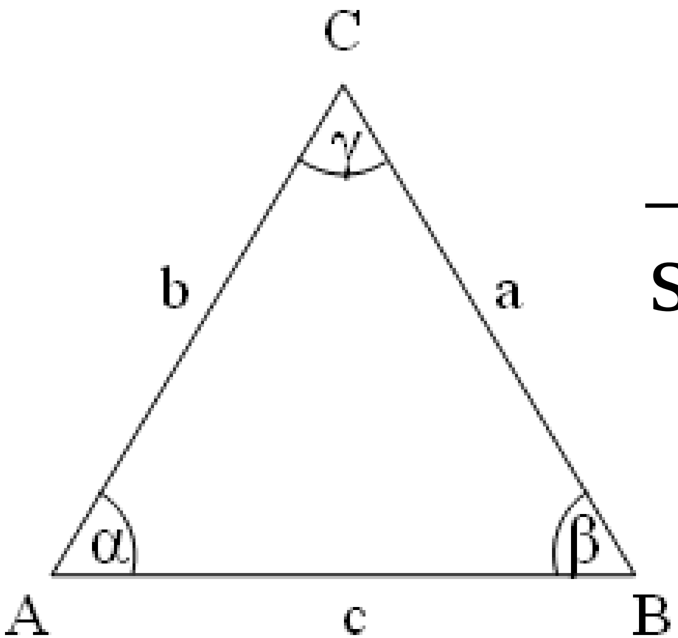
Twierdzenie sinusów

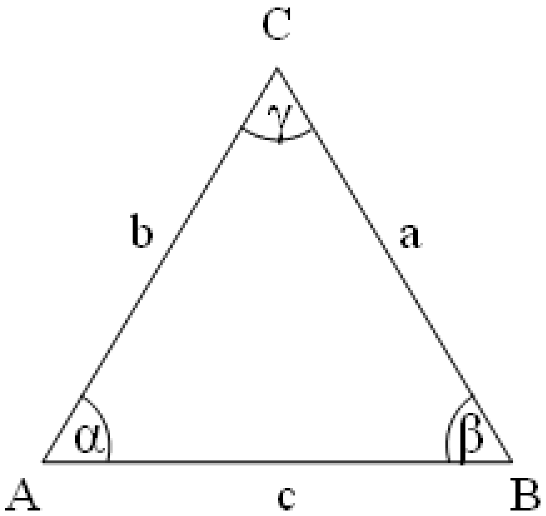
Twierdzenie

W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta przeciwległego jest wielkością stałą i równą średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Dowód cz.1



Korzystamy z następującego wzoru na pole trójkąta:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$$

Przyrównujemy dwa dowolne pola trójkątów wykorzystując powyższy wzór:

$$\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta$$

$$b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Dowód cz.2

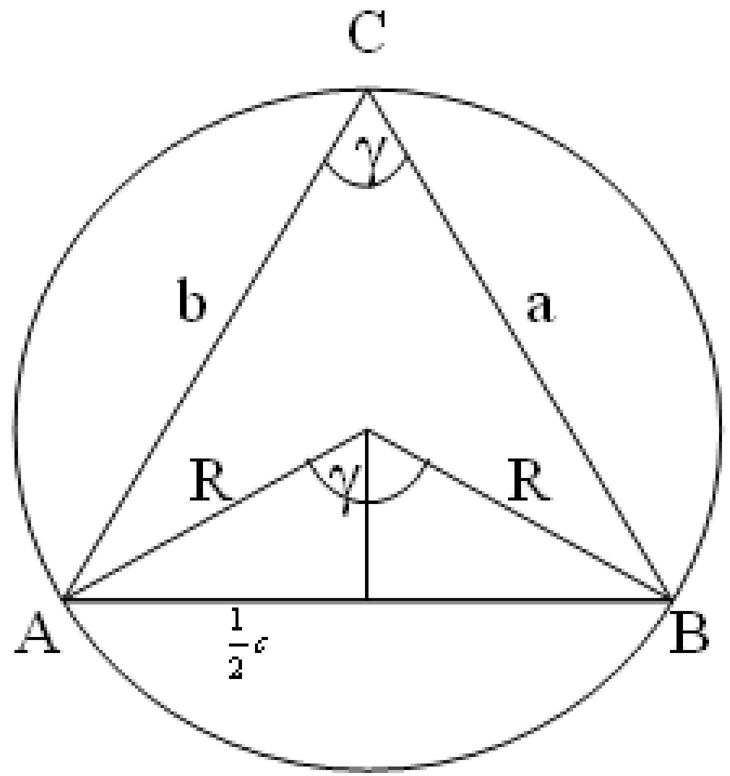
$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot \sin\beta$$

$$b\cdot \sin\gamma = c\cdot \sin\beta$$

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Korzystając ze wzorów sinusa w trójkącie oraz z własności kąta środkowego i wpisanego, wiemy:

$$\sin\gamma = \frac{\frac{1}{2}c}{R}$$

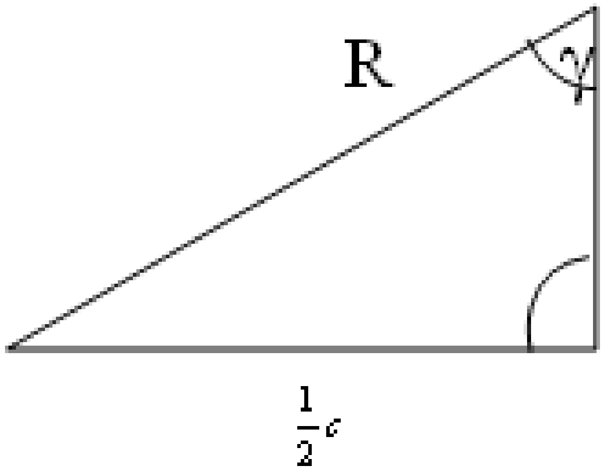


Dowód cz.3

$$R \sin\gamma = \frac{1}{2} c$$

$$2R \sin\gamma = c$$

$$2R = \frac{c}{\sin\gamma}$$



Zatem:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$