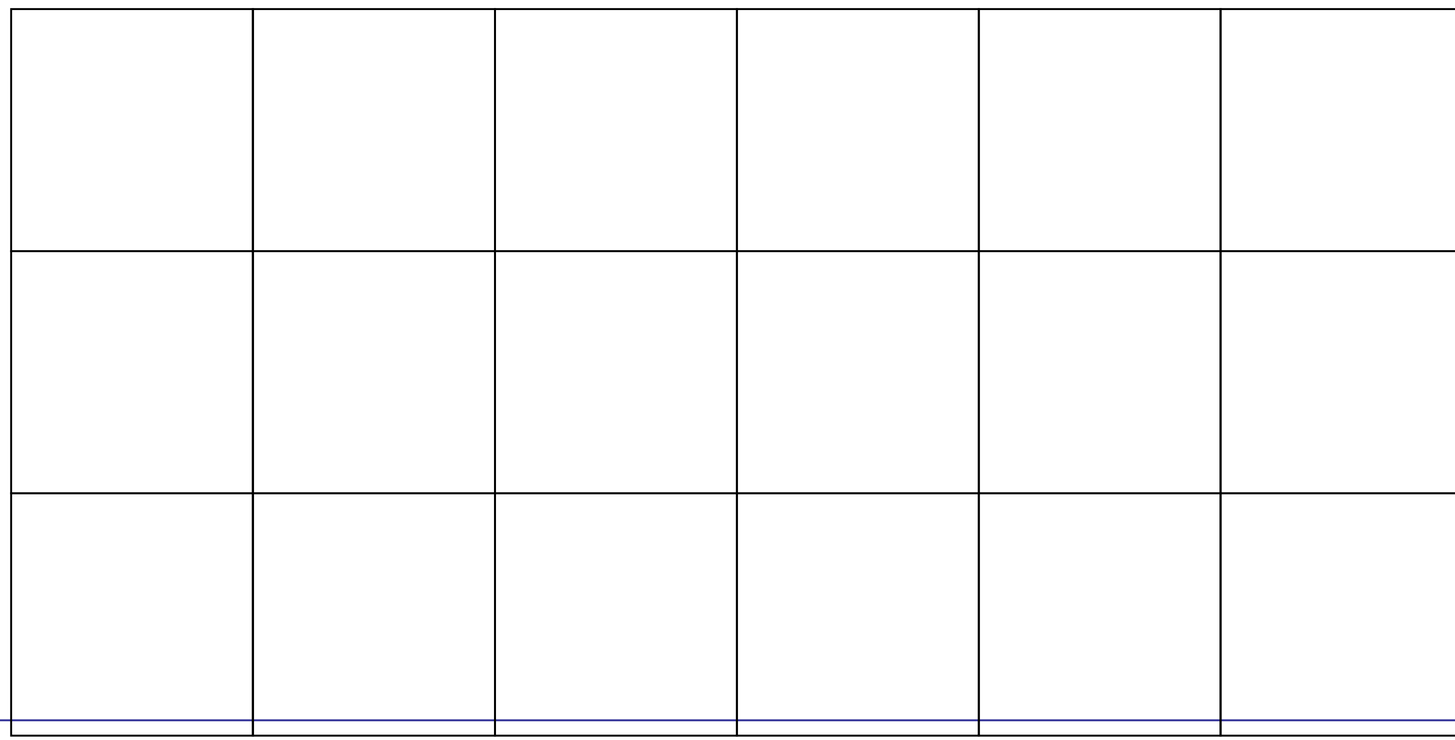
POLE FIGURY

Miara Jordana

Piotr Gumienny

Pole figury. Miara Jordana

Pokryjmy płaszczyznę kwadratami o boku długości 1 w sposób przedstawiony na rysunku:



Pole figury. Miara Jordana

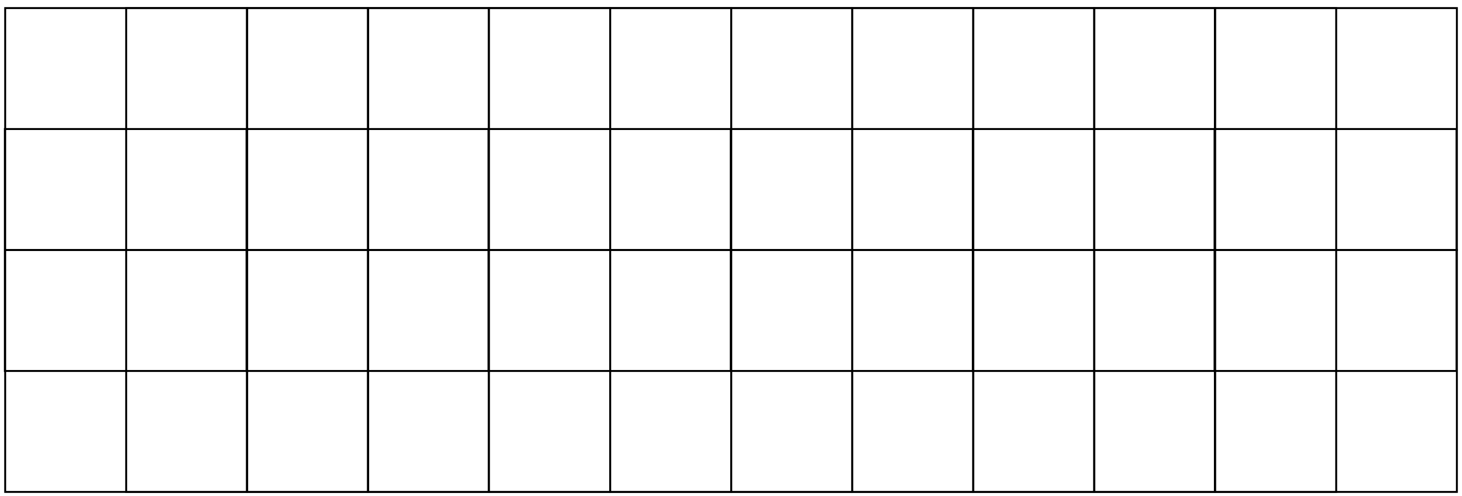
Zbiór wszystkich kwadratów nazywamy SIECIĄ ZEROWĄ i oznaczamy $\boldsymbol{K_0}$.

Pole pojedynczego kwadratu jest równe:

$$\boldsymbol{P_0=1}$$

Pole figury. Miara Jordana

Podzielmy każdy bok kwadratu „na pół” tworząc nową sieć $\boldsymbol{K_1}$.



Pole pojedynczego kwadratu jest równe:

$$\boldsymbol{P_1=1/4}$$

Pole figury. Miara Jordana

Postępując analogicznie tworzymy kolejne sieci

K_2 , K_3 , K_4 , ..., K_n , ...

o polach

$P_2 = 1/16 = 1/2^4$

$P_3 = 1/64 = 1/2^6$

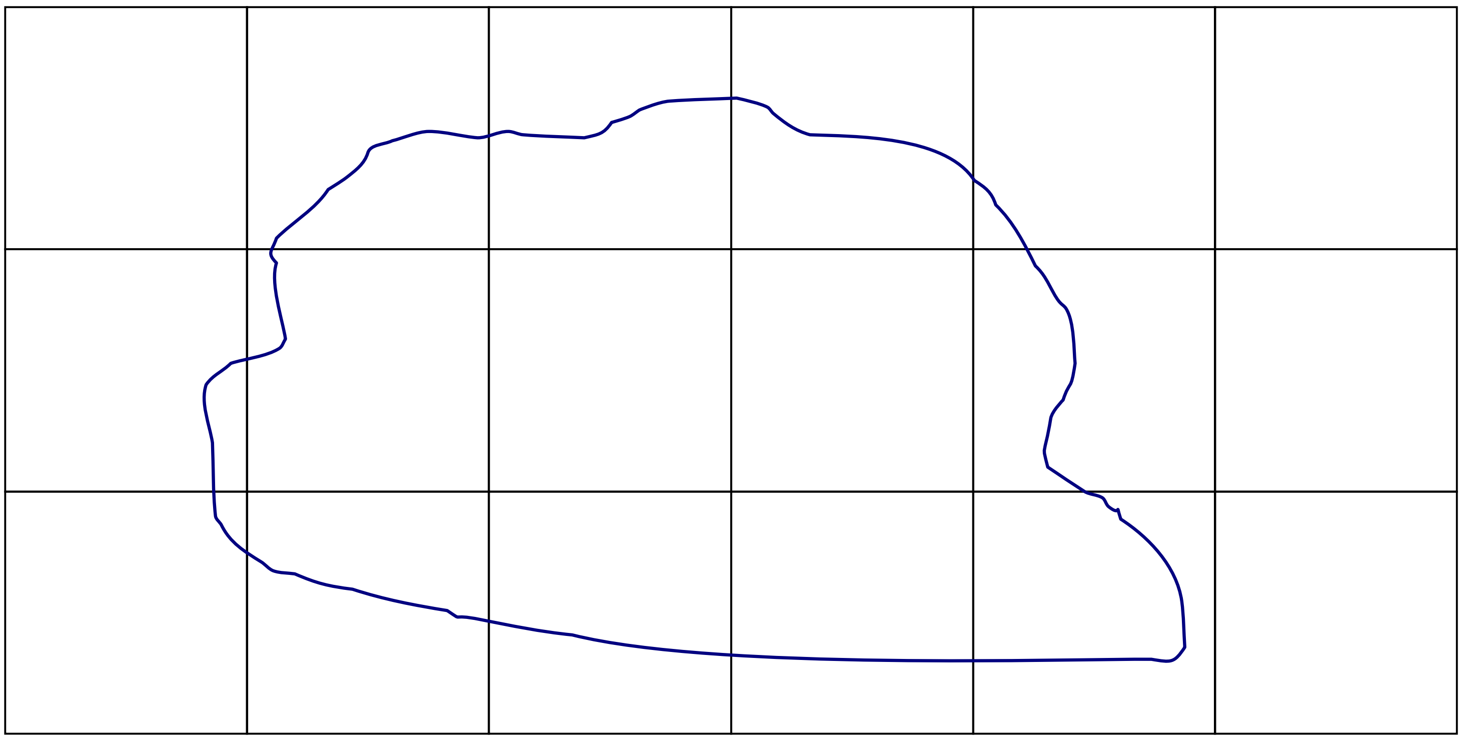
...

$P_n = 1/2^{2n}$

...

Pole figury. Miara Jordana

Weźmy dowolną figurę F i nałóżmy na nią sieć K_0



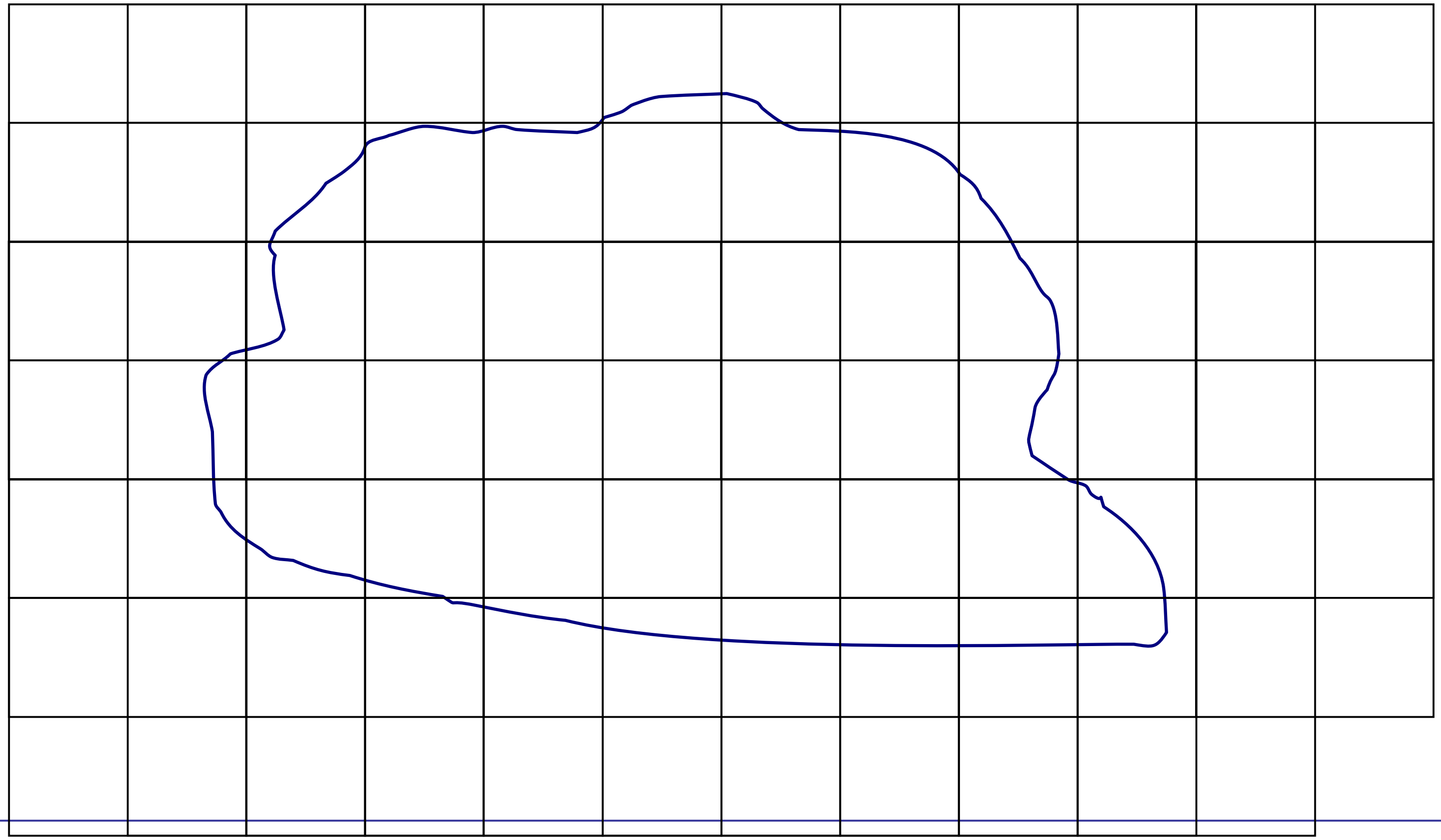
Pole figury. Miara Jordana

Następnie wyznaczamy liczbę kwadratów zawartych w figurze F i obliczmy ich pole.
(U nas liczba kwadratów – 2 i ich pole = 2)
Oznaczmy to pole przez $\boldsymbol{W_0}$

Wyznaczamy liczbę kwadratów pokrywających figurę F - są to te kwadraty, które mają chociaż jeden punkt wspólny.
(U nas liczba kwadratów – 14 i ich pole = 14)
Oznaczmy to pole przez $\boldsymbol{Z_0}$

Pole figury. Miara Jordana

Następnie na figurę F nałóżmy sieć K_1



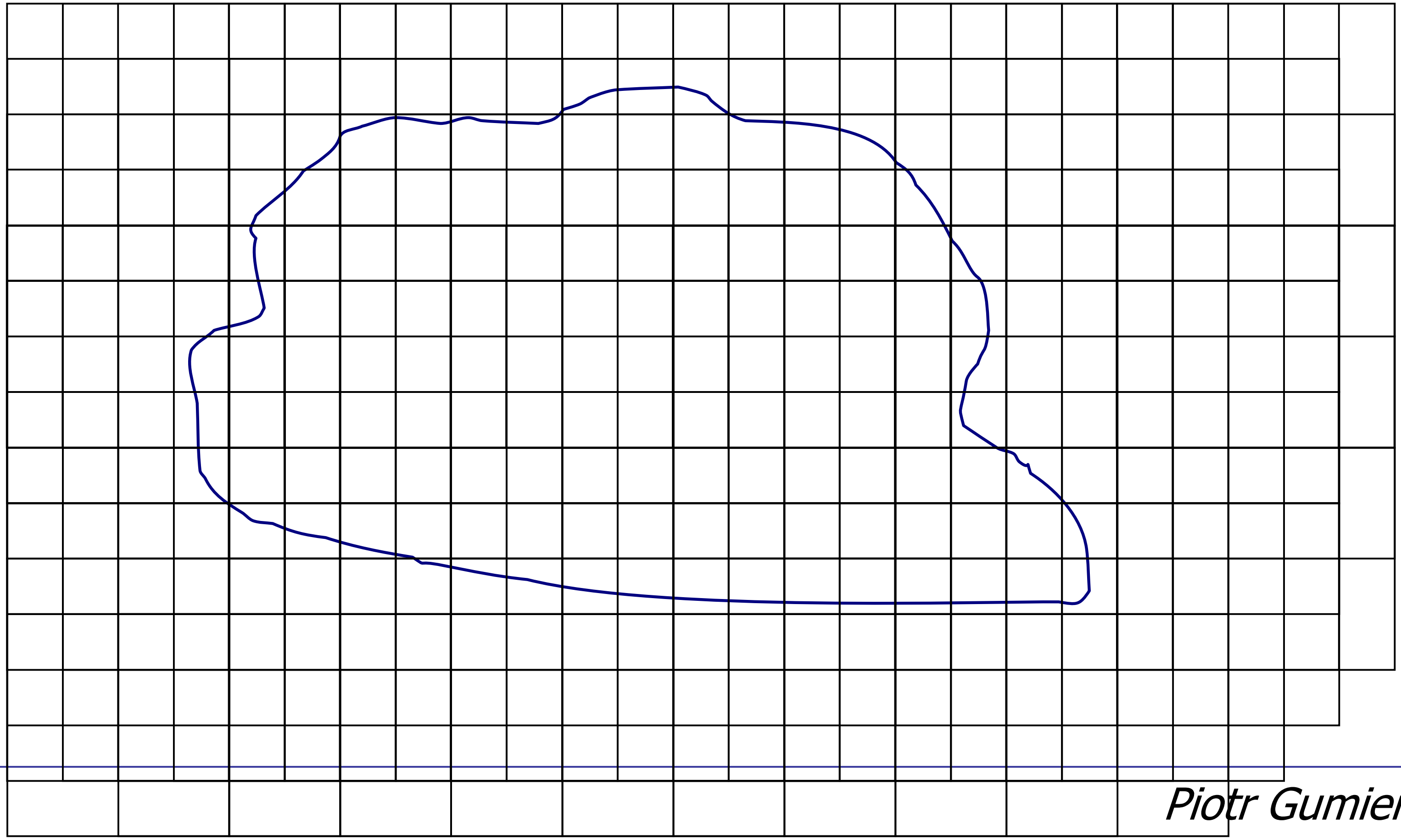
Pole figury. Miara Jordana

Następnie wyznaczamy liczbę kwadratów zawartych w figurze F i obliczmy ich pole.
(U nas liczba kwadratów – 16 i ich pole = 4)
Oznaczmy to pole przez W_1

Wyznaczamy liczbę kwadratów pokrywających figurę F - są to te kwadraty, które mają chociaż jeden punkt wspólny.
(U nas liczba kwadratów – 41 i ich pole = 10,25)
Oznaczmy to pole przez Z_1

Pole figury. Miara Jordana

Następnie na figurę F nałóżmy sieć K_2



Pole figury. Miara Jordana

Następnie wyznaczamy liczbę kwadratów zawartych w figurze F i obliczmy ich pole.
(U nas liczba kwadratów – 85 i ich pole = 5,3125)
Oznaczmy to pole przez $\boldsymbol{W_2}$

Wyznaczamy liczbę kwadratów pokrywających figurę F - są to te kwadraty, które mają chociaż jeden punkt wspólny.
(U nas liczba kwadratów – 130 i ich pole = 8,125)
Oznaczmy to pole przez $\boldsymbol{Z_2}$

Pole figury. Miara Jordana

Nakładamy na figurę F kolejne sieci i wyznaczamy pola

$\boldsymbol{W_3}$, $\boldsymbol{W_4}$, ..., $\boldsymbol{W_n}$, ...

i

$\boldsymbol{Z_3}$, $\boldsymbol{Z_4}$, ..., $\boldsymbol{Z_n}$, ...

Otrzymujemy dwa ciągi

$$\left\{ W_n \right\}, \left\{ Z_n \right\}$$

Pole figury. Miara Jordana

Zauważmy, że zachodzi

$$W_0 \leq W_1 \leq W_2 \leq \ldots \leq W_n \leq Z_n \leq \ldots \leq Z_1 \leq Z_0$$

tzn. ciąg $\{W_n\}$ jest rosnący i ograniczony z góry

a ciąg $\{Z_n\}$ jest malejący i ograniczony z dołu

Pole figury. Miara Jordana

Na mocy twierdzenia (z teorii granic ciągów liczbowych) ciągi monotoniczne i ograniczone są zbieżne (tzn. mają granice).

Zatem ciągi $\{W_n\}, \{Z_n\}$ są zbieżne (mają granice).

Pole figury. Miara Jordana

Granicę $\lim_{n\to\infty} W_n = W(F)$ nazywamy **miarą wewnętrzną** figury F.

Granicę $\lim_{n\to\infty} Z_n = Z(F)$ nazywamy **miarą zewnętrzną** figury F.

Pole figury. Miara Jordana

Definicja

Mówimy, że **figura F jest mierzalna** (ma pole) jeżeli miara wewnętrzna jest równa mierze zewnętrznej:

$$\mathbf{W(F)=Z(F)=m(F)}$$

Liczbę m(F) nazywamy **miarą (polem)** figury F.

Pole figury. Miara Jordana

WŁASNOŚCI MIARY (POLA) :

1. Pole figury jest liczbą nieujemną tj. $m(F) \geq 0$

2. Figury przystające mają równe pola

   tj. $F_1 \equiv F_2 \Rightarrow m(F_1) = m(F_2)$

Pole figury. Miara Jordana

3. Figura będąca sumą dwóch figur nie mających wspólnych punktów wewnętrznych ma pole równe sumie pól figur składowych:

$$F = F_1 \cup F_2 \wedge F_1 \cap F_2 = \varnothing \Rightarrow m(F) = m(F_1) + m(F_2)$$

4. Jeżeli figury F_1 i F_2 mają pola i figura $F_1 \subset F_2$ to $m(F_1) \leq m(F_2)$

Pole figury. Miara Jordana

5. Pole prostokąta o bokach a i b jest równe P=ab.

6. Figura „jednowymiarowa” ma pole równe 0

(punkt, odcinek, łuk krzywej itd.)

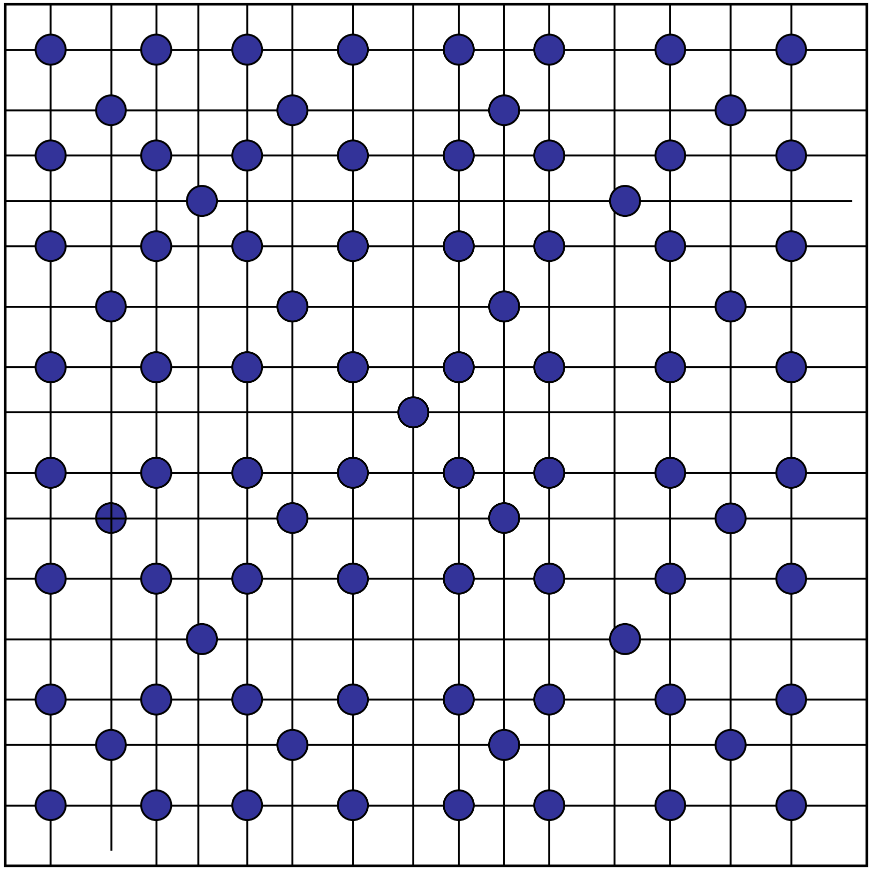
Pole figury. Miara Jordana

Przykład figury niemierzalnej (bez pola)

1. Kwadrat-sito

Weźmy kwadrat o boku długości 1. Dzielimy go na 4 przystające kwadraty i „wyrzucamy” ich punkt wspólny. Następnie każdy z powstałych kwadratów ponownie dzielimy na 4 przystające kwadraty i „wyrzucamy” ich punkty wspólne. Itd…

Pole figury. Miara Jordana



Pole figury. Miara Jordana

Zauważmy, że

miara wewnętrzna **W(F)=0**

miera zewnętrzna **Z(F)=1**

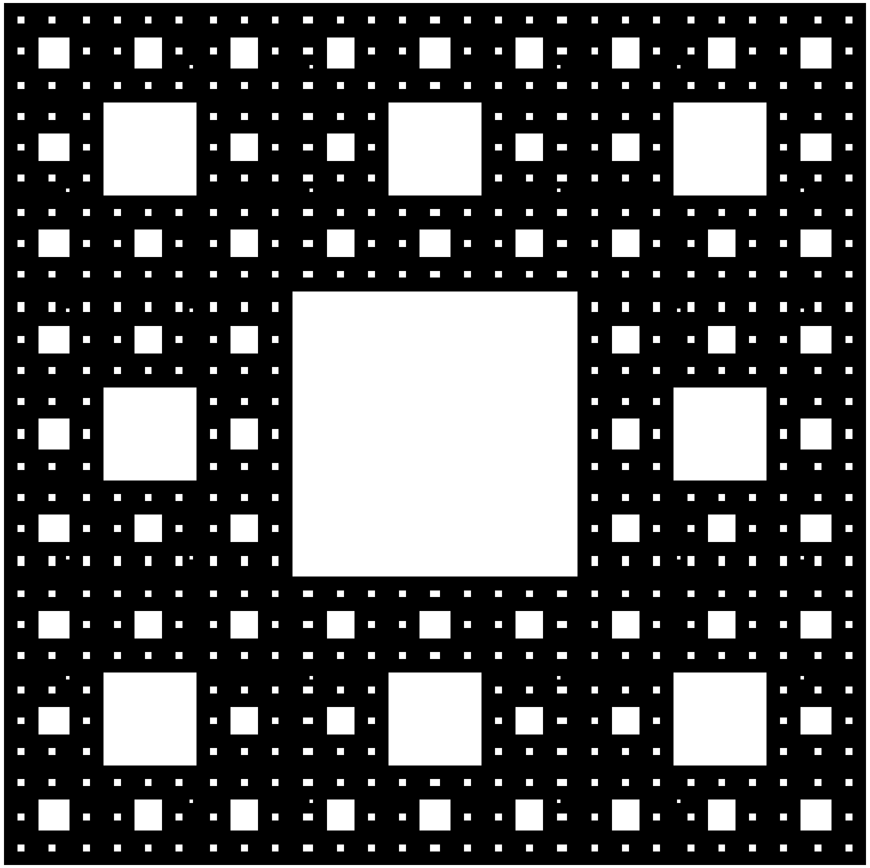
zatem figura nie jest mierzalna!

Pole figury. Miara Jordana

2. Dywan Sierpińskiego

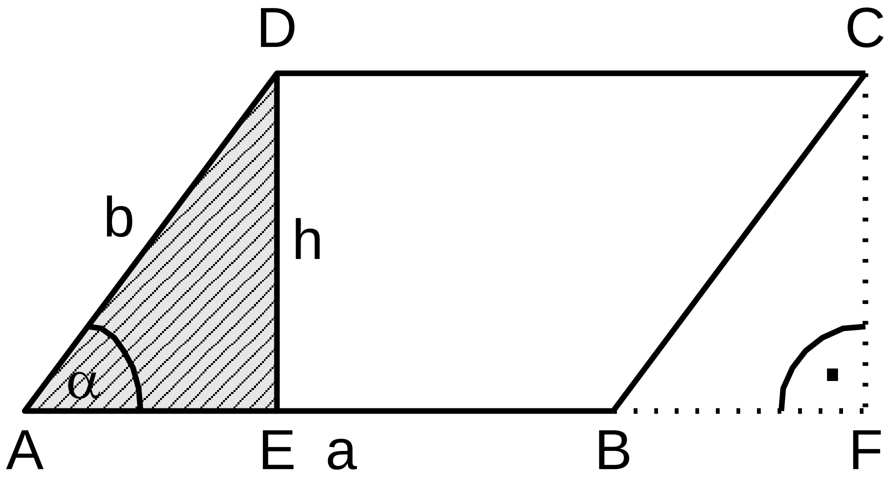
Weźmy kwadrat o boku długości 1. Dzielimy go na 9 przystających kwadratów i „wyrzucamy” środkowy. Następnie każdy z powstałych kwadratów ponownie dzielimy na 9 przystających kwadratów i „wyrzucamy” środkowy. Itd…

Pole figury. Miara Jordana



Pola figur płaskich.

1. Równoległobok



Pola figur płaskich.

$\Delta AED \equiv \Delta BFC \qquad (bkb)$

$$S = a \cdot h$$

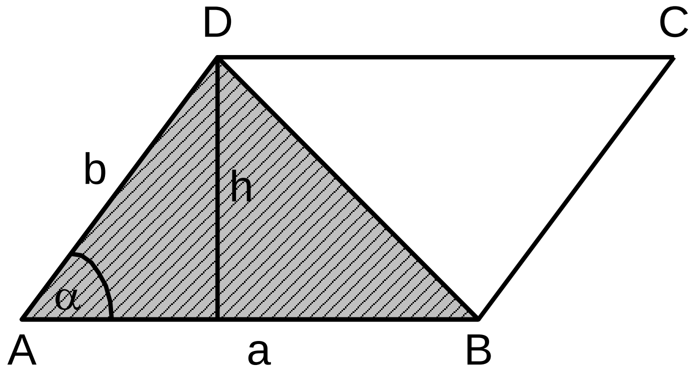
ΔAED

$\sin\alpha = \frac{h}{b} \qquad h = b \cdot \sin\alpha$

$$S = a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

Pola figur płaskich.

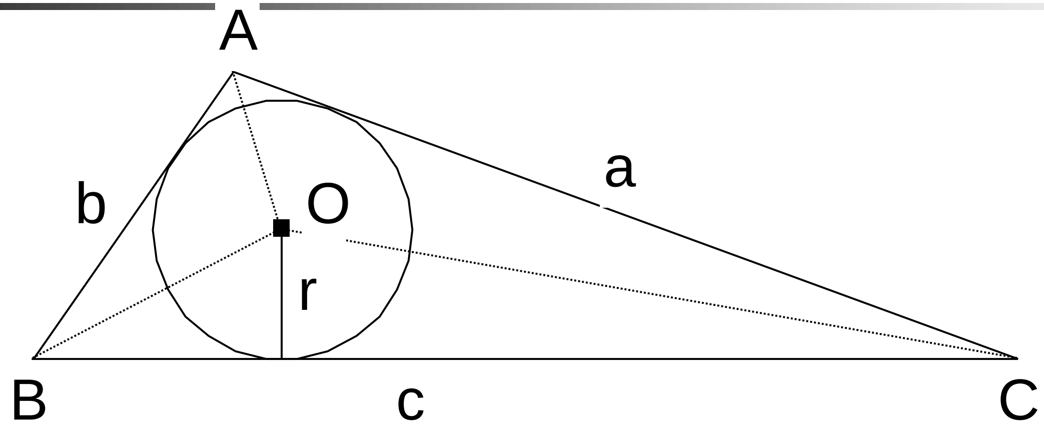
2. Trójkąt



$$S = \frac{1}{2} a \cdot h$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

Pola figur płaskich.



$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}$$

$$S = \frac{1}{2}c \cdot r + \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r$$

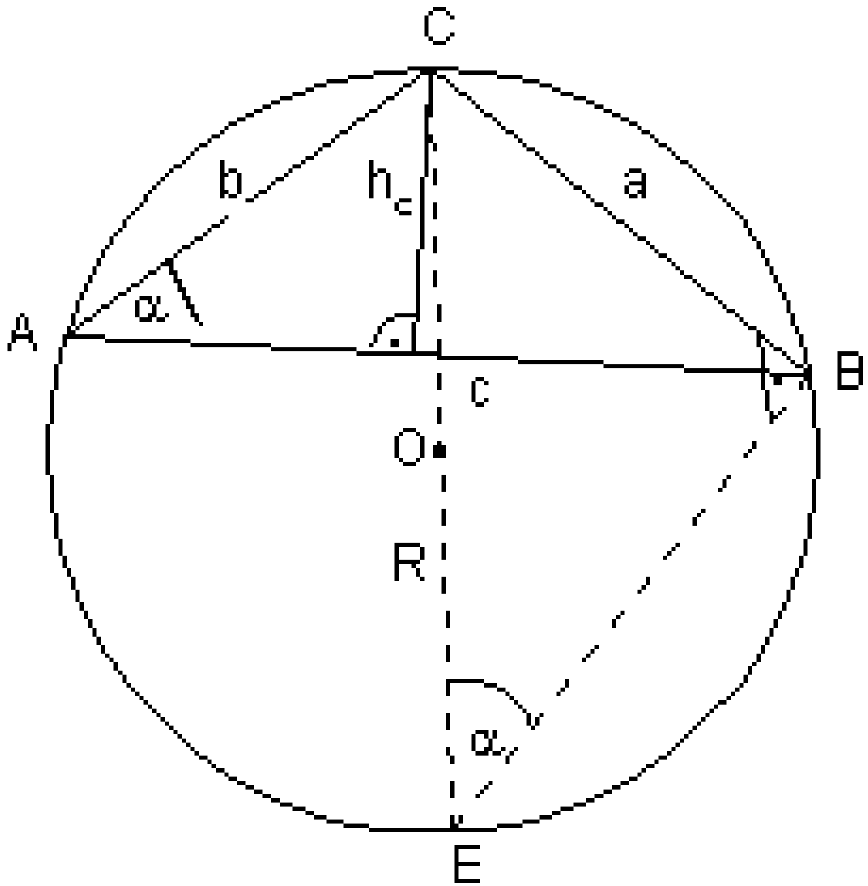
$$S = r \cdot \frac{a+b+c}{2}$$

$$2p = a + b + c$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = r \cdot p$$

Pola figur płaskich.



Pola figur płaskich.

$$Z\ \Delta ADC \quad \sin\alpha = \frac{h_c}{b}$$

$$Z\ \Delta CBE \quad \sin\alpha = \frac{a}{2R}$$

$$\frac{a}{2R} = \frac{h_c}{b}$$

$$2R \cdot h_c = a \cdot b \ \Big|\cdot c$$

$$2R \cdot h_c \cdot c = abc$$

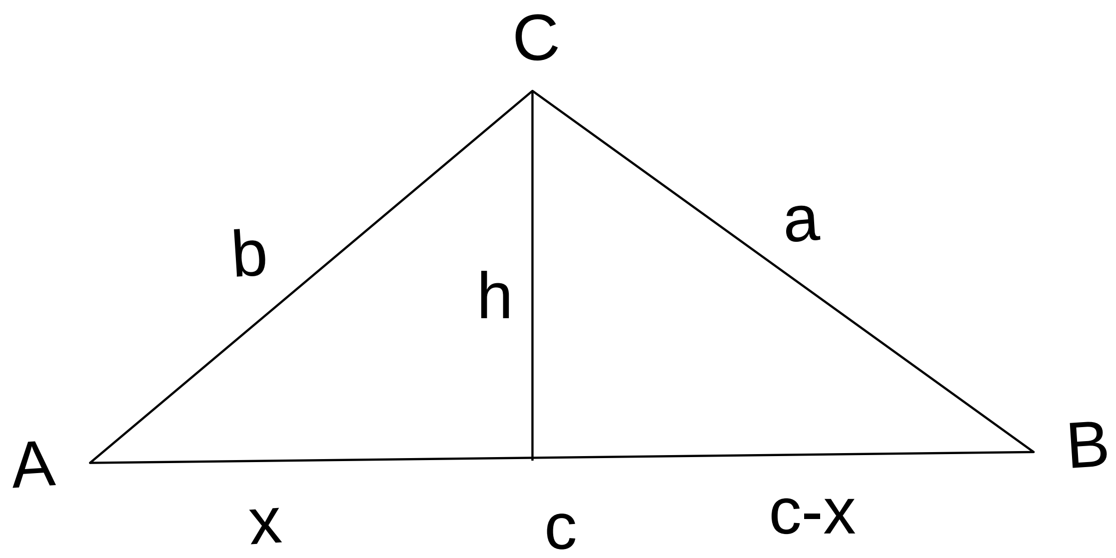
$$R \cdot 4 \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c}_{S} = abc$$

$$R \cdot 4 \cdot S = abc$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

Pola figur płaskich.

Wzór Herona



Pola figur płaskich.

Z twierdzenia Pitagorasa

$$b^2 = x^2 + h_c^2$$

$$a^2 = h_c^2 + (c-x)^2$$

Po odjęciu stronami otrzymamy

$$b^2 - a^2 = x^2 + h_c^2 - h_c^2 - (c-x)^2$$

$$b^2 - a^2 = x^2 - (c-x)^2$$

$$b^2 - a^2 = x^2 - (c^2 - 2cx + x^2)$$

$$b^2 - a^2 = x^2 - c^2 + 2cx - x^2$$

$$2cx = b^2 + c^2 - a^2$$

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

Pola figur płaskich.

Po wstawieniu x do I równania, zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia oraz podstawieniu

$$b+c-a=a+b+c-2a=2p-2a=2(p-a)$$
$$a+c-b=a+b+c-2b=2p-2b=2(p-b)$$
$$a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c)$$

i „prostych” rachunkach ☺ otrzymamy:

Pola figur płaskich.

$$h_c^2 = \frac{2p \cdot 2(p-a) \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-c)}{4c^2} \quad / \cdot c^2$$

$$h_c^2 \cdot c^2 = p(p-a) \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-c)$$

$$h_c^2 \cdot c^2 = 4p(p-a)(p-b)(p-c)$$

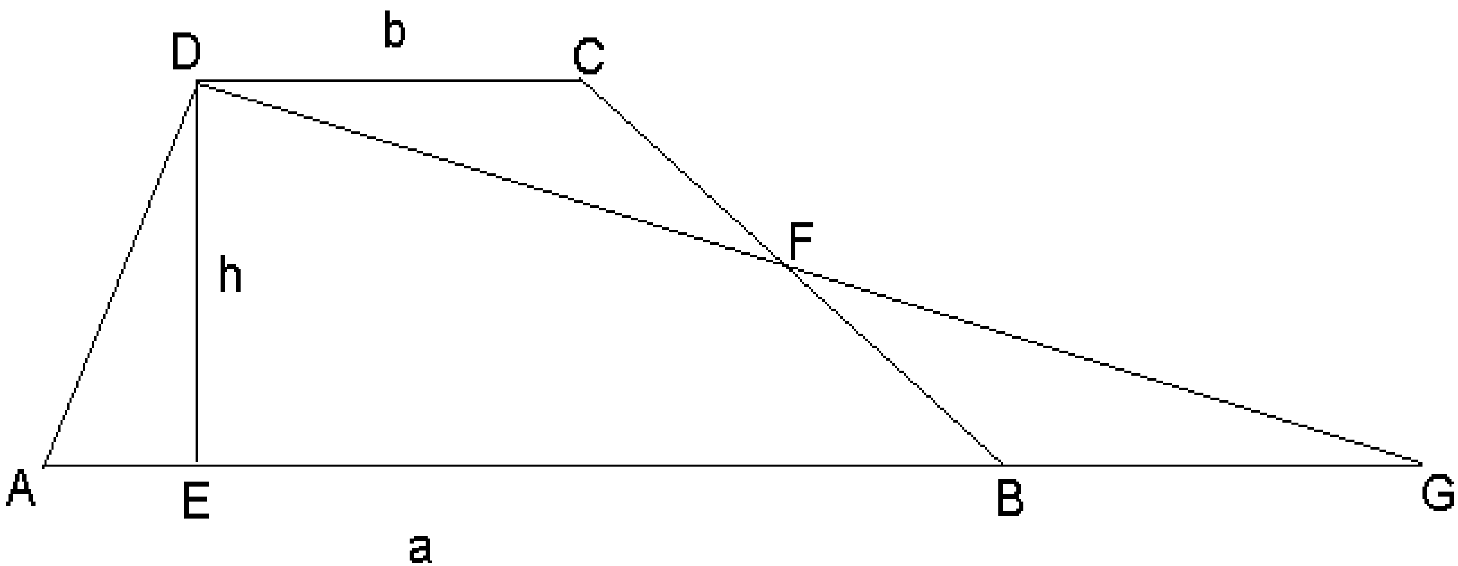
$$h_c \cdot c = \sqrt{4p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad / : 2$$

$$\frac{h_c \cdot c}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Pola figur płaskich.

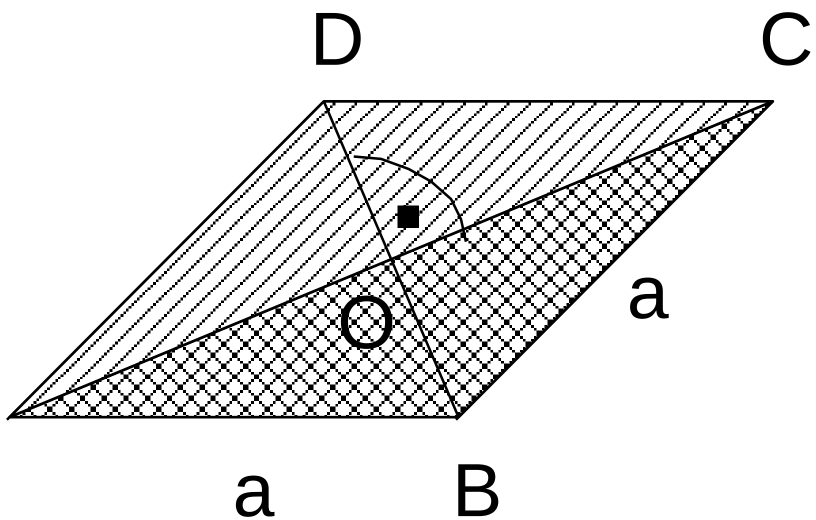
3. Trapez



$$S = \frac{1}{2}(a+b)h = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Pola figur płaskich.

4. Romb



$$S = \frac{ef}{2}$$

$$AC = 2p = e$$

$$BD = 2q = f$$

$$S = S_{ACD} + S_{ABC}$$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot OD + \frac{1}{2} AC \cdot OB$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2p \cdot q + \frac{1}{2} \cdot 2p \cdot q$$

$$S = 2pq$$

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e \cdot \frac{1}{2} \cdot f = \frac{1}{2} ef$$