Piotr Gumienny

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Rachunek prawdopodobieństwa zajmuje się badaniem praw rządzących zjawiskami losowymi (przypadkowymi).

Jego dynamiczny rozwój rozpoczął się w XVII w. Początkowo dotyczył teorii gier hazardowych, z czasem znalazł szerokie zastosowanie w innych dziedzinach życia i nauki (np. rachunek błędów, statystyka, demografia, ubezpieczenia).

Piotr Gumienny

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Rachunek prawdopodobieństwa zajmuje się analizą praw rządzących zjawiskami przypadkowymi tj. takimi, których przebiegu (wyniku) nie można przewidzieć. Dzieje się tak dlatego, że na przebieg zjawiska losowego ma wpływ wiele przyczyn, z których jedynie część możemy kontrolować np. przy rzucie monety: prędkość obrotowa monety, siłą rzutu, prądy powietrza, sprężystość materiału itp.

Piotr Gumienny

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

ALGEBRA ZDARZEŃ

Podobnie jak inne działy matematyki np. geometria, rachunek prawdopodobieństwa wychodzi z pewnych pojęć pierwotnych. Pojęciem pierwotnym rachunku prawdopodobieństwa jest **zdarzenie elementarne**, które oznaczamy literą ω. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych będziemy oznaczali literą Ω i nazywali **przestrzenią zdarzeń elementarnych.**

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

PRZYKŁAD

1. Rzut monetą

$\omega 1 = O$

$\omega 2 = R$ $\qquad \Omega = \{\omega 1 , \omega 2 \} = \{O , R\}$

2. Rzut kostką

$\omega 1 = 1$

$\omega 2 = 2$

$\omega 3 = 3$ $\qquad \Omega = \{\omega 1,\omega 2,\omega 3,\omega 4,\omega 5,\omega 6\}$

$\omega 4 = 4$ $\qquad = \{1,2,3,4,5,6\}$

$\omega 5 = 5$

$\omega 6 = 6$

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

DEFINICJA

Każdy podzbiór zbioru zdarzeń elementarnych Ω nazywamy zdarzeniem w zbiorze Ω.

Zdarzenie oznaczamy dużymi literami A, B, C.....

PRZYKŁAD

$\Omega = \{\omega 1 \ , \omega 2 \ , \omega 3 \ , \omega 4\}$

$A = \{\omega 1 \ , \omega 2\}$

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

DEFINICJA
Mówimy, że zdarzenie elementarne w sprzyja zdarzeniu A ($A \subset \Omega$), jeżeli $\omega \in A$

Każde zdarzenie elementarne w sprzyja zdarzeniu będącemu całym zbiorem Ω. Mówimy wtedy o **zdarzeniu pewnym**.
Żadne zdarzenie elementarne w nie sprzyja zdarzeniu będącemu zbiorem pustym. Mówimy wtedy o **zdarzeniu niemożliwym**.

Piotr Gumienny

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Na zdarzeniach elementarnych podobnie jak na zbiorach można wykonywać działania.

DEFINICJA

Niech A i B będą dowolnymi podzbiorami zbioru Ω.

- sumą zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \cup B$
- iloczynem zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \cap B$
- różnicą zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \setminus B$
- zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A nazywamy zdarzenie $A' = \Omega \setminus A$

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

PRZYKŁAD

Rzucamy kostką do gry.
Niech A będzie zdarzeniem – wypadło co najmniej 5 oczek, a B – wypadła liczba pierwsza.
Wyznacz zdarzenia
$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, A', B'

Piotr Gumienny

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Mówimy, że dwa doświadczenia przebiegają w identycznych warunkach (są identyczne), jeżeli mają te same zbiory kontrolowanych przyczyn.

Wyniki doświadczeń nazywamy **zdarzeniami**. Doświadczenie, które możemy przeprowadzić dowolnie wiele razy nazywamy **powtarzalnym** np. pomiar masy. Istnieją takie doświadczenia niepowtarzalne np. pomiar czasu palenia żarówki.

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Zjawiska polegające na przeprowadzeniu (przebiegu) dużej ilości tych samych doświadczeń nazywamy **zjawiskami masowymi**.

Zjawiska masowe mają swoje specyficzne prawidłowości.

Piotr Gumienny

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Jeśli wśród N doświadczeń zdarzenie A zaszło n(A) razy, to liczbę

$$\frac{n(A)}{N}$$

nazywamy **częstością zdarzenia A**

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

W zjawiskach masowych częstości występowania każdego zdarzenia mają tę własność, że wraz ze wzrostem liczby N wykazują tendencję skupiania się dookoła pewnej liczby, zależnej od tego zdarzenia.

Tę własność nazywamy

stabilnością częstości.

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Liczba rzutów N	Liczba orłów n(A)	Częstość zdarzenia
200	116	0,5800
300	153	0,5100
500	251	0,5020
1000	504	0,5040
2000	1002	0,5010
10000	4993	0,4993

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Własności częstości

1. Ponieważ $n(A) \geq 0 \ i \ N > 0$, więc $\frac{n(A)}{N} \geq 0$

2. Jeśli zdarzenia A i B wyłączają się, to liczba pojawienia się zdarzenia $A \cup B$ jest równa sumie częstości tych zdarzeń tj.

$$\frac{n(A \cup B)}{N} = \frac{n(A) + n(B)}{N} = \frac{n(A)}{N} + \frac{n(B)}{N}$$

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

3. Jeśli n(A)=N, to częstość zdarzenia A jest równa 1

$$\frac{n(A)}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

Piotr Gumienny

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwo jest teoretycznym odpowiednikiem częstości.

Pierwszą definicję prawdopodobieństwa wprowadził Laplace.

Piotr Gumienny

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

DEFINICJA
Jeżeli wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo każdego zdarzenia jest ilorazem liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu przez liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych.

$$P(A) = \frac{n(A)}{N}$$

n- liczba zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A
N- liczba wszystkich zdarzeń

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Niekiedy możemy spotkać inną symbolikę

$$n(A) = \overline{\overline{A}}$$

$$N = \overline{\overline{\Omega}}$$

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

PRZYKŁAD

1. Rozpatrzmy jednokrotny rzut kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania liczby mniejszej niż 3 ?

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

PRZYKŁAD

2. Rozpatrzmy rzut trzema monetami.
   Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej 2 orłów ?

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

PRZYKŁAD

3. Z talii 52 kart losujemy jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania figury ?

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa nie jest „wystarczająca". Można ją stosować tylko wówczas, gdy zbiór zdarzeń elementarnych Ω jest skończony tj. gdy możemy „policzyć" ich liczbę.

Wystarczyć prosty przykład, by „intuicyjnie" policzyć prawdopodobieństwo niemożliwe do policzenia definicją klasyczną:

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

PRZYKŁAD

Ze zbioru liczb naturalnych wybieramy losowo jedną.
Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania liczby parzystej ?

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Dlatego konieczne okazało się podanie nowej „ogólnej” definicji prawdopodobieństwa. Taką definicję – zwaną **aksjomatyczną** – sformułował Kołmogorow

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

DEFINICJA

Prawdopodobieństwem nazywamy funkcję, która każdemu elementowi A ($A \subset \Omega$) przyporządkowuje liczbę P(A) spełniającą następujące warunki (aksjomaty):

1. $P(A) \geq 0$
2. jeżeli $A \cap B = \varnothing$, to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
3. $P(\Omega) = 1$

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Pojęcie prawdopodobieństwa (w ujęciu aksjomatycznym) wykazuje „podobieństwo” do pojęcia pola powierzchni.

Figurom na płaszczyźnie przyporządkowujemy liczbę (pole) spełniającą warunki:

Piotr Gumienny

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

1. Jeśli A jest figurą, to jej pole jest liczbą nieujemną tj. $P(A) \geq 0$

2. Jeśli A i B są figurami rozłącznymi, to pole sumy figur A i B liczymy jako sumę ich pól
tj. jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3. Jeśli ograniczymy rozważania do figur zawartych w kwadracie o boku 1, to oznaczając go przez Ω otrzymamy $P(\Omega) = 1$

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Własności prawdopodobieństwa

TWIERDZENIE

Niech (Ω,P) będzie przestrzenią probabilistyczną.
Niech A i B będą dowolnymi zdarzeniami
w zbiorze Ω. Wtedy:

Piotr Gumienny

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

1. $P(\varphi) = 0$
2. $A \subset B, to\, P(A) \le P(B)$
3. $A \subset \Omega, to\, P(A) \le 1$
4. $P(A') = 1 - P(A)$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

DOWÓD

1. Zbiory A i ϕ są rozłączne. Zatem z 2 warunku definicji mamy

$$1. P(A \cup \varphi) = P(A) + P(\varphi)$$

$$2. P(A \cup \varphi) = P(A)$$

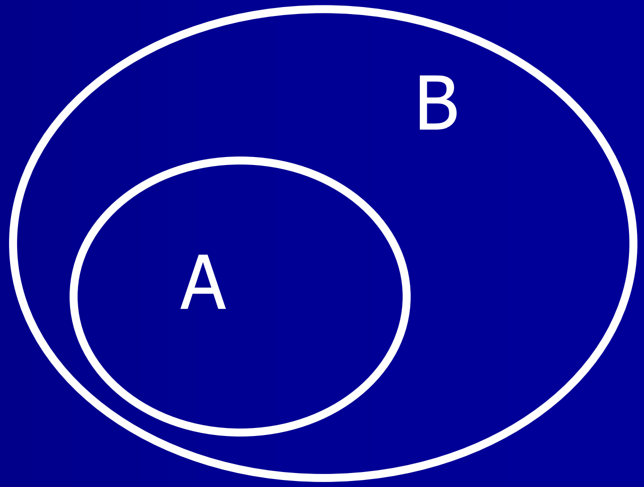
Odejmując stronami mamy

$$P(\varphi) = 0$$

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

2. Jeśli $A \subset B$, to

$$B = (B \setminus A) \cup A$$



przy czym zbiory B\A i A są rozłączne. Zatem z 2 warunku definicji mamy

$$P(B) = P((B \setminus A) \cup A) =$$

$$P(B \setminus A) + P(A) \geq P(A)$$

$$czyli \;\; P(B) \geq P(A)$$

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

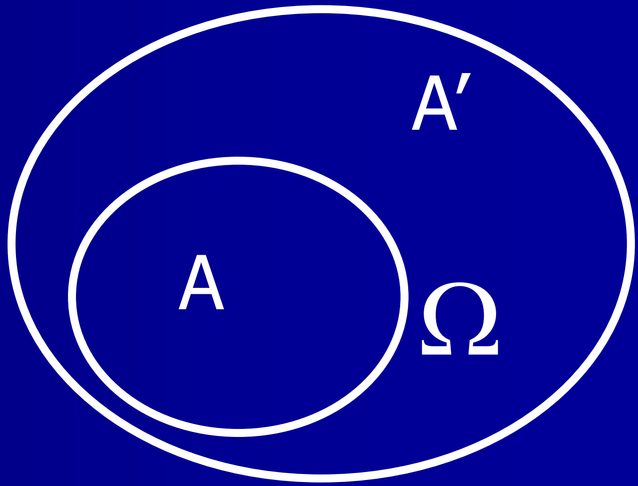
3. Wystarczy skorzystać z własności 2 i podstawić

$$B = \Omega$$

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

4. Mamy: $A \cup A' = \Omega$

$$A \cap A' = \varphi$$



Zatem

$$P(\Omega) = P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

$$1 = P(A) + P(A')$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

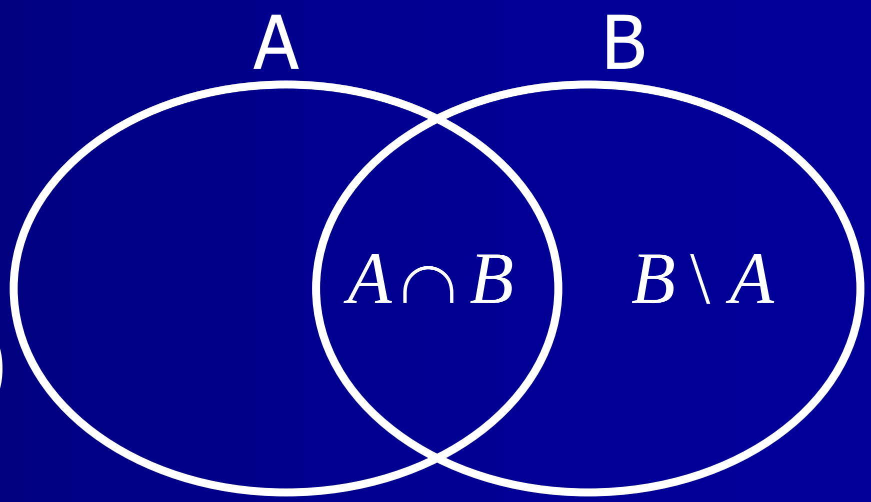
Piotr Gumienny

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

5. Zauważmy, że

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$$

$$B = (\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$



Ponadto

$$A \cup (B \setminus A) = \varphi$$

$$(\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \varphi$$

Piotr Gumienny

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Na mocy 2 warunku definicji mamy

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$$

$$P(B) = P(\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}) + P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

i stąd

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Jakie jest prawdopodobieństwo, że zajęcia się skończyły ?

to zdarzenie pewne
o prawdopodobieństwie
równym 1 !!!