Prawdopodobieństwo Geometryczne

Marcin
Bardziłowski IIIB

WYJŚCIE

M E N U

Prawdopodobieństwo Geometryczne

- Pojęcie prawdopodobieństwa geometrycznego
- Przykład pierwszy
- Przykład drugi
- Przykład trzeci
- Przykład czwarty

„Pomiędzy duchem a materią pośredniczy matematyka...”

H. Steinhaus

Prawdopodobieństwo Geometryczne

1). Teoria:

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa znajduje zastosowanie w takich sytuacjach gdy zbiór zdarzeń elementarnych Ω w danym doświadczeniu jest nieskończony, oraz gdy przez charakter doświadczeni zagwarantowane są jednakowe szanse zaistnienia dla każdego ze zdarzeń elementarnych zbioru Ω.

Def.

Prawdopodobieństwo geometryczne zdarzenia A określamy jako iloraz miary zdarzenia A do miary zdarzenia Ω.

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

Miarą prostej jest długość, płaszczyzny pole, a przestrzeni objętość.

Przykład #1

Dwie osoby X i Y umówiły się na spotkanie w określonym miejscu między godziną 12:00, a 13:00 w ten sposób, że osoba która przyjdzie pierwsza czeka jedynie 20 minut, po czym odchodzi. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że osoby X i Y spotkają się, jeżeli każda z nich przychodzi losowo w podanym przedziale czasowym i niezależnie od siebie.

Oznaczamy:

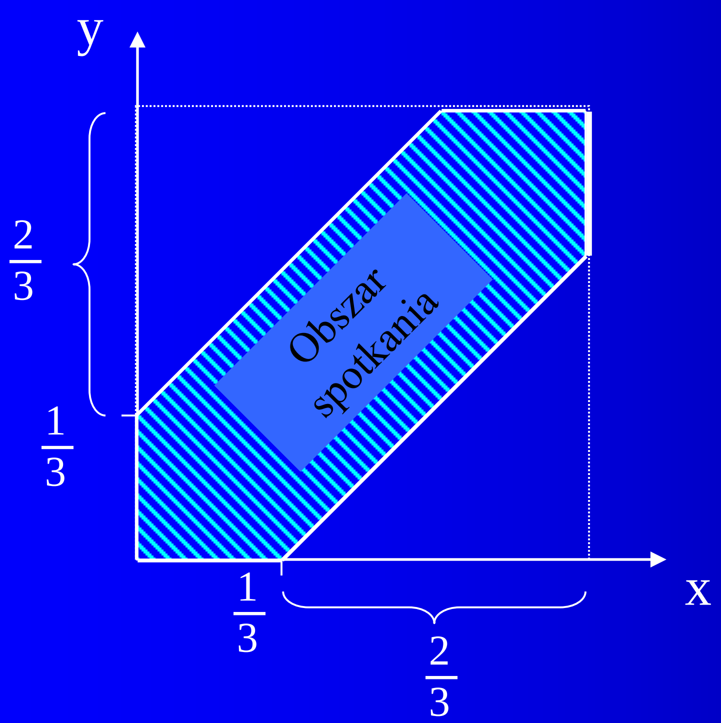
x – czas odpowiadający momentowi przybycia I-ej osoby (X)

y – czas odpowiadający momentowi przybycia II-ej osoby (Y)

$$|x-y| \le \frac{1}{3} \qquad (20 \text{ min} = \frac{1}{3} \text{ godziny})$$

Stąd: $x - \frac{1}{3} \le y \le x + \frac{1}{3}$

Rysujemy:



Obliczamy pole zakreskowanego obszaru.

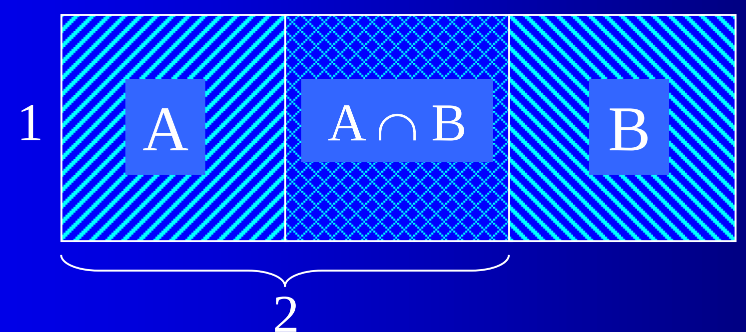
P = pole całego kwadratu – pola 2 trójkątów

$$P = 1 - 2 * \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2} = \frac{5}{9}$$

Odp.: Prawdopodobieństwo spotkania wynosi $\mathbf{\frac{5}{9}}$ (55,5(5)%)

Przykład #2

Strzelec strzela do tarczy. Tarcze stanowią 2 prostokąty o wymiarach 1m na 2m, nachodzące na siebie wzajemnie w połowie wielkości. Jeżeli strzelec strzelał na chybił trafił i podano informację, że kula tkwi w polu B, to prawdopodobieństwo, że trafił w pole A obliczamy biorąc pod uwagę, że zdarzenie iż kula tkwi w polu A jest równoważne zdarzeniu, że kula tkwi w polu $A \cap B$.



$m(\Omega)$ – trafienie w tarczę B $\qquad m\Omega=2$

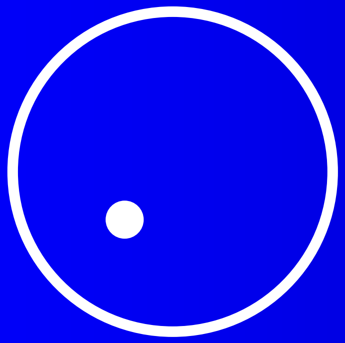
$m(A)$ – miara trafienia w przekrój $\qquad m\Omega=2$

$$P(A)= \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1}{2}$$

Przykład #3

Strzelec strzela do tarczy. Oblicz prawdopodobieństwo trafienia w ściśle określony punkt:

m(A) – miara zdarzenia, że strzelec trafi w ściśle określony punkt tarczy
m(Ω) – miara zdarzenia, że strzelec trafi w tarczę



$$m(A) = 0$$

$$P(A) = \frac{0}{m(\Omega)} = 0$$

Pole punktu = 0

Jeżeli 0 będzie w liczniku, to prawdopodobieństwo będzie równe 0, chociaż nie jest wcale niemożliwe trafienie w wybrany punkt.

Przykład #4

Strzelec strzela do tarczy. Wymiary tarczy:

- promień największego okręgu: $r_1 = 1m$,
- średniego okręgu: $r_2 = 0,5m$,
- Najmniejszego okręgu: $r_3 = 0,1m$.

Jakie jest prawdopodobieństwo strzału za 3 punkty, a jakie strzału za 2 punkty.

a) Prawdopodobieństwo trafienia za 3 punkty

A – zdarzenie polegające na trafieniu za 3 punkty

Ω - trafienie w tarczę

$m(A) = \Pi\, r_3^2 = \Pi(0,1)^2 = 0,01\, \Pi$

$m(\Omega) = \Pi\, r_2^2 = \Pi(1)^2 = \Pi$

$$P(A) = \frac{0,01\,\Pi}{\Pi} = 0,01$$

Przykład #4 c.d.

b) Prawdopodobieństwo trafienia za 2 punkty

B – zdarzenie polegające na trafieniu za 2 punkty

Ω - trafienie w tarczę

$m(B) = \Pi\, r_2^2 - \Pi\, r_3^2 = 0{,}25\, \Pi - 0{,}01\, \Pi = 0{,}24\, \Pi$

$m(\Omega) = \Pi$

$$P(B) = \frac{0{,}24\, \Pi}{\Pi} = 0{,}24$$

KONIEC

Marcin Bardziłowski

IIIB