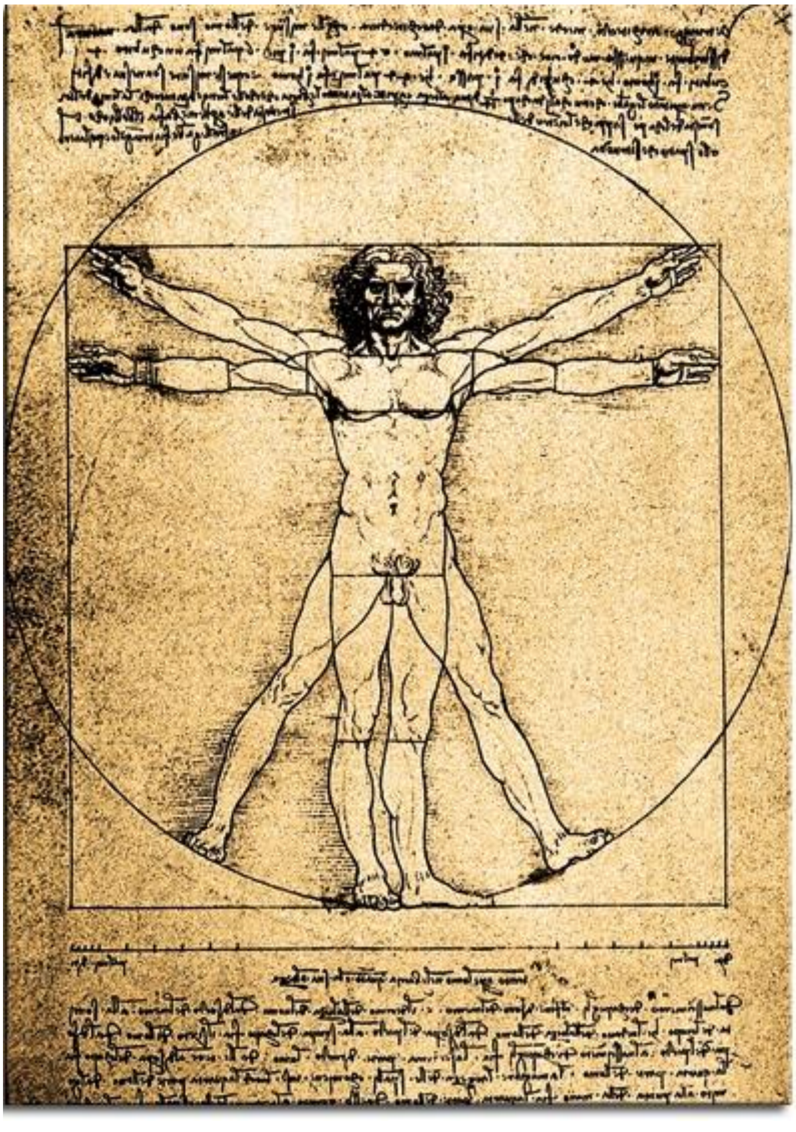
Liczba Fi

φ



Magdalena Tabała
Joanna Buss
Dominika Dąbrowska
Karol Medwid

SPIS TREŚCI

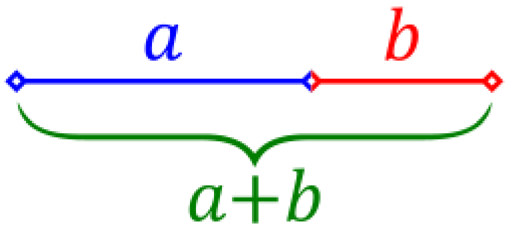
- Wprowadzenie....2
- Historia..... 4

-Fidiasz....5
-Platon....6
-Euklides z Aleksandrii....8
-Luca Pacioli....9
-Michael Maestlin....10
-Johannes Kepler ….11
-Charles Bonnet....12
-Martin Ohm....13
-François Lucas....14
-Mark Barr....15
-Roger Penrose....16

- Złota proporcja w ludzkim ciele....17
- Liczba fi w architekturze....22
- Trójkąt Pascala a Fi. Co łączy ciąg fibonacciego i trójkąt Pascala? ….24
- Złote figury....25
- Fi w przyrodzie....27
- Złota liczba w muzyce....32

WPROWADZENIE – LICZBA FI

Liczba Fi inaczej nazywana złotą liczbą jest oznaczana grecką literą φ (czyt. „fi”). Jest ona ściśle związana z tak zwanym złotym podziałem. Podział ów polega na takim podzieleniu odcinka na dwie części, aby stosunek długości dłuższego odcinka do długości krótszego odcinka był taki sam jak stosunek długości dłuższego odcinka do długości całego odcinka(|dłuższy| + |krótszy|).



Stosunek, o którym mowa w definicji wynosi:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$

$$\frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi.$$

$$\varphi + 1 = \varphi^2$$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\ldots$$

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi - 1 \approx 0{,}618033989$$

Po przeliczaniu dowiadujemy się, że Złota Liczba wynosi w przybliżeniu:

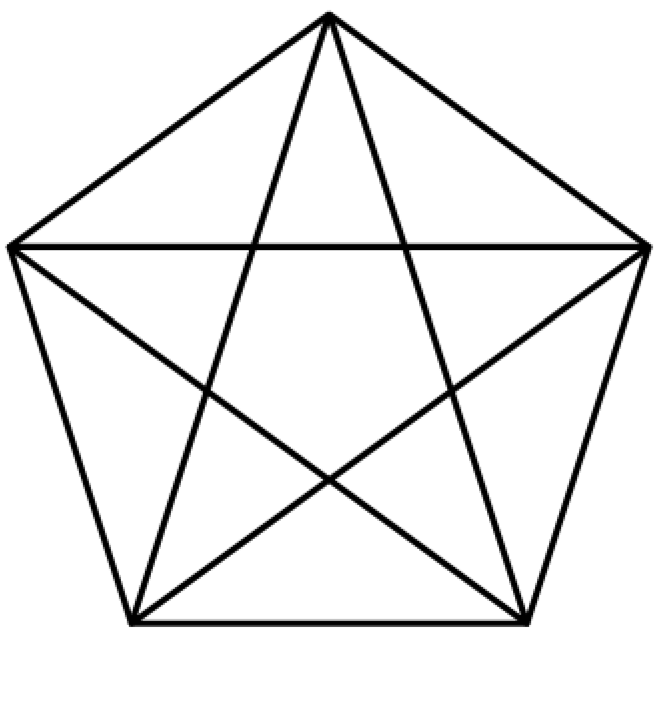
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\ldots$$

Zaskakującą własnością liczby Fi jest to, że jeśli podniesiemy ją do kwadratu, to otrzymamy liczbę dokładnie o jeden większą. Natomiast jeżeli chcielibyśmy porównać odwrotność Złotej Liczby do jej samej, to otrzymamy liczbę Fi pomniejszoną o jeden. Drugie rozwiązanie możemy odrzucić, bo równanie dotyczyło długości odcinka, a taka musi być większa od zera. Mimo tego warto też się nad nim zastanowić. Wynosi ono -0,618033988 , czyli tyle ile wynosi liczba przeciwna do odwrotności Złotej Liczby. Całość jest bardzo ciekawa, ze względu na to, że złoty podział odcinka możemy stosować w nieskończoność, a stosunki pomiędzy odpowiednimi odcinkami będą Złotą Liczbą podniesioną do odpowiedniej potęgi. Może właśnie dlatego często spotykamy się z inną nazwą Liczby Fi – Boska Proporcja lub Boski Podział.

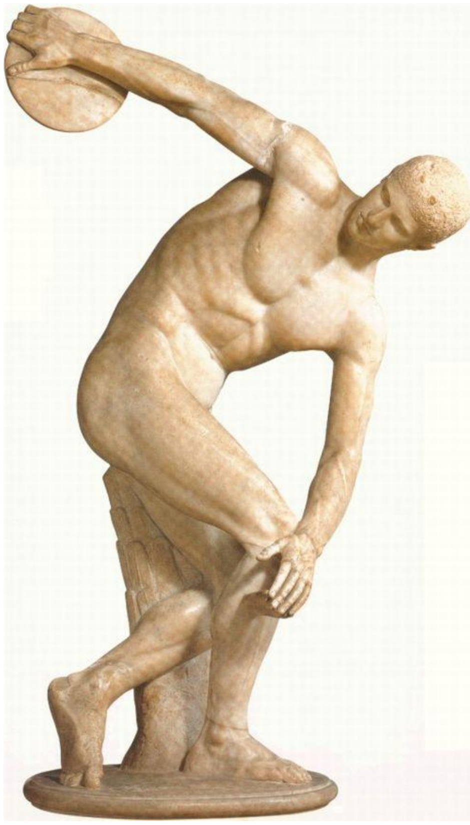
HISTORIA

Złoty podział fascynował wielu intelektualistów od około 2400 lat. Mario Livio, rumuński astrofizyk i autor wielu książek z dziedziny fizyki i matematyki, napisał: "*Wielu z największych matematycznych umysłów w historii, od Pitagorasa i Euklidesa w starożytnej Grecji, przez średniowiecznego włoskiego matematyka Leonarda z Pizy i renesansowego astronoma Johannesa Keplera, do współczesnych naukowców takich jak oksfordzki fizyk Roger Penrose spędziło niezliczone godziny nad tym prostym złotym podziałem i jego własnościami. Jednakże fascynacja złotą proporcją nie jest ograniczona jedynie do matematyków. Biolodzy, artyści, muzycy, historycy, architekci, psycholodzy, a nawet mistycy zastanawiali się i debatowali nad przyczynami jego powszechności i własności. W rzeczywistości, można prawdopodobnie powiedzieć, że złoty podział inspirował myślicieli wszystkich dziedzin bardziej niż żadna inna liczba w historii matematyk.* "

Te słowa słowa możemy poprzeć wieloma przykładami, począwszy właśnie od starożytnych greckich matematyków. Zaczęli oni badania związane ze Złotym Podziałem z powodu jego częstego występowania w geometrii. Właśnie ten podział jest istotny w geometrii foremnych pentagramów i pentagonów. Grecy, w większości, przypisywali odkrycie tego związku Pitagorasowi albo jego uczniom. Pentagon foremny z wpisanym pentagramem był symbolem pitagorejczyków.



Fidiasz



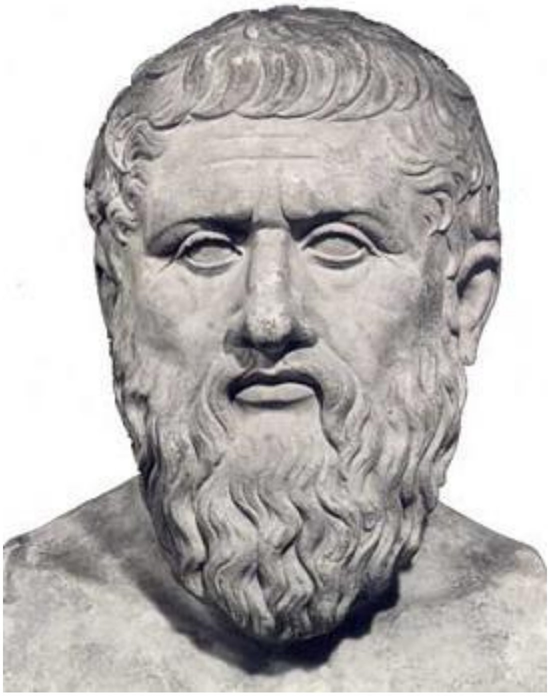
Fidiasz – żył w latach od około 490 p.n.e. do 430 p.n.e. Grecki rzeźbiarz, uważany za najwybitniejszego przedstawiciela greckiej rzeźby starożytności. Syn Charmidesa z Aten, uczeń Hageladesa z Aten i Hegiasa z Argos. Był przyjacielem i doradcą Peryklesa. Kierował pracami rzeźbiarskimi na Akropolu ateńskim. Później działał w Olimpii. Wywarł decydujący wpływ na rozwój greckiej rzeźby monumentalnej (na zdjęciu "Dyskolol" Fidiasza). Jedynym oryginalnym dziełem jego autorstwa, jakie zachowało się do naszych czasów, jest Partenon wraz z częścią rzeźb architektonicznych.

Związek z liczbą Fi

Stworzył figury Partenonu, które wydają się zachowywać złote proporcje.

Platon

Platon – urodzony w 427 p.n.e. prawdopodobnie w Atenach, zmarł 347 p.n.e. również w Atenach. Grecki filozof. Był twórcą systemu filozoficznego zwanego obecnie idealizmem platońskim. Platon wprowadził do matematyki, ścisły kanon metodologiczny. W myśl jego doktryny dozwolone konstrukcje geometryczne mogły być prowadzone tylko przy użyciu cyrkla i linijki, co uzasadniał tym, że jedynie linia prosta i okrąg mogą ślizgać się samo po sobie. Do dziś taki rodzaj konstrukcji nosi nazwę konstrukcji platońskich.



Związek z liczbą Fi

W swoim dialogu *Timajos* opisuje pięć możliwych wielościanów foremnych (Wielościany platońskie: czworościan, sześcian, ośmiościan, dwunastościan i dwudziestościan). Niektóre są powiązane ze złotym podziałem.

Euklides z Aleksandrii

Euklides - urodzony około 365 r. p.n.e., zmarł około 300 r. p.n.e. Matematyk grecki pochodzący z Aten, przez większość życia działający w Aleksandrii. Autor jednych z pierwszych prac teoretycznych z matematyki. Główne jego dzieło to *Elementy*. Są one zbiorem ówczesnej wiedzy matematycznej w dziedzinie geometrii i teorii liczb. Elementy przetłumaczono na olbrzymią liczbę języków, zaś liczbą wydań ustępują jedynie Biblii.

Związek z liczbą Fi

W *Elementach* podał pierwszą pisaną definicję złotego podziału nazwaną w tłumaczeniu na polski "w złoty sposób".

Fibonacci

Fibonacci - Leonardo z Pizy, urodzony około 1175 r., zmarł w 1250 r.). Włoski matematyk, znany jako *Leonardo Fibonacci, Filius Bonacci, Leonardo Pisano* . Dużo podróżował odwiedzając i kształcąc się w takich miejscach jak Egipt, Syria, Prowansja, Grecja i Sycylia. W czasie swych podróży po Europie i po krajach Wschodu miał okazję poznać osiągnięcia matematyków arabskich i hinduskich, między innymi dziesiętny system liczbowy. Około 1200 Fibonacci zakończył podróże i powrócił do Pizy. Napisał szereg rozpraw matematycznych, z których wiele zaginęło. Fibonacci podał ciąg w swoim dziele Liber abaci jako rozwiązanie zadania o rozmnażaniu się królików. Ten ciąg jest zwany ciągiem Fibonacciego.

Związek z liczbą Fi

Stosunek kolejnych wyrazów Ciągu Fibonacciego zbliża się do złotego podziału asymptotycznie.

Luca Pacioli

Luca Pacioli – urodzony w 1445r. w Borgo de Sansepolcro w Toskanii, *zmarł* 19 czerwca 1517r. Włoski franciszkanin, wędrowny nauczyciel i matematyk, uważany za "ojca rachunkowości". Opracował m.in. standard zasady podwójnego zapisu. Sama metoda podwójnego zapisu powstała we Włoszech na długo przed opisaniem jej przez Paciolego, jego zasługą było jednak klarowne opisanie jej w podręczniku *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* wydanym w 1494 roku w Wenecji. Pacioli wprowadził symbole dla pierwiastka kwadratowego, sześciennego oraz stopnia czwartego.

Związek z liczbą Fi

Określa złoty podziały jako "doskonałą proporcję" w swoim *Divina Proportione*.

Michael Maestlin

MICHAEL MŒSTLINUS.
Matheseos Prof. Tubing

Michael Maestlin lub także Möstlin - urodzony 30 września 1550 w Göppingen, zmarł 20 października 1631 w Tybindze. Niemiecki matematyk i astronom. Maestlin studiował w Tübinger Stift teologię, matematykę i, zainteresowany nią przez Philippa Apiana, astronomię. W 1571 został magistrem, a w 1576 diakonem w Backnang. Od1580 był profesorem matematyki na Uniwersytecie w Heidelbergu, a od 1583 w Tybindze. Obok Leonarda da Vinci uważany jest za pierwszego, który popielate światło Księżyca zidentyfikował jako światło ziemskie. Później odkrył, że komety nie są zjawiskami atmosferycznymi lub sublunarnymi. Był nauczycielem i przyjacielem Johannesa Keplera.Jako jeden z pierwszych zgadzał się z teoria Kopernika.

Związek z Liczbą Fi

Z jego obliczeń wynika że odwrotność złotej proporcji wynosi około 0.6180340. Informacja ta została zawarta w liście do Keplera w roku 1597.

Johannes Kepler

Johannes Kepler - urodzony 27 grudnia 1571r. w Weil der Stadt, zmarł 15 listopada 1630r. w Ratyzbonie. Niemiecki matematyk, astronom i astrolog, jedna z czołowych postaci rewolucji naukowej w XVII wieku. Najbardziej znany jest z nazwanych jego nazwiskiem praw ruchu planet. Prawa te wykorzystano do potwierdzenia słuszności teorii grawitacji Izaaka Newtona. W trakcie swojej kariery Kepler był nauczycielem matematyki w Grazu, asystentem astronoma Tychona Brahe, matematykiem na dworze Rudolfa II Habsburga, nauczycielem matematyki w Linzu i doradcą Albrechta von Wallensteina

Związek z liczbą Fi

Udowodnił, że złoty podział jest granicą stosunku kolejnych liczb Fibonacciego, i opisuje złoty stosunek jako "drogi skarb": "Geometria ma dwa wielkie skarby: jednym z nich jest twierdzenie Pitagorasa, a drugim podział odcinka w złoty sposób; pierwszy z nich możemy porównać do złota, a drugi do drogocennego klejnotu". Te dwa "skarby" są obecne w trójkącie Keplera.

Charles Bonnet

Charles Bonnet - urodzony 13 marca 1720r. w Genewie, zmarł 1793r. również w Genewie. Szwajcarski przyrodnik i filozof, członek Królewskiej Szwedzkiej Akademii Nauk. Rodzice Bonneta emigrowali z Francji z powodu prześladowań Hugenotów. Studiował prawo i został wybranym sędzią w ojczystym mieście, ale zainteresowania Bonneta dotyczyły też historii naturalnej i z czasem poświęcił się jej całkowicie. Dokonał dużego wkładu w rozwój wiedzy o biologii owadów i jako pierwszy w 1746 opisał partenogenezę u mszyc.

Związek z liczą Fi

Wskazał, że na spirali modelującej ulistnienie, kąty zaznaczone przez kolejne liście skręcające zgodnie i przeciwnie do wskazówek zegara często są do siebie w stosunku takim, jaki zachodzi pomiędzy dwoma kolejnymi wyrazami ciągu Fibonacciego.

Martin Ohm

Martin Ohm - urodzony 6 maja 1792r. w Erlangen, zmarł 1 kwietnia 1872r. w Berlinie. Był niemieckim matematykiem.

Związek z liczbą Fi

Jest uważany za pierwszego, który użył określenia *goldener Schnitt* (złoty podział) do opisu tego stosunku w 1835r.

François Lucas

François Édouard Anatole Lucas - urodzony 4 kwietnia 1842r. w Amiens, zmarł 3 października 1891r. w Paryżu. Francuski matematyk. Studiował w Ecole Normale Superieure w Paryżu, służył w armii francuskiej i był profesorem matematyki w Paryżu. W pracy naukowej zajmował się algebrą. Od jego nazwiska nazwano ciąg Lucasa. Badał ciąg Fibonacciego i podał wzór na n-ty wyraz ciągu. Opracowywał metody testowania pierwszości liczb (Test Lucasa-Lehmera).Interesował się rozrywkowymi zastosowaniami matematyki. W 1883 roku wymyślił grę zwaną Wieże Hanoi, którą rozprowadzał pod pseudonimem *N.Claus de Siam* (anagram od *Lucas d'Amiens*).

Związek z liczbą Fi

Nadał ciągowi znanemu dziś jako ciąg Fibonacciego jego współczesną nazwę.

Mark Barr

Mark Barr był amerykańskim matematykiem, który według Theodorea Andrea Cooka, około roku 1909 dał złotemu środkowi nazwę liczby fi (ϕ). Nazwał ją ze względu na imię greckiego rzeźbiarza Fidiasza który żył około 450 r.p.n.e.

Φφ

Związek z liczbą Fi

Proponuje grecką literę fi (φ), pierwszą literę imienia greckiego rzeźbiarza Fidiasza jako symbol złotego podziału.

Roger Penrose

Roger Penrose - urodzony 8 sierpnia 1931r. w Colchester w Anglii. Angielski fizyk i matematyk. Jest synem lekarza, genetyka i matematyka Lionela Penrose'a oraz bratem matematyka Olivera Penrose'a i szachisty Jonathana Penrose'a.Wraz ze Stephenem Hawkingiem udowodnił twierdzenie o osobliwościach w ogólnej teorii względności. Od roku 1994 członek zagraniczny Polskiej Akademii Nauk. Zasłużył się głównie dzięki próbom podejścia do kwantowej grawitacji (jeszcze nieistniejącej w całości teorii). Jego zdaniem niezbędna jest nowa teoria kwantów, uwzględniająca grawitację, eliminująca trudności interpretacyjne. W matematyce znany jest jego parkietaż, który pokrywa płaszczyznę w sposób nieokresowy za pomocą jedynie dwu rodzajów "kafelków". Autor twierdzenia o uwięzieniu dotyczącego ruchu po hiperpowierzchni w przestrzeni fazowej.

Związek z liczbą Fi

Odkrywa symetryczny nieokresowy wzór zachowujący złoty stosunek w dziedzinie parkietażu, który prowadzi do odkrycia kwazikryształów.

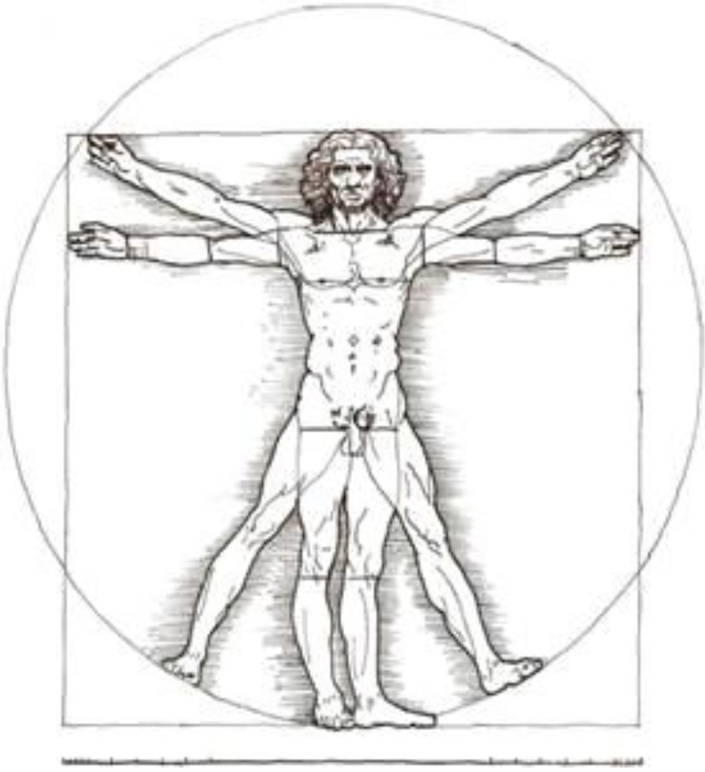
Złota proporcja w ludzkim ciele...

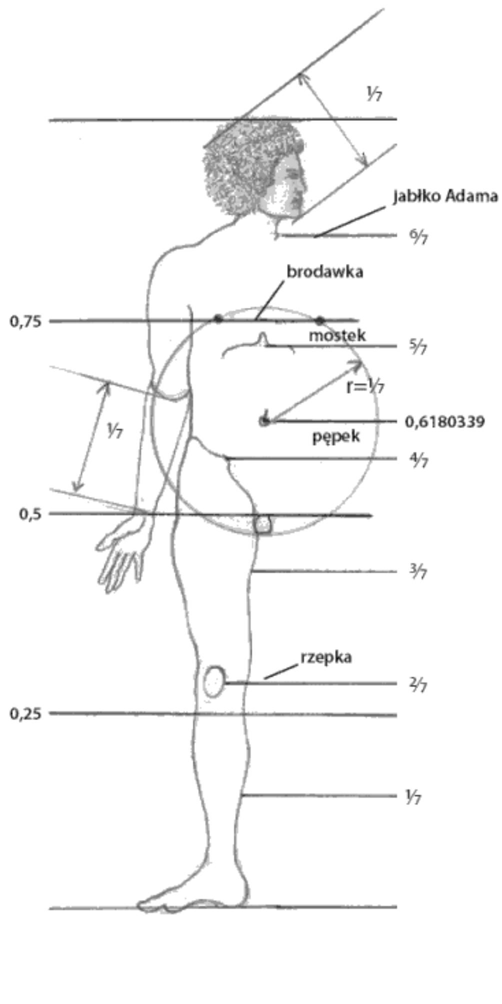
Starożytni uważali, że liczba musiała być zamierzona przez samego Stwórcę. Pierwsi naukowcy głosili, że jest to boska proporcja.
Człowiek witruwiański nazwany tak na cześć Marka Witruwiusza, genialnego rzymskiego architekta, sławił boską proporcję w swoim traktacie " O architekturze ",
ale nikt lepiej nie rozumiał boskiej struktury ludzkiego ciała niż Leonardo Da Vinci.

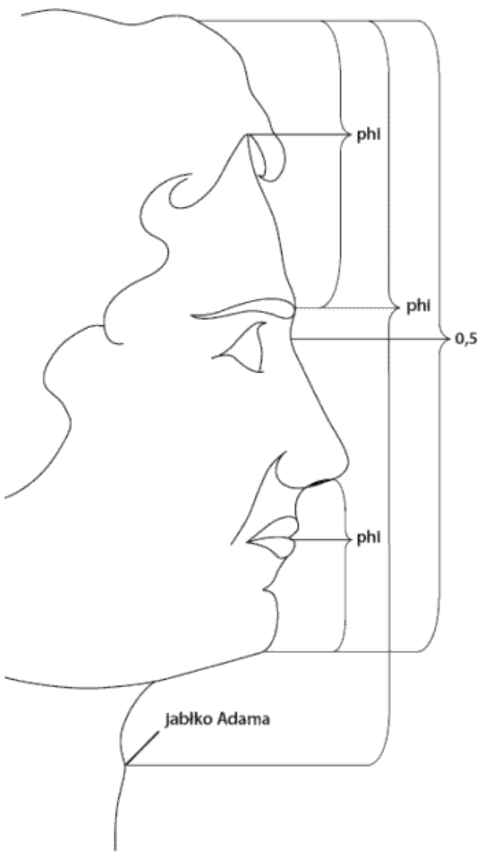
Ekshumował nawet zwłoki, żeby mierzyć dokładne proporcje budowy kostnej człowieka. On pierwszy wykazał, że ludzkie ciało jest dosłownie zbudowane z elementów,
których proporcje wymiarów zawsze równają się Φ (fi)
Najważniejszym przykładem wykorzystania złotej liczby jest znany człowiek witruwiański autorstwa Leonarda da Vinci. Zauważył on, że dla człowieka o prawidłowych proporcjach wysokość człowieka do długości dolnej części ciała (od pępka w dół) jest złotą liczbą (stosunek długości dolnej części ciała do górnej jest również złotą liczbą).

Tak, my ludzie mamy większość elementów naszego ciała w tej proporcji!

W ludzkim ciele, a dokładniej w ciele mężczyzny, zarówno cała postać, jak i wiele poszczególnych części podlega prawom złotego cięcia.







To akurat można sprawdzić samemu mierząc np.:

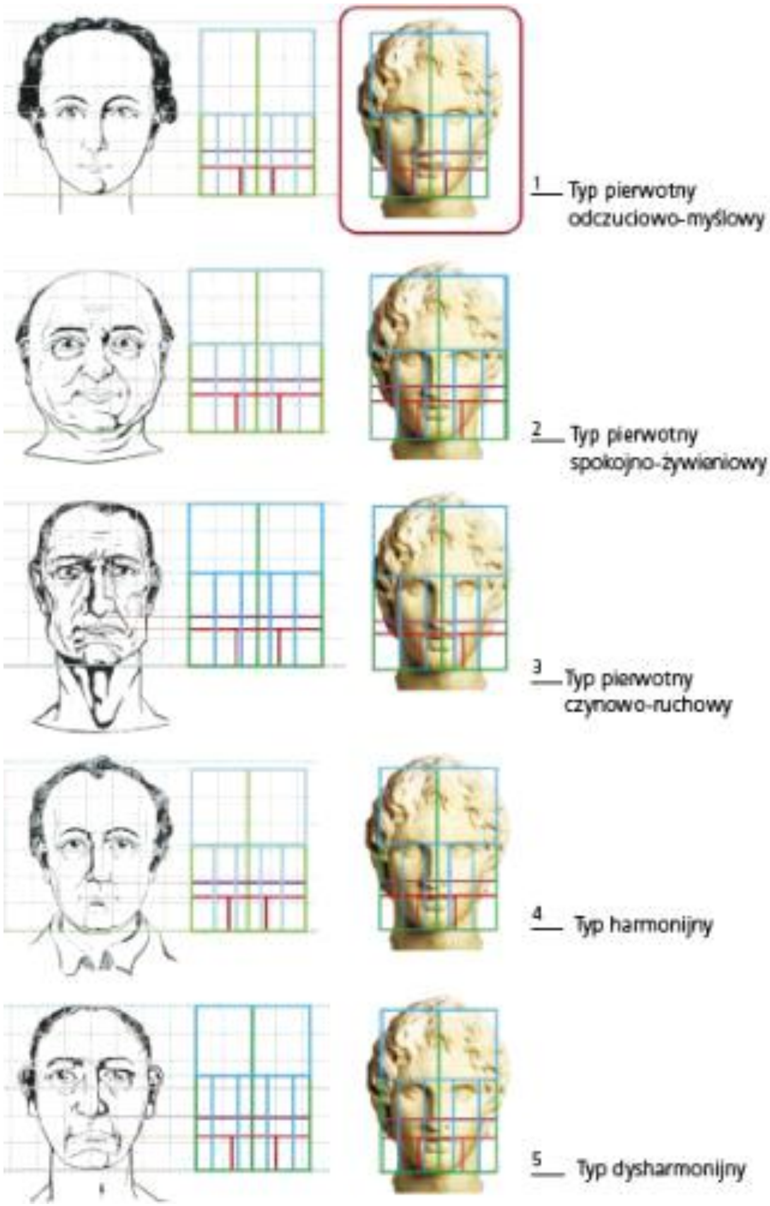
- Odległość od biodra do podłogi / odległość od kolana do podłogi = fi
- Odległość od czubka głowy do podłogi / odległość od pępka do podłogi = fi
- Odległość od czubka głowy do pępka / odległość od ramienia do pępka = fi

Zanalizujmy teraz rękę i dłoń:

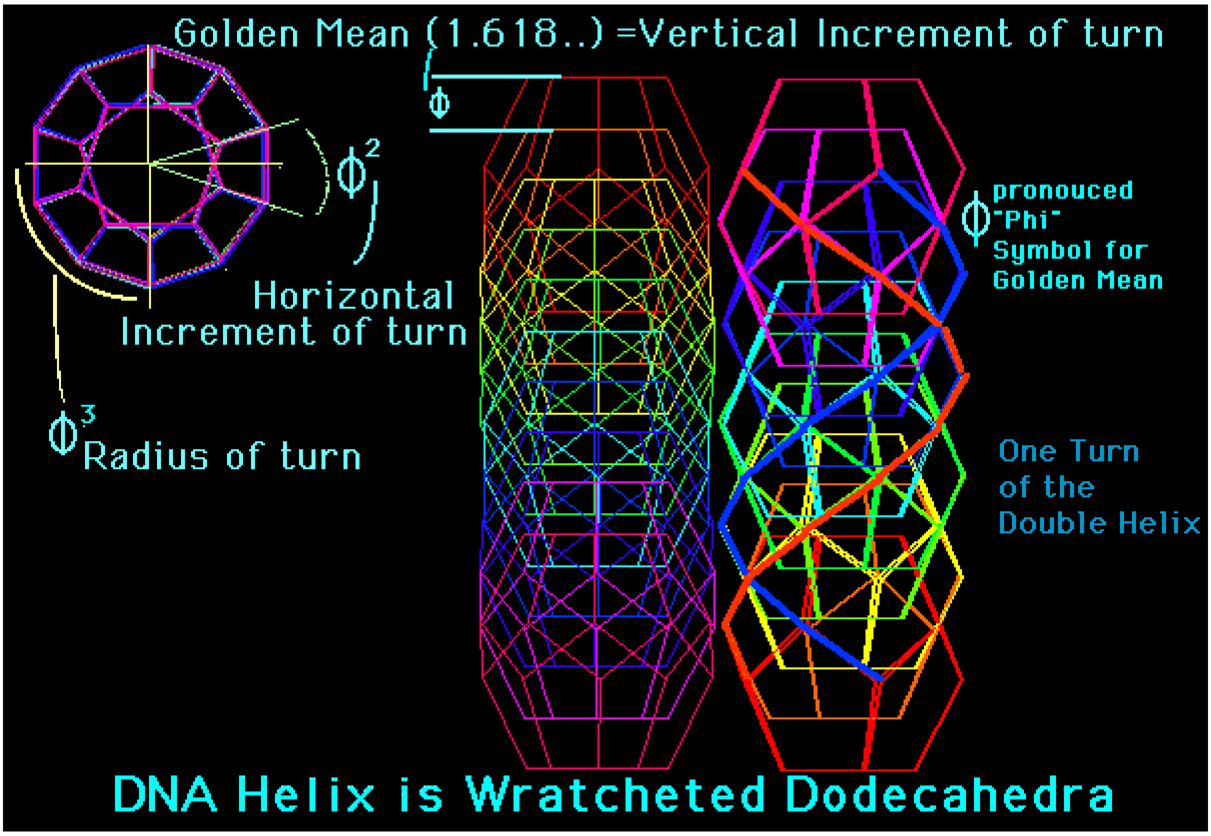
- Odległość między ramieniem a czubkiem palców / odległość między łokciem a czubkiem palców= fi
- Odległość od łokcia do nadgarstka / odległość od nadgarstka do czubka palców= fi
- Odległość od ramienia do łokcia / odległość od pachy do łokcia = liczba fi

Podobne zależności znajdziemy mierząc palce u nóg, stawy dłoni, odległości między kręgami.

Piękno ludzkiej twarzy przejawia się również we właściwych proporcjach mierzonych liczb.

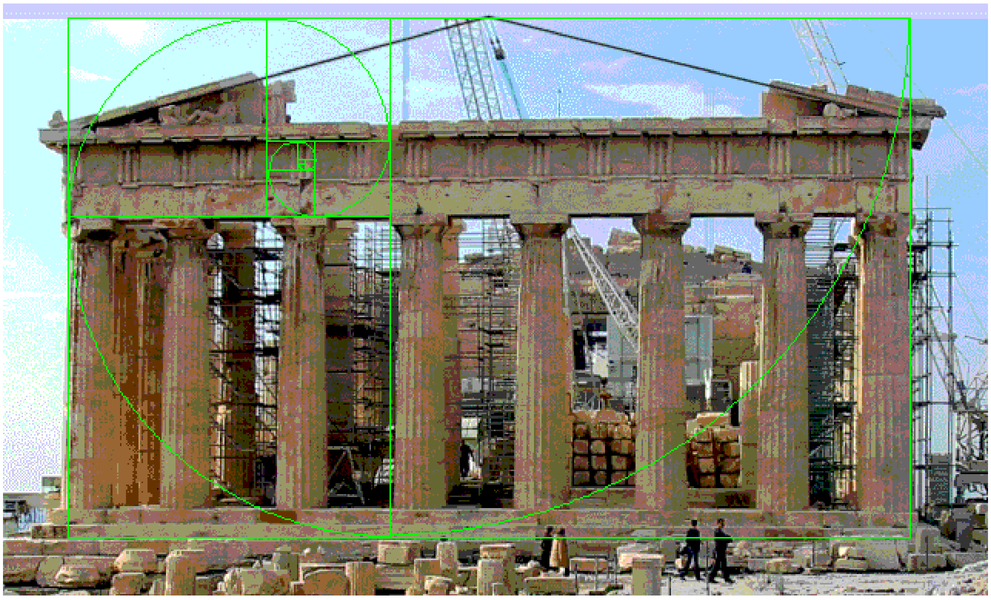


To, że ciało człowieka posiada kształt, który można opisywać przy pomocy różnych proporcji, jest dość oczywiste. Nie dla każdego jest jednak oczywista geometryczna struktura ludzkiego DNA.
Budowa DNA opiera się na dwunastościanie foremnym.
Budowa dwunastościanu
foremnego opiera się na Złotym Podziale, a ten z kolei na liczbie Phi...

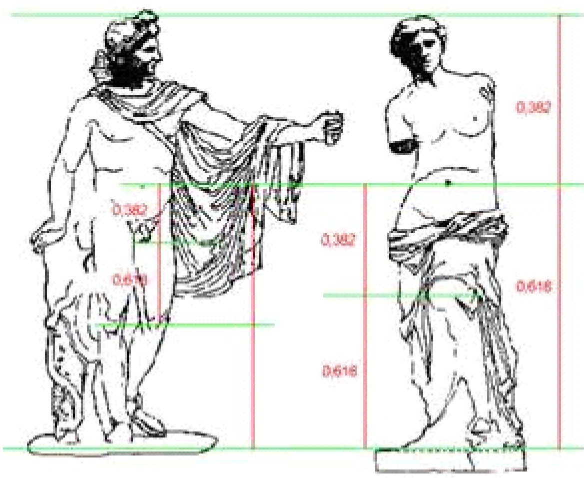


Liczba fi w architekturze...

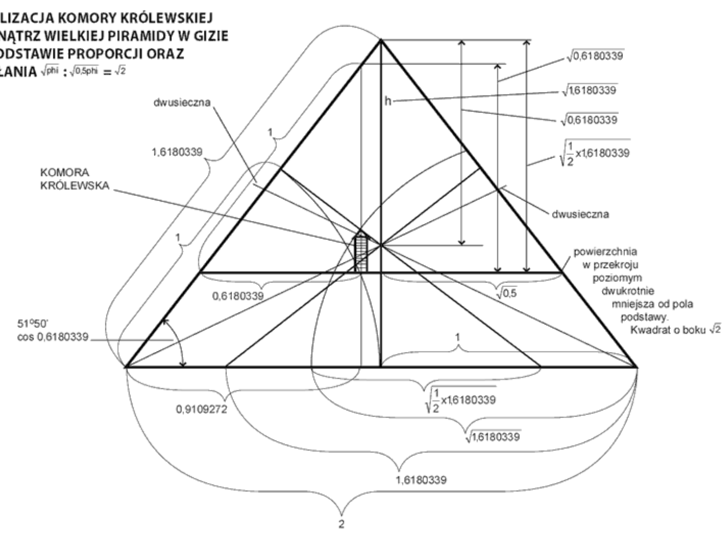
Greccy artyści i architekci używali wyjątkowo często złotych prostokątów - to znaczy takich, w których iloraz długości dłuższego do krótszego boku jest równy złotej liczbie. Wierzyli oni, że figura ta z natury podoba się duszy i sprawia jej przyjemność. Jeśli od złotego prostokąta odetnie się kwadrat, pozostała część jest także złotym prostokątem. Takich złotych prostokątów z małymi złotymi prostokącikami i tak dalej używano do projektowania rysunku na podłodze oraz fasad świątyń. Według tego wzoru powstał, na przykład, słynny Partenon na Akropolu w Atenach.



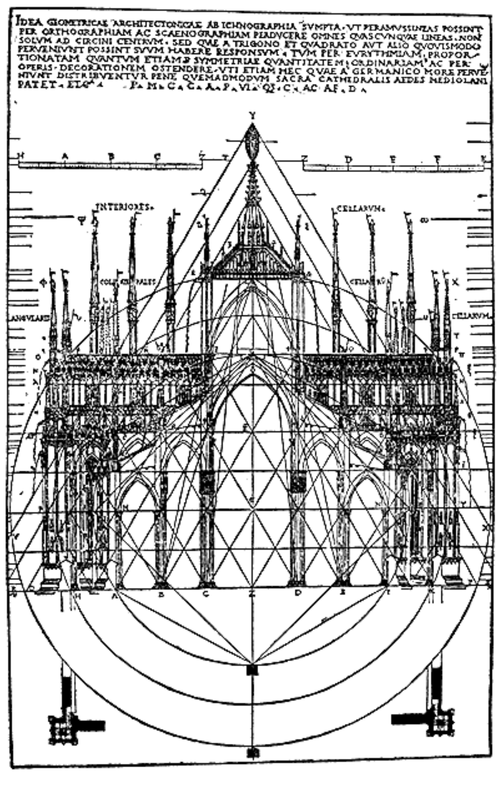
Złotą liczbę stosowano w proporcjach rzeźb. Słynne rzeźby: Apollo Belwederski, Wenus z Milo czy Diany do dziś zadziwiają wielu koneserów sztuki.



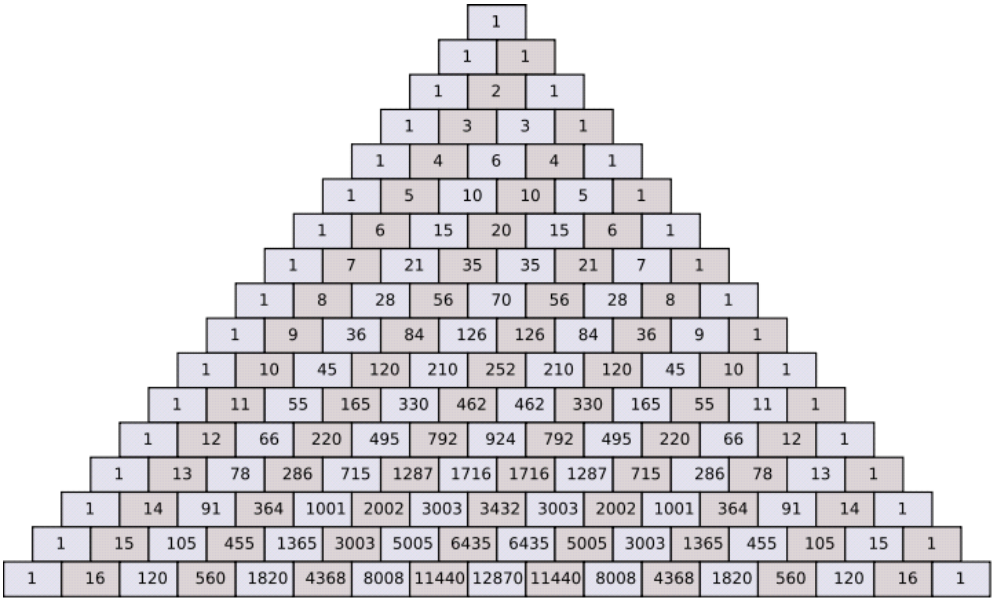
Złota liczba została wykorzystana przy budowie piramid w Gizie. Jeżeli weźmiemy przekrój Wielkiej Piramidy, to otrzymamy trójkąt prostokątny, nazywany Trójkątem Egipskim. Stosunek przeciwprostokątnej (wysokości ściany bocznej) do podstawy (połowa wymiaru podstawy) wynosi 1,61804 i różni się od liczby φ tylko o jeden na piątym miejscu po przecinku.



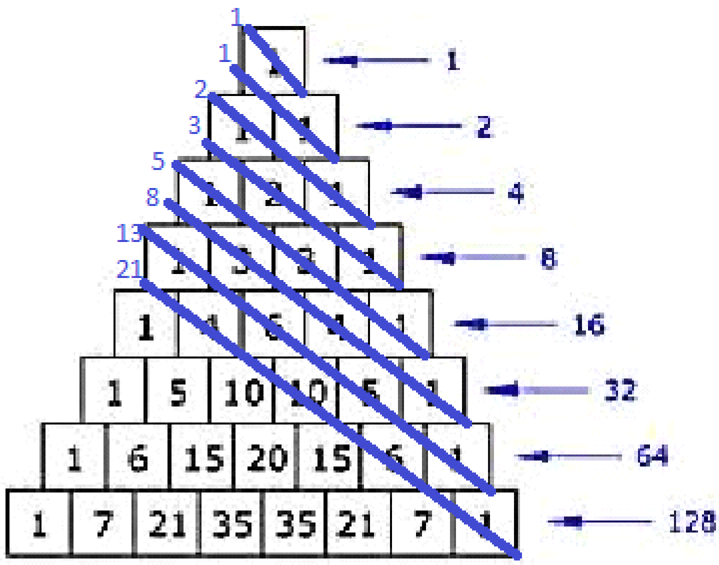
Innym przykładem jest Katedra w Mediolanie. Wszelkie proporcje są tu zachowane według złotego podziału.



Trójkąt Pascala a Fi.
Co łączy ciąg Fibonacciego i trójkąt Pascala?

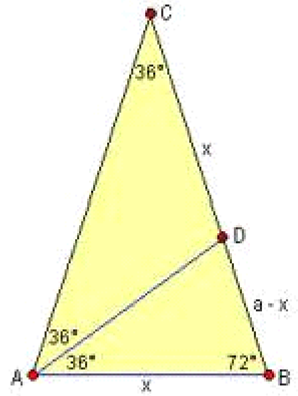


Gdy utwórzmy ukośne kolumny tego trójkąta liczb i obliczmy ich sumy. To kolejne sumy tworzą kolejne liczby ciągu Fibonacciego. Przypadek? Nie sądzę...



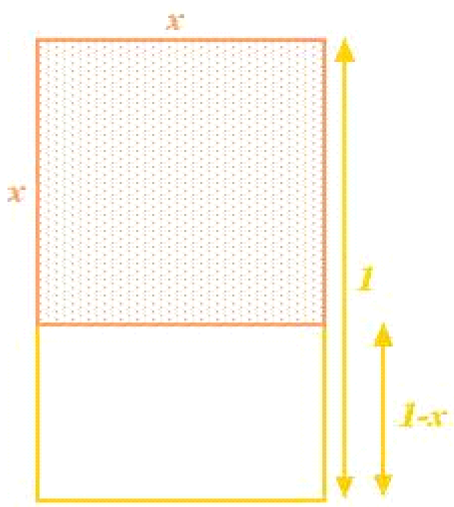
Złoty trójkąt

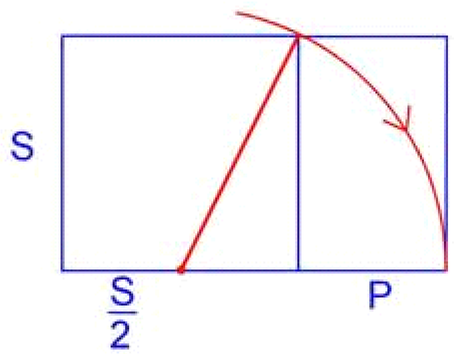
Trójkąt równoramienny , w którym stosunek ramienia do podstawy jest równy złotej liczbie to złoty trójkąt . W złotym trójkącie kąt między ramionami ma 36".



Złoty prostokąt

W złotym prostokącie stosunek długości do szerokości jest złotą liczbą.

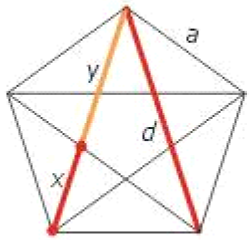




Prostokąt otrzymany po odcięciu możliwie największego kwadratu jest złotym prostokątem.

Złoty Pięciokąt

Punkt przecięcia przekątnych pięciokąta foremnego wyznacza ich złoty podział. Przekątna pięciokąta foremnego pozostaje w złotej proporcji z jego bokiemZłoty stosunek w pięciokącie foremnym odkrył i udowodnił Hippasus (V wiek p.n.e.).



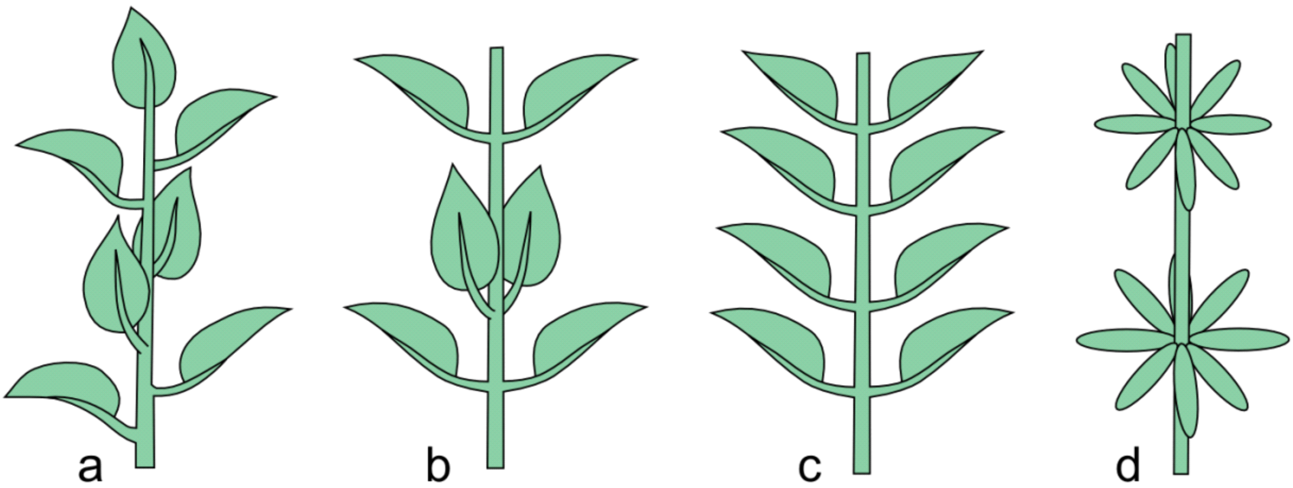
$$\frac{d}{a} = \frac{y}{x} \approx 1{,}618034$$

Fi w przyrodzie

Poczynając od liczby 3, stosunek dowolnych dwóch kolejnych liczb ciągu Fibonacciego wynosi 1:1,618. To po prostu stosunek logarytmiczny. Występuje on powszechnie w naturze we wszystkich spiralach, które leżą u podłoża procesu wzrostu. Widoczny jest w wygięciu kłów słonia, rogów dzikiej owcy i pazurków kanarka, w budowie ananasa i stokrotki. Odciski naszych palców również podlegają tej zasadzie. Planety naszego układu słonecznego rozchodzą się promieniście od słońca, a galaktyki rozwijają się w rytmie tej złotej spirali. Wygląda na to, że ciąg Fibonacciego określa prawo, które stanowi podstawę emanacji wszelkiej energii w naturze.

Jednym z przykładów jest ulistnienie, nazywane filotaksją.

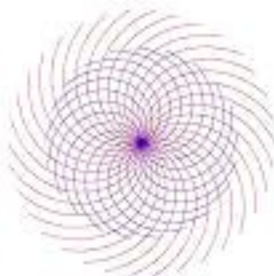
Filotaksja jest to sposób ułożenia powtarzających się elementów budowy roślin (takich jak liście, pędy boczne, kwiaty, płatki, ziemia) charakterystyczny dla tego gatunku. Tworzą one najczęściej układ spiral, których parametry są związane z liczbami Fibonacciego i liczbą złotą. W przypadku, gdy z węzła wyrasta jeden liść mówi się o skrętoległym ustawieniu liści, wówczas linia łącząca ich nasady obiega łodygę spiralnie. Odmianą tego ulistnienia jest ulistnienie naprzemianległe. Jeżeli z węzła wyrasta kilka liści ulistnienie określa się jako okółkowe, które w przypadku 2 liści w węźle nazywa się naprzeciwległym lub nakrzyżległym.



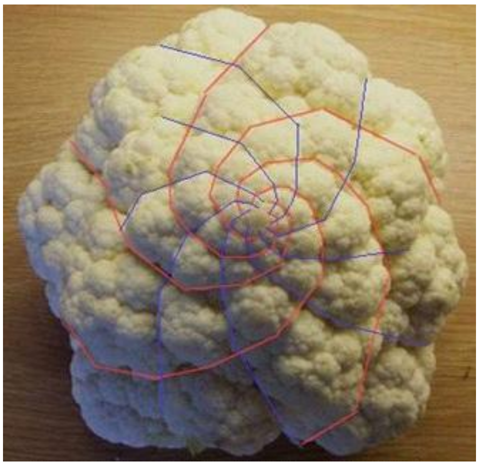
W 1202 roku Leonardo Fibonacci zauważył, że podczas wzrostu roślina wypuszcza nowe pędy zgodnie z zasadami pewnego ciągu liczbowego. Tak, więc stosunek ilości pędów wypuszczanych przez roślinę w kolejnych latach jest równy ni mniej ni więcej tylko liczbie fi. Ciąg Fibonacciego i złote proporcje są bardzo dobrze widoczne w świecie flory. Zjawisko zwane spiralną filotaksją cechuje bardzo wiele gatunków drzew i roślin. W przypadku drzew chodzi tutaj o strukturę gałęzi układających się spiralnie wokół pnia, w świecie roślin mamy na myśli liście. Gdyby ponumerować gałęzie zgodnie z wysokością, na jakiej wyrosły wówczas okaże się, że liczba gałęzi sąsiadujących pionowo jest liczbą Fibonacciego, a ponadto liczba gałęzi pomiędzy gałęziami sąsiadującymi pionowo również jest liczbą Fibonacciego.

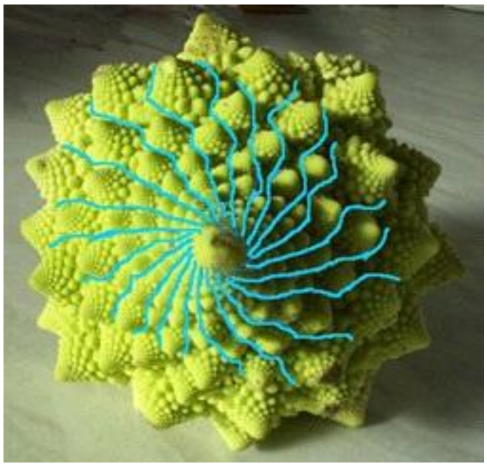
Nasiona słoneczników tworzą spirale układające się w dwóch przeciwnych kierunkach. W niektórych gatunkach tych roślin jest 21 spiral rozwijających się w jedną stronę i 34 w drugą stronę. Istnieją również gatunki, dla których liczba spiral wynosi odpowiednio 34 i 55. Wspomniane liczby to kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...





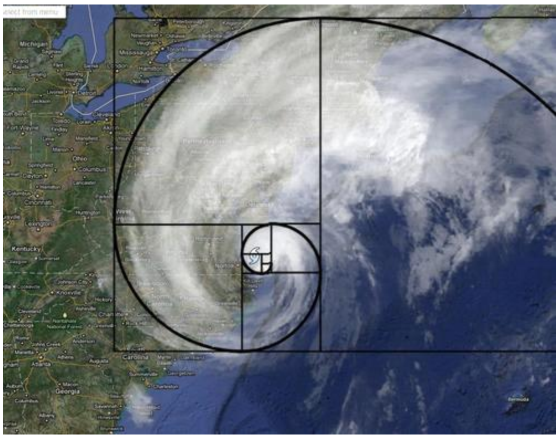
Podobnie jest z kwiatem kalafior–liczba 5 i 8 i brokułami– 21 i 13.

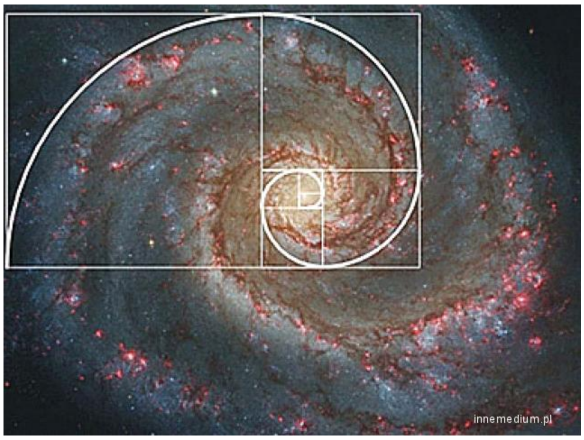




Innym przykładem występowania złotej liczby w przyrodzie są muszle zwierząt, np. łodzika. Przekrój jego muszli (wypełnionej głównie powietrzem) ukazuje, iż pasuje ona idealnie do złotego prostokąta, a jej łuki mieszczę się po ćwierć okręgu w każdym ze złotych kwadratów.

Zgodnie ze złotą proporcją formują się również huragany i galaktyki spiralne. Przyjmijmy przykładowo, że promień Ziemi to jednostka mająca długość 1. Wówczas odległość od środka Ziemi do środka Księżyca (ustawionych obok siebie) to pierwiastek z Fi. A przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne to 1 i pierwiastek z Fi (promień Ziemi i odległość między środkami Ziemi i Księżyca), ma wartość Fi. Ponadto weźmy średnie odległości w milionach kilometrów pomiędzy orbitami planet naszego układu planetarnego (podane przez NASA). Odległość dla Merkurego przyjmijmy 1. Wynik średni wszystkich odległości wynosi właśnie Fi.





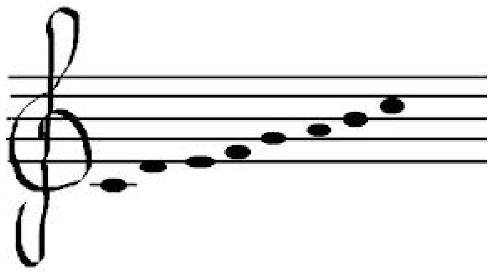
Złota liczba w muzyce

Wielu muzyków używa złotego podziału w swoich dziełach. Przykładem jest Erik Satie, francuski kompozytor, który użył złotego podziału w kilku swoich dziełach, takich jak *Sonneries de la Rose+Croix* oraz Bertók, u którego W *Muzyce na smyczki, perkusję i czelestę* postęp ksylofonu zachodzi w odstępach 1:2:3:5:8:5:3:2:1. Złoty podział widoczny jest również w organizacji sekcji muzyki Debussy'ego *Reflets dans l'eau* z *Images*, w których "sekwencja klawiszy jest zaznaczona w odstępach 34, 21, 13 i 8, a główna kulminacja w pozycji fi.

Jan Sebastian Bach również używał złotego podziału. Złote cięcie pojawia się tam nie tylko w budowie frazy ale również w harmonice i przebiegu linii melodycznych poszczególnych instrumentów. Znaleziono to również w fugach i kantatach innych twórców muzyki baroku.

Przykładem utworu w którym wykorzystano złotą liczbę jest V Symfonia Beethovena. Jej tempo jest oparte na złotej liczbie a dokładnie 5/3, co jest stosunkiem czwartej liczby ciągu Fibonacciego do trzeciej.

Aby usłyszeć złotą gamę wystarczy w tym celu rozpocząć ją od dźwięku „C” a następnie naciskać kolejno klawisze zgodnie z regułą Fibonacciego, czyli drugi, trzeci, piąty itd. Gama składa się z 8 dźwięków i podzielona jest na tercję (3 dźwięki) i kwintę (5 dźwięków). Liczby te dzielą całą wielkość w stosunku złotym (liczby 3, 5, 8 to trójka Fibonacciego).



Zakres dźwięków słyszalnych rozciąga się od 32 (największe piszczałki w organach) do 73700 (granie cykad) drgań na sekundę. Dźwięki zawarte w przedziale 60-33000 drgań mają charakter muzyczny. Przykładem może być dźwięk c1, którego liczba drgań wynosi 258,6. Odległość pomiędzy dwoma dźwiękami nazywa się interwałem. Obserwując różnego rodzaju interwały, łatwo zauważyć, iż te brzmiące najprzyjemniej dla ludzkiego ucha, powstają właśnie na podstawie liczby fi. Zależność ta przedstawia się następująco: każdemu dźwiękowi odpowiada pewna liczba drań na sekundę.
Porównując ze sobą liczby drgań poszczególnych dźwięków tworzących interwał, otrzymujemy odpowiednie proporcje:

- 3 : 2 = 1,5 (kwinta)
- 4 : 3 = 1,333… (kwarta)
- 5 : 4 = 1,25 (tercja zwiększona)
- 6 : 5 = 1,2 (tercja zmniejszona)
- 5 : 3 = 1,666… (seksta zmniejszona)
- 8 : 5 = 1,6 (seksta zwiększona)
- 2 : 1 = 2 (oktawa)

Jak widać, dźwięki tworzące interwały powszechnie uważane za te „lepiej brzmiące”, pozostają ze sobą w stosunku najbardziej zbliżonym do liczby Φ.