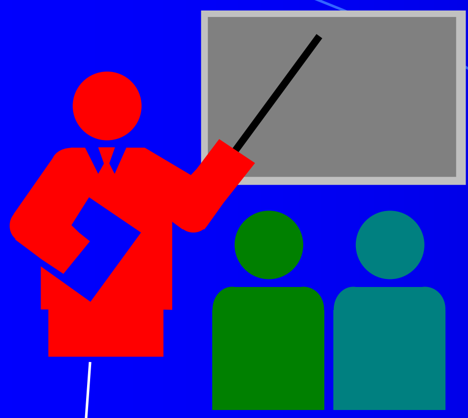
opracował - Piotr Gumienny

Schemat Bernoulliego



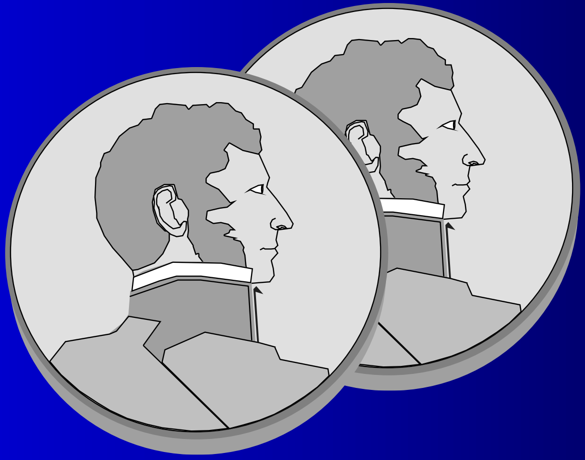
To ja

a to Wy

Wśród doświadczeń wieloetapowych szczególne miejsce zajmują te, które polegają na n-krotnym powtórzeniu, w tych samych warunkach i niezależnie od siebie, doświadczenia cząstkowego kończącego się jednym z dwu możliwych wyników. Jeden z tych wyników nazywamy **sukcesem** a drugi **porażką**. Każde takie cząstkowe doświadczenie nazywamy **próbą Bernoulliego** natomiast n-etapowe doświadczenie - **schematem Bernoulliego**

Przykład

Rozpatrzmy trzykrotny rzut niesymetryczną monetą, w której orzeł wypada dwa razy częściej niż reszka.

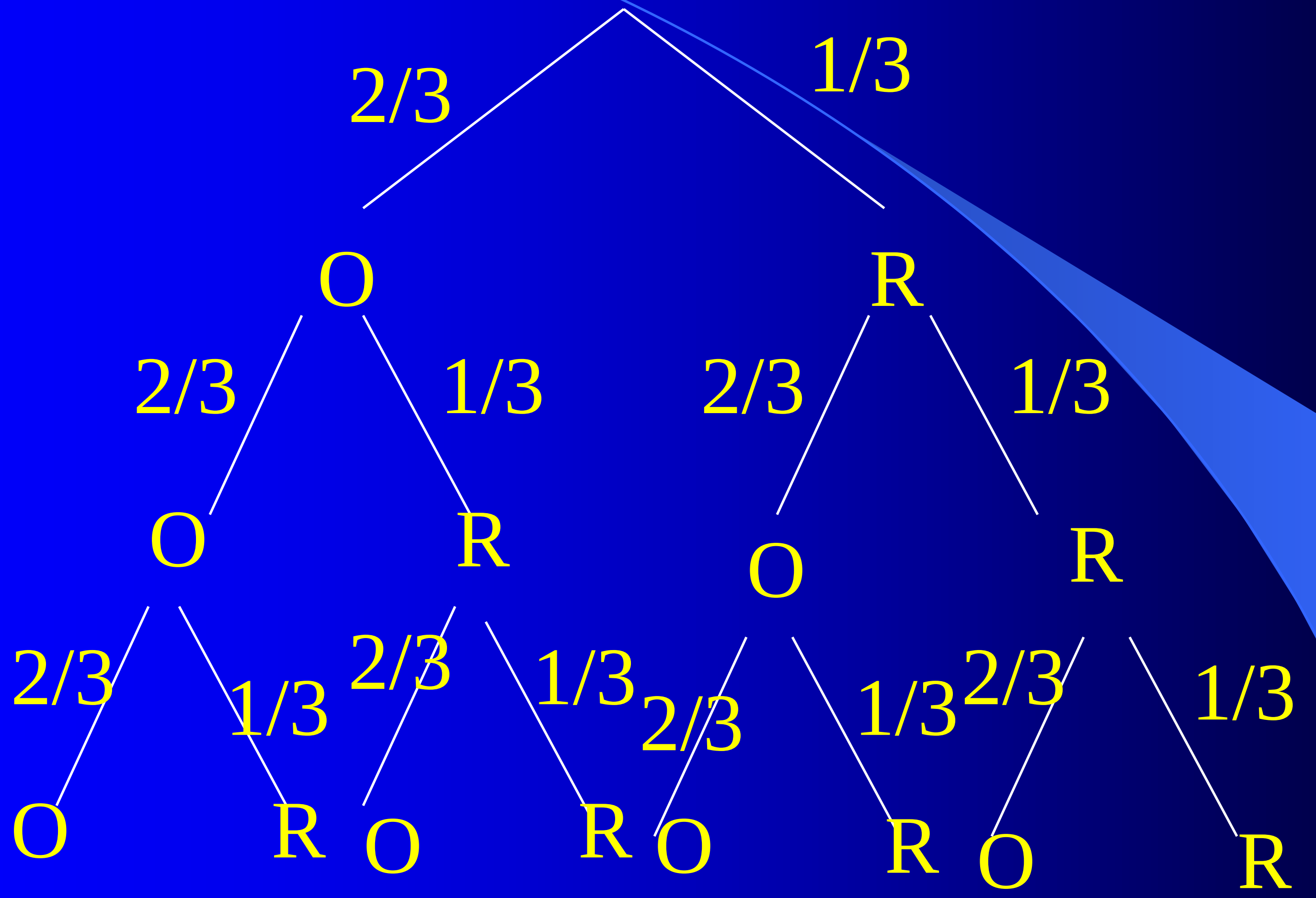


Zbudujmy model probabilistyczny tego doświadczenia

Zbiór zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{(O,O,O),(O,O,R),(O,R,O),$$
$$(R,O,O),(R,R,O),(R,O,R),$$
$$(O,R,R),(R,R,R)\}$$

Drzewko prawdopodobieństwa



Prawdopodobieństwo poszczególnych zdarzeń

$$P((O,O,O)) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$P((R,O,O)) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$P((O,R,O)) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$P((O,O,R)) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2}$$

$$P((R,R,O)) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{1}$$

$$P((R,O,R)) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{1}$$

$$P((O,R,R)) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1$$

$$P((R,R,R)) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0$$

Niech **k** oznacza liczbę reszek.
Wtedy **3 - k** oznacza liczbę orłów

Zauważmy, że prawdopodobieństwo pojedynczego zdarzenia $\omega \in \Omega$ jest równe

$$P(\omega) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3-k}$$

Wzór ten przypisuje prawdopodobieństwo tym zdarzeniom, w których reszka (R) występuje dokładnie k razy.

Jest ich tyle, na ile sposobów można rozmieścić k wyrazów R na 3 miejscach, a więc tyle ile k elementowych kombinacji zbioru 3 elementowego tj.

$$\binom{3}{k}$$

Zastępując liczbę 3 dowolną liczbą naturalną **n** i prawdopodobieństwo sukcesu (tj. wypadnięcia reszki) przez **p** oraz porażki (tj. wypadnięcia orła) przez **q** otrzymamy :

Twierdzenie

W schemacie n - prób Bernoulliego prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie k - sukcesów wyraża się wzorem :

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Przykład

Rzucamy 5 razy symetryczną kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że szóstka wypadnie dokładnie 3 razy

- *Bartek ! Do tablicy !*

Mamy do czynienia ze schematem pięciu prób Bernoulliego, gdzie sukcesem jest wypadnięcie szóstki.

Mamy: $p = 1/6$

$q = 5/6$

$n = 5$

$k = 3$

Niech A oznacza zdarzenie, że dokładnie 3 razy w 5 rzutach kostką wypadnie szóstka

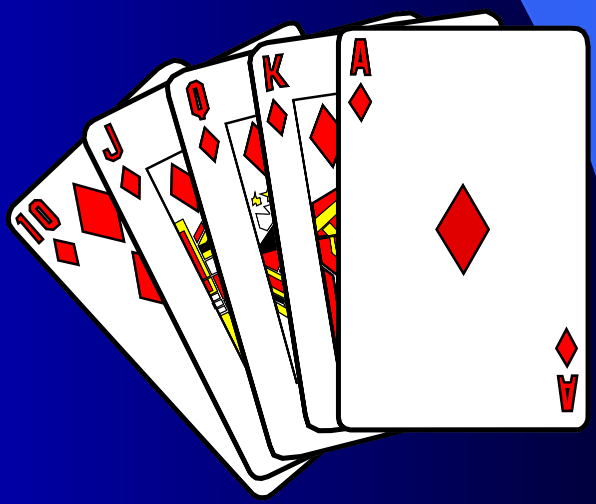
Na mocy twierdzenia

$$P(A) = P_5(3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 =$$

$$= 10 \cdot \frac{1}{216} \cdot \frac{25}{36}$$

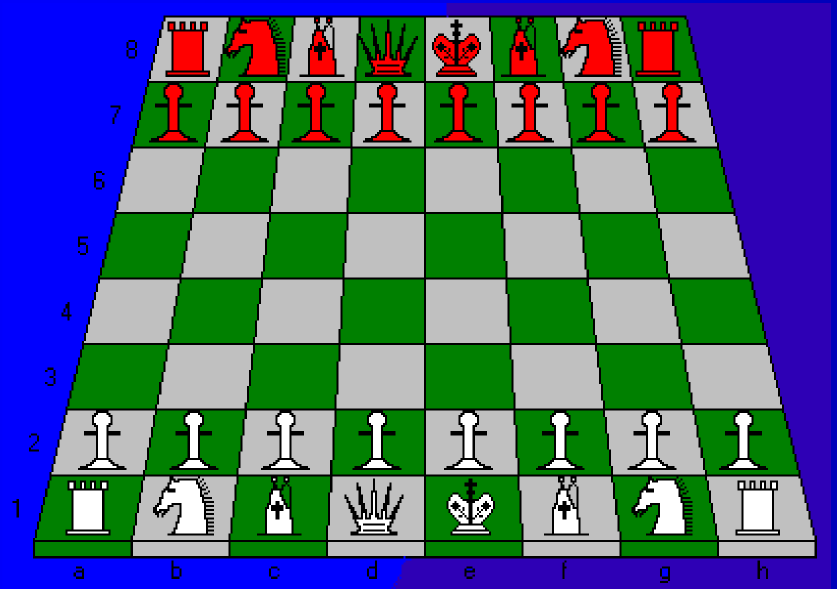
A teraz parę zadań

1. Z tali 24 kart losujemy 4 karty po jednej, za każdym razem zwracając wylosowaną kartę do tali.
   Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:
   - cztery razy karty czerwonej
   - trzy razy figury
   - dwa razy trefla



2. W urnie jest 10 kul : 3 białe i 7 czarnych. Losujemy 6 razy po jednej kuli, zwracając za każdym razem wylosowaną kulę do urny. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej 5 lub 6 razy ?

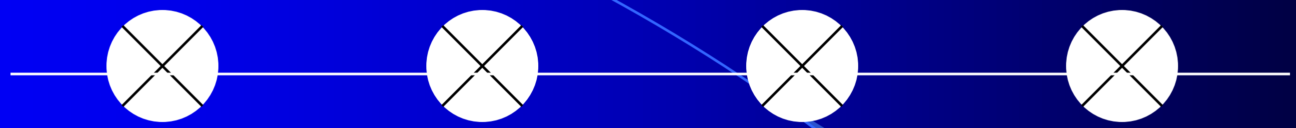
3. Co jest bardziej prawdopodobne w grze z równorzędnym przeciwnikiem : wygrać 3 z 4 , czy 5 z 8 partii ?



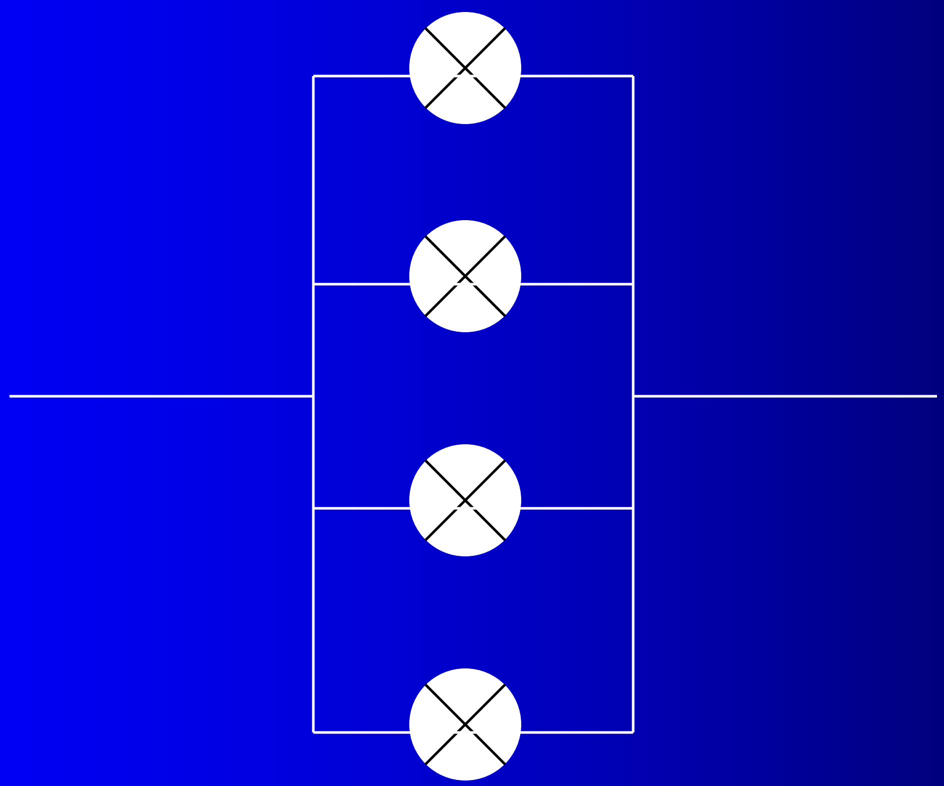
4. W schemacie n - prób Bernoulliego prawdopodobieństwo uzyskania sukcesu w jednej próbie wynosi $p=1/3$.
   Jakie musi być n, aby prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej jednego sukcesu przy n próbach było większe od 65/81 ?

5. Dla każdego z podanych niżej fragmentów sieci prawdopodobieństwo przepalenia się żarówki wynosi q ($0<q<1$), przy czym żarówki przepalają się niezależnie od siebie. Oblicz prawdopodobieństwo ciągłego przepływu prądu ?

a)



b)



6. Każda z trzech jednakowych urn zawiera 21 kul, w tym k białych. Z każdej urny wyciągamy losowo 1 kulę.
Zbadać, dla jakich k prawdopodobieństwo wyciągnięcia dokładnie 2 kul białych jest największe.

Aby dowiedzieć się więcej...

- poczytaj literaturę

  \- *znajdziesz całą masę literatury dotyczącej rachunku prawdopodobieństwa i elementów statystyki*

- rozwiąż parę zadań samodzielnie

- przyjdź na konsultacje

I to by było na tyle ...