Spis treści:

1.Biografia Leonarda Fibonacciego.

Leonardo Fibonacci był włoskim matematykiem urodzonym między rokiem 1170-1180 w Pizie. Był synem handlarza, stąd też już za młodych lat uczył się posługiwać liczydłem. Gdy dorósł odbył liczne podróże po basenie Morza Śródziemnego, w trakcie tych podróży napisał jedno ze swoich najsłynniejszych dzieł – *Liber Abacci* (Księga obliczeń), w niej to dał początek używanemu po dziś dzień arabskiemu systemowi liczbowemu. Wprowadził system dziesiętny z zerem na pierwszym miejscu, co w dużym stopniu ułatwiło obliczenia.

W swoich czasach był wybitną postacią, świadczy o tym chociażby spotkanie z cesarzem Fryderykiem II. Ostatecznie został zapomniany, a krzywa wieża w Pizie jest bardziej znana aniżeli jeden z najwybitniejszych matematyków tamtych lat. Po za *Liber Abacci*, Fibonacci napisał również *Practica Geometriae* oraz *Liber Quadratoum*. Zmarł między rokiem 1240- 1250.

2.Ciąg liczb Fibonacciego.

Spośród wszystkich ciągów liczbowych, które występują, jeden jest szczególnie interesujący. Liczby naturalne tworzą ciąg o takiej własności, że kolejny wyraz (z wyjątkiem dwóch pierwszych) jest sumą dwóch poprzednich nazywa się liczbami Fibonacciego i pojawiają się w tak wielu sytuacjach, że wydaje się to niemożliwe.

Ciąg Fibonacciego to ciąg liczb określony rekurencyjnie w sposób następujący:
$F_0 = 0$
$F_1 = 1$
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, dla $n \geq 2$

Początkowe wartości tego ciągu to:
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

Podstawowy ciąg liczb Fibonacciego to: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Każda liczba w ciągu jest sumą dwóch poprzednich (poza pierwszą i drugą). Mamy więc do czynienia z ciągiem rekurencyjnym. Ciąg liczbowy Fibonacciego jest pierwszym ze znanych ciągów tego rodzaju. Nie byłoby w nim nic szczególnego, gdyby nie fakt, że posiada szereg specyficznych właściwości. Poczynając od zależności między liczbami, a kończąc na występowaniu tych liczb w otaczającym nas świecie. Fibonacci stworzył ten ciąg na potrzebę wyjaśnienia czysto naturalnego problemu z królikami. Najbardziej bliski człowiekowi jest on sam, trudno jest więc zacząć przytaczać przykłady od innego elementu wszechświata jak właśnie od człowieka. Statystycznie rzecz ujmując, każdy z nas ma jedną głowę, jeden nos, jedne usta, jeden język, dwie ręce, dwie nogi, dwa płuca, 3 elementy składowe ręki oraz nogi, 5 palców u każdej ręki i nogi (notabene, każdy z nich składa się z 3 części). Kolejne przykłady przytoczyć można z życia zwierząt, roślin a także martwej natury. Oczywiście, nie wszystko układa się w ciąg Fibonacciego (jak chociażby 4 łapy psa). Jednak na liczbach nie kończy się obecność ciągu w naturze. Istotą koncepcji widzenia świata przez pryzmat tego niezwykłego ciągu liczbowego są relacje między liczbami.

3.Liczba phi.

W tabeli 1 przedstawiono stosunki poszczególnych liczb miedzy sobą. Na pierwszy rzut oka widać, że stosunki między liczbami w tym ciągu pozostają w stałej relacji. Każda liczba ciągu Fibonacciego podzielona przez liczbę następną daje wynik równy w przybliżeniu 0,618, natomiast dzieląc ją przez liczbę poprzednią otrzyma się 1.618 (im większe liczby tym dokładniejsza zależność). Stałe są również relacje między bardziej odległymi od siebie liczbami.

Najważniejsze ogólnie ujęte zależności prezentuje wzór:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \approx 0,618, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \approx 1,618$$

Wszystkie zależności oparte na liczbach Fibonacciego nazywane są współczynnikami Fibonacciego i pozwalają na opisanie szeregu zdarzeń czy to w przyrodzie czy też na rynku finansowym. Co ciekawe, zależności między współczynnikami Fibonacciego są identyczne jak w przypadku liczb Fibonacciego, (np. 0.236/0.382 = 0,618). Najważniejszą spośród wszystkich tych liczb jest 0,618 nazywana liczbą phi (Φ). Jest to jedyna liczba, która po dodaniu 1 daje swoją odwrotność, co prezentują wzory:

$$0,618 + 1 = \frac{1}{0,618}$$

$$\frac{1}{1,618} = 0,618$$

$$0,618 \times 1,618 = 1$$

Ciekawym jest więc brak zainteresowania liczbą, która określa zależności w całym wszechświecie, poczynając od kształtu galaktyk, a kończąc na muszli ślimaka Nautilus.

Tabela. Stosunki liczbowe między liczbami w ciągu Fibonacciego

	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
1	1,000	2,000	3,000	5,000	8,000	13,000	21,000	34,000	55,000	89,000
2	0.500	1,000	1,500	2,500	4,000	6,500	10,500	17,000	27,500	44,500
3	0,333	0,667	1,000	1,667	2,667	4,333	7,000	11,333	18,333	29,667
5	0,200	0,400	0,600	1,000	1,600	2,600	4,200	6,800	11,000	17,800
8	0,125	0,250	0,375	0,625	1,000	1,625	2,625	4,250	6,875	11,125
13	0,077	0,154	0,231	0,385	0,615	1,000	1,615	2,615	4,231	6,846
21	0,048	0,095	0,143	0,238	0,381	0,619	1,000	1,619	2,619	4,238
34	0,029	0,059	0,088	0,147	0,235	0,382	0,618	1,000	1,618	2,618
55	0,018	0,036	0,055	0,091	0,145	0,236	0,382	0,618	1,000	1,618
89	0,011	0,022	0,034	0,056	0,090	0,146	0,236	0,382	0,618	1,000

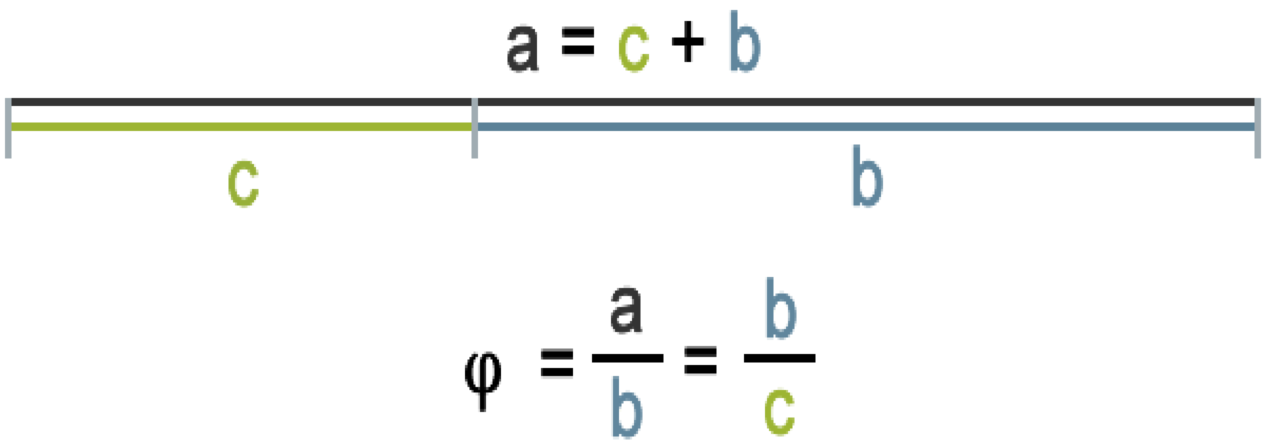
Istnieją trzy bezpośrednie zastosowania liczby phi w matematyce, a dokładnie mówiąc w geometrii. Wyróżnia się:

1.złoty podział,

2.złoty prostokąt

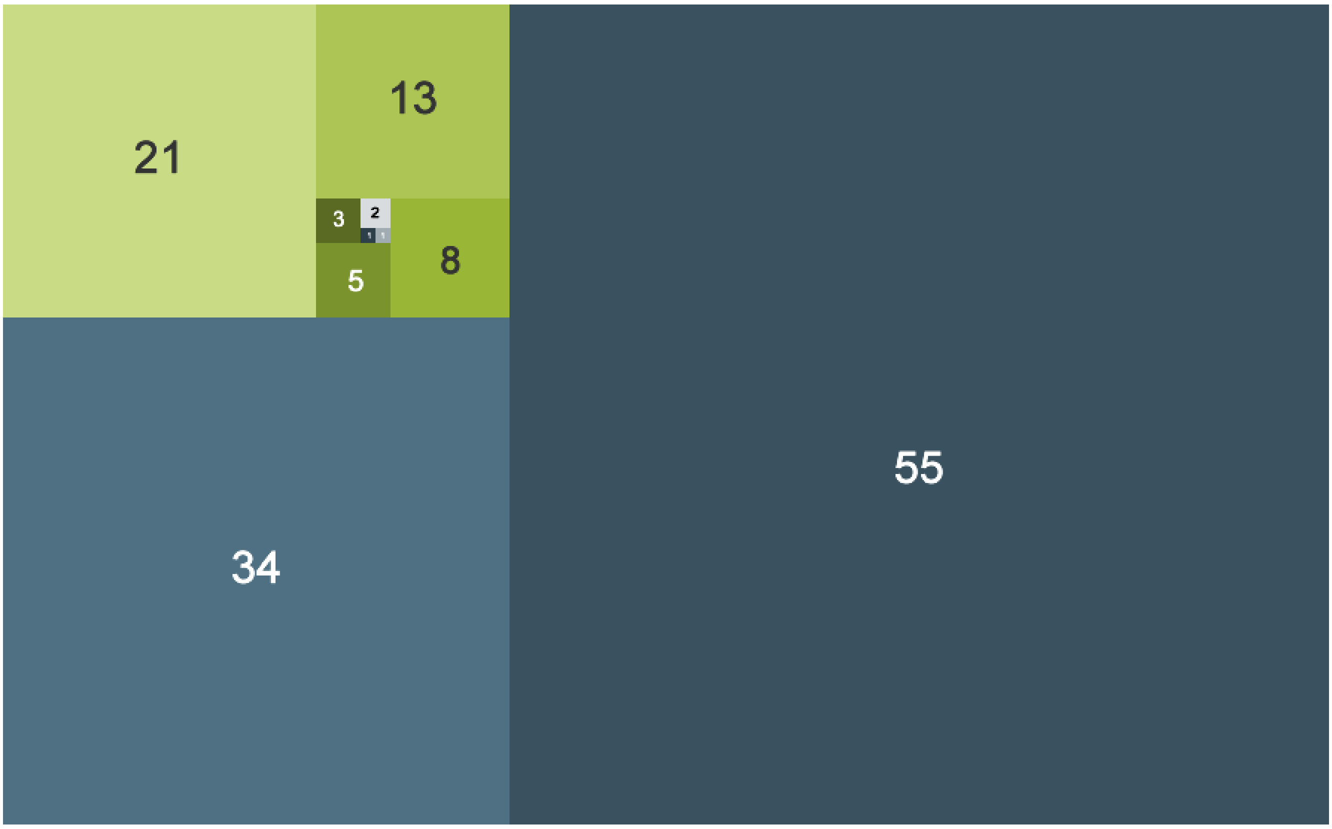
3.złotą spiralę.

1.**Złotym podziałem** nazywamy taki podział odcinka, że relacja między krótszą częścią a dłuższą, jest taka sama jak relacja dłuższej części do całości i jest równa phi, czyli 0,618. Każdy odcinek może zostać tak dzielony w nieskończoność. Natura wydaje się dzielić złotym podziałem, wiele z możliwych do wykazania proporcji w ciele ludzkim jest bliska bądź idealnie równa złotemu podziałowi. Najbardziej znamiennym przykładem jest wysokość na jakiej znajduje się pępek, która statystycznie wynosi właśnie 0,618 ciała ludzkiego. Inne to proporcje tworzone przez długości poszczególnych kości w ciele ludzkim, układ twarzy itd.



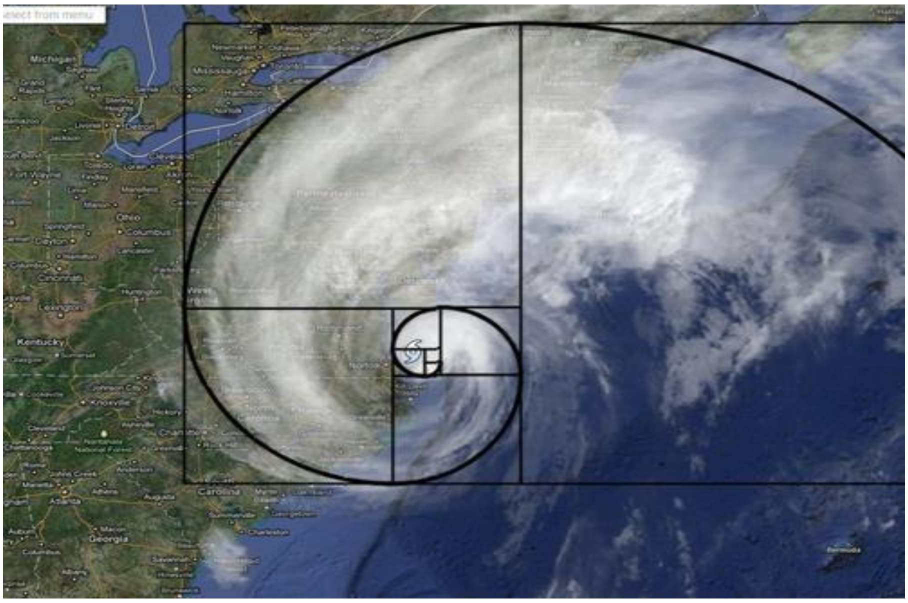
Złoty podział - schemat.

2. **Złoty prostokąt** składa się z boków pozostających w relacji 1.618 do 1. Prostokąt taki może być dzielony w nieskończoność na mniejsze złote prostokąty oraz kwadraty, wykorzystując oczywiście złoty podział.



Złoty prostokąt - schemat

3.**Złota spirala** jest dynamiczną formą wykorzystania złotej proporcji. Jest to spirala logarytmiczna, która nie posiada ani końca ani początku. W dowolnym momencie stosunek długości łuku do jego przekątnej wynosi 1.618. Trzymając się zasady złotego podziału, relacja długości przekątnej do dłuższego promienia jest taka sama jak długości dłuższego promienia do krótszego i wynosi 1.618.



Spirala Fibonacciego - Huragan Irene

Spirala Fibonacciego – kaktus

Spirala Fibonacciego – skorupa ślimaka Nautilus

Spirala Fibonacciego – strumień wody

4.Ciąg liczb Fibonacciego w przyrodzie.

Ciąg Fibonacciego należy do ulubionych ciągów spotykanych w przyrodzie – można go odnaleźć w wielu jej aspektach – zarówno w **kształtach fizycznych struktur**, jak i w przebiegu zmian w **strukturach dynamicznych**.

1. Króliki.

Zmiany dynamiczne pod tym względem najlepiej charakteryzuje rozmnażanie się królików. Przy założeniu, że początkowo mamy jedną parę – samca i samicę, którzy po miesiącu wydadzą na świat potomstwo, po kolejnym miesiącu ich progenitura jest zdolna do reprodukcji, rodzice zaś nadal się rozmnażają, łatwo policzyć roczny przyrost królików w sposób charakterystyczny dla naszego ciągu. Spójrzmy na tabelkę:

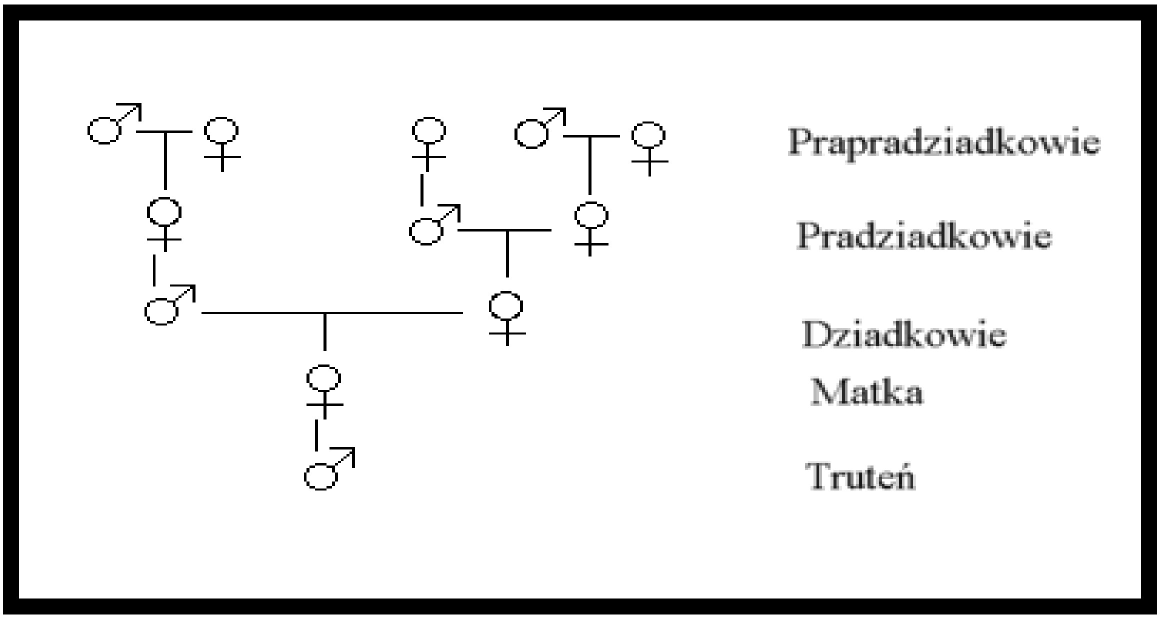
Miesiąc	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Liczba par dorosłych	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
Liczba par młodych	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
Liczba par w sumie	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Wniosek:

Każda para co miesiąc wydaje na świat parkę młodych, które po miesiącu, będąc już zdolne do rozrodu, rozmnażają się w analogiczny sposób, przy czym wciąż rodzą się młode z poprzednich par.

2.Trutnie.

Kolejnym przykładem struktury dynamicznej mogą być trutnie. Samiec pszczoły w przeciwieństwie do samicy (królowej, która ma zarówno ojca, jak i matkę – inną królową) powstaje wyłącznie dzięki matce. Jak więc wygląda jego drzewo genealogiczne?

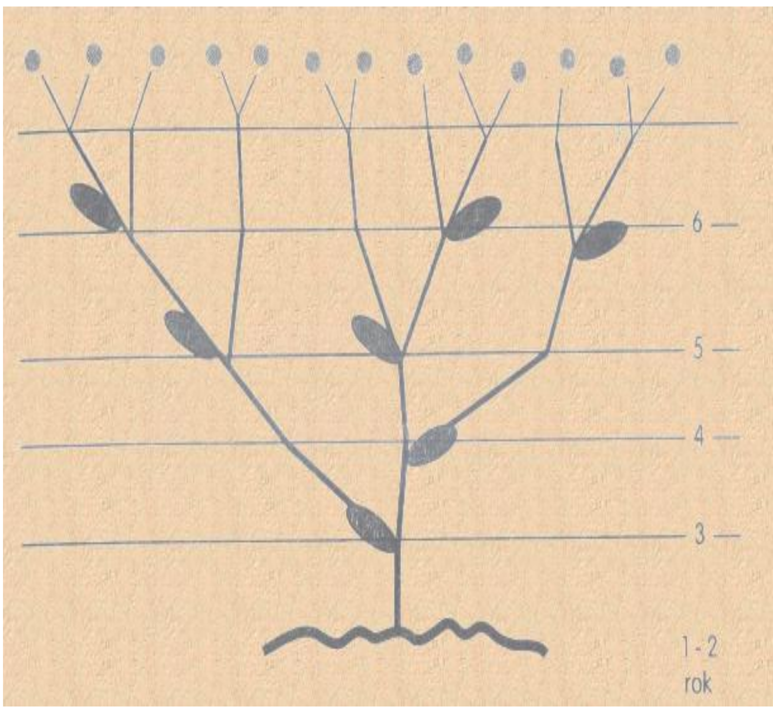


Wniosek:

Przodkowie trutnia – jego matka, jej rodzice i dalej, aż po pradziadków, narastają zgodnie z zasadą ciągu Fibonacciego – kolejne pokolenia to suma dwóch poprzednich.

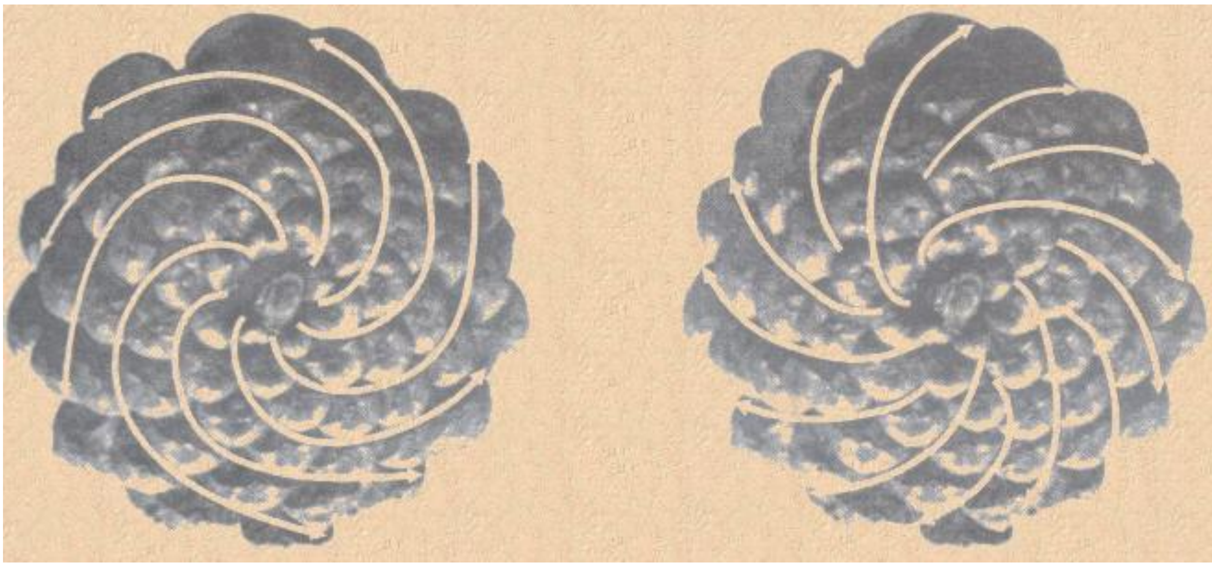
3.Drzewa.

Na rysunku poniżej pokazane jest drzewo, które rośnie podobnie, jak rozmnażają się króliki w modelu Fibonacciego: każda gałąź przez pierwszy rok jedynie wzrasta, a w każdym następnym roku wypuszcza jedną młodą gałąź. Ten model wzrostu wydaje się być nawet bardziej realistyczny, niż rozmnażanie się stada królików - biolodzy potrafią wskazać drzewa, które tak właśnie się rozrastają.

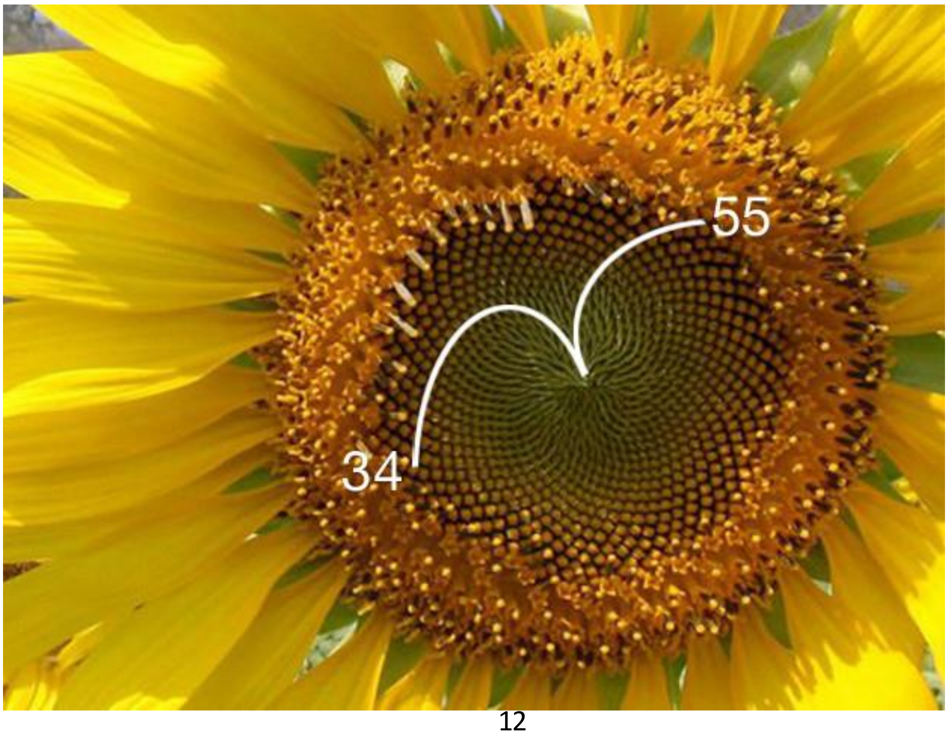


4.Szyszki i słoneczniki.

Najbardziej znanymi przykładami występowania liczb Fibonacciego w naturze są układy łusek na szyszkach i układy pestek w tarczach słoneczników.

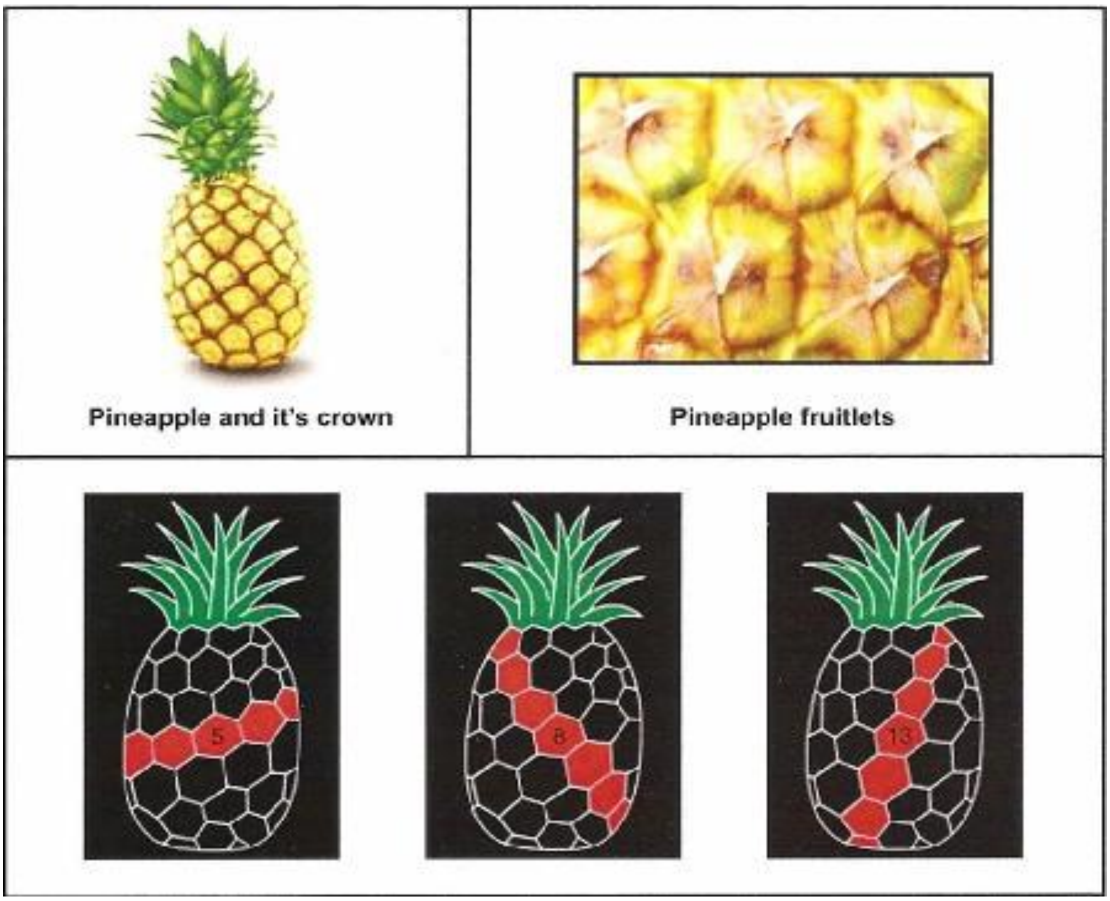


Na rysunku jest pokazana szyszka, na której zaznaczono spirale tworzone przez jej łuski. Spirale te są prawoskrętne i lewoskrętne (w przypadku tej szyszki jest 8 - lewoskrętnych i 13 - prawoskrętnych). Nie zawsze szyszki nawet tego samego gatunku sosny mają taką samą liczbę spiral, nie zawsze również przeważają lewoskrętne czy prawoskrętne. Ale, z wyjątkiem kilku procent "odszczepieńców", łuski na większości szyszek układają się wzdłuż spiral, których liczby są ściśle związane z kolejnymi liczbami Fibonacciego. Podobnie, jak łuski na szyszkach, układają się pestki w tarczy słonecznika - również wzdłuż spiral, których liczba jest związana z liczbami Fibonacciego.



5. Ananas.

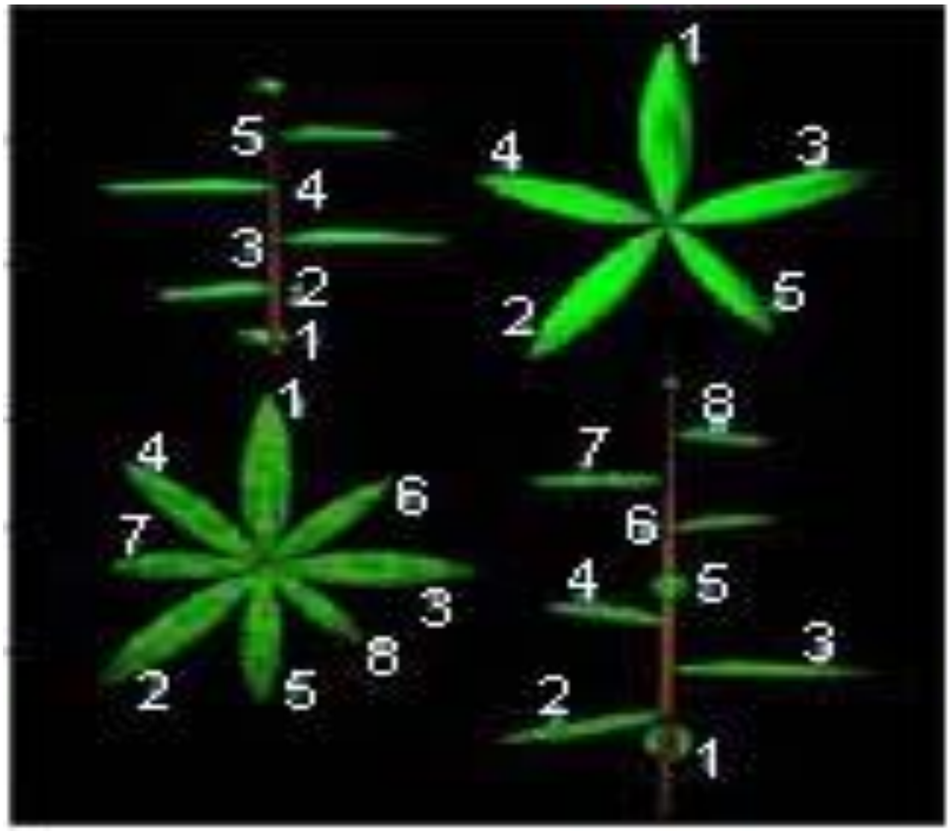
Układ ziarenek ananasa. Ziarenka ananasa przypominające sześciokątne klatki są rozmieszczone w rzędach o różnych kierunkach:
• 5 równoległych rzędów podnoszących się łagodnie w prawo,
• 8 rzędów podnoszących się nieco bardziej stromo w lewo,
• 13 rzędów podnoszących się bardziej stromo w prawo.



6. Liście na gałązkach i gałązki na łodygach.

Zadziwiający wynik dają obserwacje rozkładu liści na gałązkach i gałązek na łodydze drzewa. Nie wszystkie liście leżą jeden nad drugim, podobnie gałązki. Układają się one wzdłuż spirali, która okrąża łodygę. Krzywa ta nazywa się helisą. Cyklem tej krzywej nazywa się odległość liści osadzonych dokładnie jeden nad drugim, wzdłuż gałęzi lub łodygi. Helisę danej rośliny można scharakteryzować dwiema liczbami: liczbą obrotów cyklu helisy wokół gałązki lub łodygi oraz liczbą odstępów między kolejnymi liśćmi leżącymi nad sobą.

Okazuje się, że dla bardzo wielu roślin te dwie liczby są liczbami Fibonacciego. Na przykład, drzewo bukowe ma cykl złożony z trzech liści i wykonuje on jeden obrót, a wierzba amerykańska ma cykl złożony z 13 liści i wykonuje on 5 obrotów.



5.Ludzkie ciało, a złoty podział.

Najbliższe nam liczby Fibonacciego to 1,2 i 5, pięć palców u każdej ręki, dwie kończyny górne i dwie dolne, pięć zmysłów, trzy wypustki głowy (dwoje uszu i nos), trzy otwory głowy (dwoje oczu i usta) i pojedyncze organy. W tym schemacie identycznych części ciała brakuje liczby 4, a nawet, jeśli uznamy cztery kończyny za należące do tej samej kategorii, to znacznie więcej znajdziemy w naszym ciele liczb 5. Poza tym, u większości ludzi wysokość do pępka stanowi 0,618 łącznej wysokości, co zauważył i naszkicował Leonardo da Vinci. Jeśli zmierzymy długość poszczególnych kości palców wówczas ich proporcje będą również oscylowały wokół liczby fi.

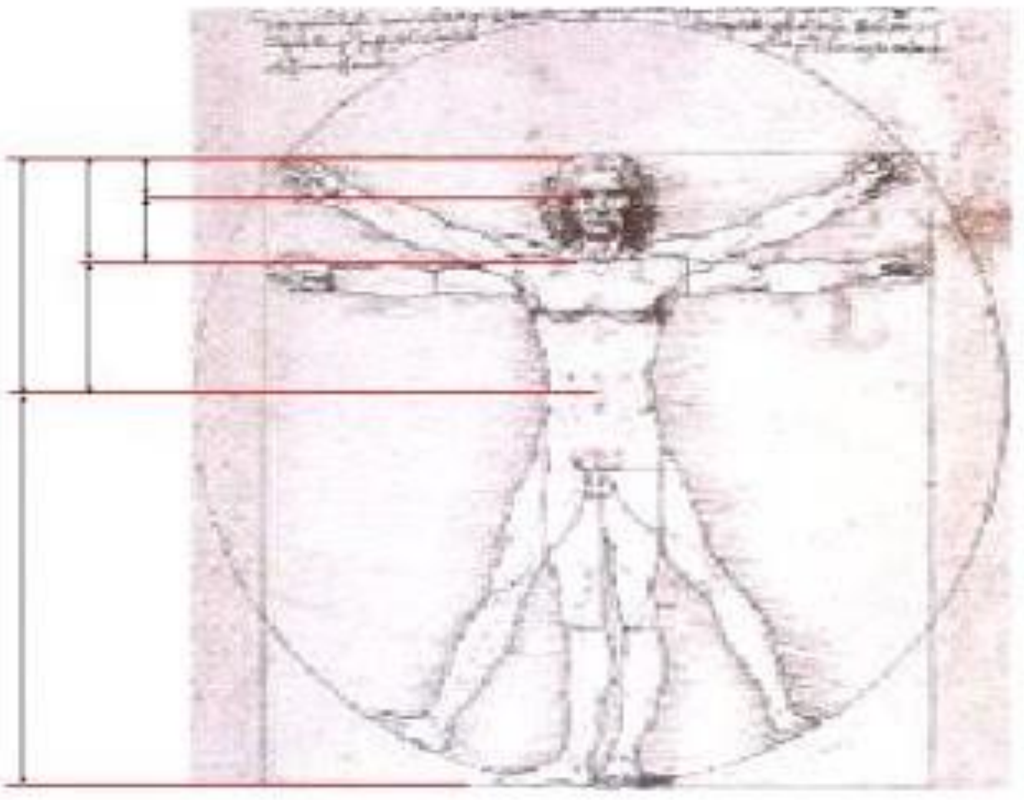
W ludzkim ciele, w dokładniej w ciele mężczyzny, zarówno cała postać, jak i wiele poszczególnych części podlega prawom złotego cięcia.

Weźmy na początek całą postać:

A) Odległość od czubka głowy do ramion / odległość od oczu do ramion = fi

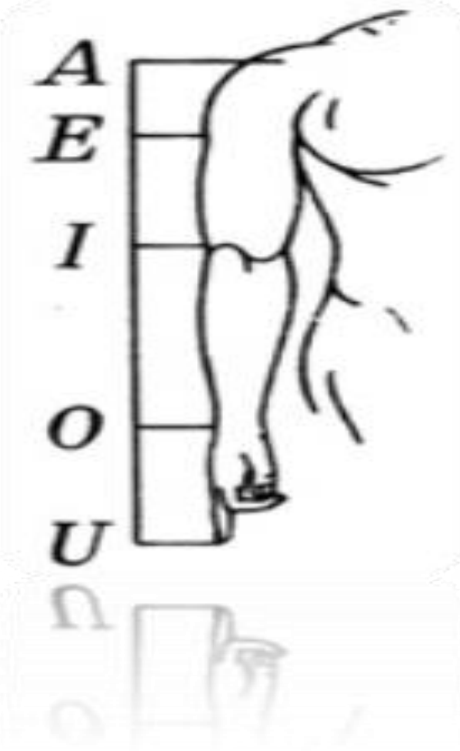
B) Odległość od czubka głowy do podłogi / odległość od pępka do podłogi = fi

C) Odległość od czubka głowy do pępka / odległość od ramienia do pępka = fi



Zanalizujmy teraz rękę i dłoń:

- Odległość między ramieniem a czubkiem palców (A-U) / odległość między łokciem a czubkiem palców (I-U)= fi
- Odległość od łokcia do nadgarstka (I-O) / odległość od nadgarstka do czubka palców(O-U)=fi
- Odległość od ramienia do łokcia (A-I) / odległość od pachy do łokcia (E-I) = fi



Podobne zależności znajdziemy mierząc palce u nóg, stawy dłoni, odległości między kręgami.

$$\frac{d}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}=1{,}618$$

6.Bibliografia:

1) http://analizy.investio.pl/seria-analiza-techniczna-leonardo-fibonacci-i-jego-ciag-liczbowy/

2) http://www.swiatmatematyki.pl/index.php?p=50

3) http://free.of.pl/f/fibonacci/wystepowanie.html

4) http://altao.pl/3/artykuly/tajemnice-przyrody-i-matematyki-ciag-fibonacciego-i-liczba-fi.htm