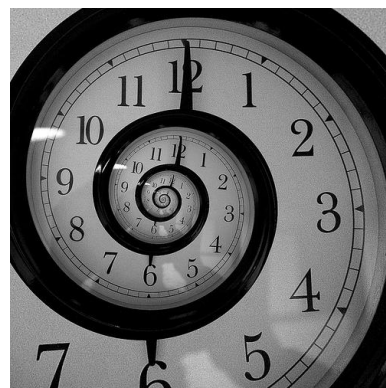
Z - krotność rozcieńczenia badanej próbki;

$S_0$  - stała empiryczna (intensywność zapachu przed rozcieńczeniem)



- Czas

Można by się zastanawiać w jaki sposób fizjologiczne prawo może mieć wpływ na coś tak nieuchwytnego jak czas. Największym dokonaniem ludzkości w dziedzinie czasu jest możliwość zmierzenia jego upływu za pomocą różnego rodzaju zegarów. Myślenie to jest słuszne, prawo Webera - Fechnera nie wpływa bezpośrednio na czas, ale określa, w jaki sposób ludzie go postrzegają. Zapewne każdy z nas narzekał, że nasza podróż do dorosłości ciągnie się w nieskończoność, a gdy osiągniemy nasz cel, to latka lecą w mgnieniu oka. Odpowiednio interpretując powyższe prawo, możemy wyjaśnić fenomen wzrostu prędkości upływania czasu. „Punkt widzenia zależy od punktu siedzenia” – to jak długi jest 1 rok, zależy od tego, ile lat przeżyliśmy do tej pory. Dla dziecka, które niewiele jeszcze przeżyło, i dla osoby starszej ten sam okres czasu odczuwalny



jest w całkowicie inny sposób. Dzieje się tak, ponieważ ich punkty widzenia się od siebie diametralnie różnią. Na przykład dla dziesięcioletniego dziecka 10 lat będzie trwało bardzo długo, ponieważ jest to podwojenie jego wieku, natomiast dla pięćdziesięcioletniego człowieka 10 lat jest jedynie wycinkiem z życia, więc nie wydaje się tak długim okresem. Wynika stąd, że subiektywne odczucie upływu czasu zależy

od lat już przez człowieka przeżytych. Zatem zjawisko przez nas opisywane polega na zasadzie działania naszego umysłu i sposobie analizy informacji do niego docierających.



## 7. Prawo Webera – Fechnera w medycynie

Prawo Webera – Fechnera, jak już wiemy, jest wykorzystywane praktycznie w każdej dziedzinie życia: w astronomii, pirotechnice, teatrach, w branży perfumeryjnej, oświetleniowej, chemicznej itd. Oczywiście wykorzystuje się je też w medycynie, co jest punktem kulminacyjnym naszej pracy. Wiedząc, kto opracował tę zależność między siłą bodźca a reakcją organizmu człowieka, gdy wiemy skąd się wziął taki, a nie inny wzór, zapoznaliśmy się z tajnikami jego wyprowadzenia i z logarytmem, który w sobie zawiera oraz dowiedzieliśmy się w jakich sytuacjach korzystamy ze wzoru panów Webera i Fechnera, możemy przejść do tematu przewodniego naszej pracy: logarytmów w medycynie.



- Okulistyka

Pierwszą z nauk medycznych wykorzystujących logarytm opracowany przez Fechnera jest okulistyka. W badaniu, które nazywa się refraktometrią komputerową, lekarz wypuszcza wiązki światła, operując dodatkowo soczewkami skupiającymi i rozpraszającymi, o odpowiedniej sile. Wykonując tą czynność próbuje określić, dla jakiej mocy bodźca świetlnego reakcja oka pacjenta jest prawidłowa – czyli kiedy pacjent widzi najwyraźniej. Pozwala to na podjęcie odpowiedniego leczenia, decyzji o noszeniu okularów korekcyjnych lub o operacji.



\* rys.5.  
Badanie refraktometrem komputerowym

- Laryngologia

Następna specjalność wykorzystująca prawo podane przez Webera to laryngologia. Lekarz wprowadza pacjenta do pomieszczenia dźwiękoszczelnego, zakłada mu słuchawki i podaje przez nie do ucha najniższe dźwięki, a gdy pacjent zgłosi, że coś tam słyszy, lekarz wykonujący badanie ustala jego indywidualny próg słyszalności. Badanie to nazywa się audiometrią. Do najbardziej popularnych rodzajów audiometrii zaliczamy: tonalną i słowną. Tonalna polega na usłyszeniu dowolnego dźwięku, natomiast słowna na usłyszeniu i zrozumieniu mowy. Istnieje także odmiana tego badania stosowana u dzieci - audiometria zabawowa, która opiera się na takiej samej zasadzie jak wcześniej wymienione rodzaje badania, jednak nieznacznie się od nich różni. Pacjent sygnalizuje usłyszenie tonu poprzez wrzucenie klocka do pudełka.



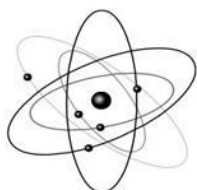
\* rys.6.  
Audiometria zabawowa



\* rys.7.  
Audiometria



## Podsumowując:



Logarytmy są nieodłączną częścią medycyny. To dzięki nim, a zwłaszcza dzięki prawu Webera – Fechnera, możemy sprawdzić, czy nasz organizm jest zdrowy w 100 %. To na podstawie logarytmu, który podał Fechner, można określić czy widzimy, słyszymy albo czujemy prawidłowo. Poza prawem podanym przez Webera wykorzystywane są również inne działania matematyczne, w tym na logarytmach, aby określić stan naszego zdrowia, podjąć odpowiednie leczenie lub po prostu skonstruować odpowiednią maszynę do badań albo stworzyć nowy lek. Poza opisanymi wyżej naukami logarytmy są wykorzystywane między innymi w: dermatologii (nauka zajmująca się skórą), alergologii (dziedzina medycyny obejmująca nadwrażliwość organizmu na jakąś substancję – alergen), medycynie nuklearnej (stosującej otwarte źródła promieniotwórcze w leczeniu i diagnostyce), fizyce medycznej (dającej nowe formy leczenia nuklearnego) i w wielu inżynieriach, na przykład: biomedycznej i genetycznej oraz w biotechnologii (które podnoszą poziom technologiczny współczesnej medycyny).



\* rys.8.  
Biotechnologia



\* rys.9.  
Inżynieria biomedyczna (proteza ręki)



\* rys.10.  
Inżynieria genetyczna – nić DNA

## 8. Podsumowanie

Logarytmy są nieodłącznym elementem naszego życia codziennego. Stosuje je każdy, choć niewielu wie kiedy i gdzie. Przykładem takiej sytuacji jest prawo Webera – Fechnera, które sformułował E. H. Weber, a zmatematyzował G. T. Fechner. Prawo powstałe w XIX w. jest podstawą psychofizyki. Wyraża je wzór:  $w = k \cdot \ln(B/B_0)$ . Prawo określa, w jaki sposób organizm reaguje na zmianę intensywności czynnika zewnętrznego i można to obliczyć mnożąc współczynnik proporcjonalności z logarytmem ilorazu ze zmiany natężenia bodźca i jego pierwotnym nasileniem.

Prawo Webera - Fechnera pokazuje nam, że ludzkie zmysły reagują w sposób logarytmiczny. Naukowcy sądzą, że jest to naturalny sposób ludzkiego organizmu potrzebny do ochrony przed nadmierną ilością bodźca, która może się okazać groźna dla zdrowia. Z tego powodu działanie prawa muszą znać wszyscy, którzy zajmują się pirotechniką, ponieważ podwojenie ładunku, wcale nie przyniesie zamierzonych efektów wizualnych.

Zapewne każdy zastanawia się teraz kiedy i gdzie stosuje jakiś logarytm. Więc stosujemy go na przykład w astronomii (odpowiednie zaciemnienie i powiększenie okularu teleskopu), pirotechnice (zależność między ilością ładunku a efektem świetlnym – dźwiękowym), akustyce (dobranie takiego natężenia dźwięku, aby, na przykład na koncercie, słuchaczom nie groziło uszkodzenie słuchu) i przemyśle perfumeryjnym (odpowiednie proporcje składników). Okazuje się, że dzięki prawu Webera – Fechnera można również wytłumaczyć fenomen czasu – zainteresowani niech sięgną do naszej publikacji.

Prawo to oczywiście wykorzystuje się też w medycynie. Stosuje się je między innymi w: okulistyce (określenie reakcji oka pacjenta na światło), laryngologii (wrażliwość ucha na dźwięk) oraz w: dermatologii (wrażliwość skóry), alergologii (wrażliwość na alergen), medycynie nuklearnej (leczenie i diagnostyka odpowiednią ilością środków promieniotwórczych), fizyce medycznej (dającej nowe formy leczenia nuklearnego), inżynierii biomedycznej, inżynierii genetycznej i biotechnologii, które rozwijają technologicznie współczesną medycynę.

## 9. Summary

Logarithms are inseparable part of our everyday life. They have an influence on our life but not many of us know how they really affect us. Example of such situation is the Weber-Fechner law, which was invented by E. H. Weber and thirty years later G. T. Fechner defined it by formula:  $w = k \cdot \ln(B/B_0)$ . It is the main law of psychophysics until these days. This general relationship between the initial intensity of something and the smallest detectable increment is exactly what Weber noticed and formalized into “Weber’s law”. The discrimination threshold, or the threshold for detecting an increment in the quantity or intensity of something, changes depending on how much there is before we add the increment. Weber’s law is a thesis about how this threshold change happens.

The Weber-Fechner law shows how human brain works. It uses logarithms to analyze stimuli, which are received by it. Scientists claim that this is a natural way which our body uses to prevent itself from amount of stimuli which can be dangerous for our health. For this reason knowledge of that law is very important especially for pyrotechnics.

So where logarithms are used? Well, for example, we can find them in: astronomy, pyrotechnic, acoustic and perfume industry. Moreover Weber – Fechner law can explain phenomenon of the passing time – for more information read sixth chapter of our book written in Polish.

We can also find the Weber – Fechner law in the medicine. It is used in ophthalmology and the branch of medicine dealing with ear, nose and throat diseases as well as dermatology, the branch of medicine dealing with allergy, nuclear medicine, medical physics, biomedical technology, genetic technology and biotechnology. It causes development of medicine technology.



## 10. Bibliografia

- <http://www.analizamatematyczna.enhost.pl/ror1.htm>
- [http://pl.wikipedia.org/wiki/Podstawa\\_logarytmu\\_naturalnego](http://pl.wikipedia.org/wiki/Podstawa_logarytmu_naturalnego)
- [http://pl.wikipedia.org/wiki/Prawo\\_Webera-Fechnera](http://pl.wikipedia.org/wiki/Prawo_Webera-Fechnera)
- <http://www.math.edu.pl/liczba-e>
- <http://www.zsliia-tuchola.oswiata.org.pl/0000014C.html>
- „Encyklopedia matematyka”, wydawnictwo GREG, Kraków 2007
- [http://www.optyczne.pl/13.5-artyku%C5%82-Lornetka\\_czy\\_teleskop\\_\\_Powi%C4%99kszenie.html](http://www.optyczne.pl/13.5-artyku%C5%82-Lornetka_czy_teleskop__Powi%C4%99kszenie.html)
- <http://tga.togo.lodz.pl/?powiekszenie-teleskopu,12>
- „Świat wiedzy” nr 1/2012, str. 76 – 79
- <http://www.chem.univ.gda.pl/~tomek/ph.htm>
- <http://www.odory-szczecin.ps.pl/uploads/pdf/8.%20%20METODA%20EKSTRAPOLACYJNA.pdf>
- <http://fizyka.org/?artykul,46>
- <http://www.neuro.uu.se/fysiologi/gu/nbb/lectures/WebFech.html>
- <http://www.resmedica.pl/pl/archiwum/zdart30010.html>
- <http://laryngologia.pl/sites/34/>
- <http://www.kzfm.fis.agh.edu.pl/>
- <http://www.biomed.agh.edu.pl/index.php?ID=2>
- <http://www.nuk.bieganski.org/index.php?la=pl&go=mednuk>