# Pochodna funkcji

# Spis treści


- Iloraz różnicowy funkcji w punkcie
- Pochodna funkcji w punkcie
- Podstawowe twierdzenia o obliczaniu pochodnych
- Druga pochodna funkcji
- Pochodna funkcji złożonej
- Ekstrema funkcji różniczkowalnej
- Najmniejsza i największa wartość funkcji w przedziale
- Monotoniczność funkcji
- Reguła de L'Hôspitala
- Wklęsłość i wypukłość funkcji
- Informacje o autorze
- Elsiu ci opowie o pokazach niestandardowych


# Iloraz różnicowy funkcji w punkcie

- Definicja ilorazu różnicowego
- Graficzna ilustracja
- Geometryczna interpretacja ilorazu różnicowego

# Definicja ilorazu różnicowego

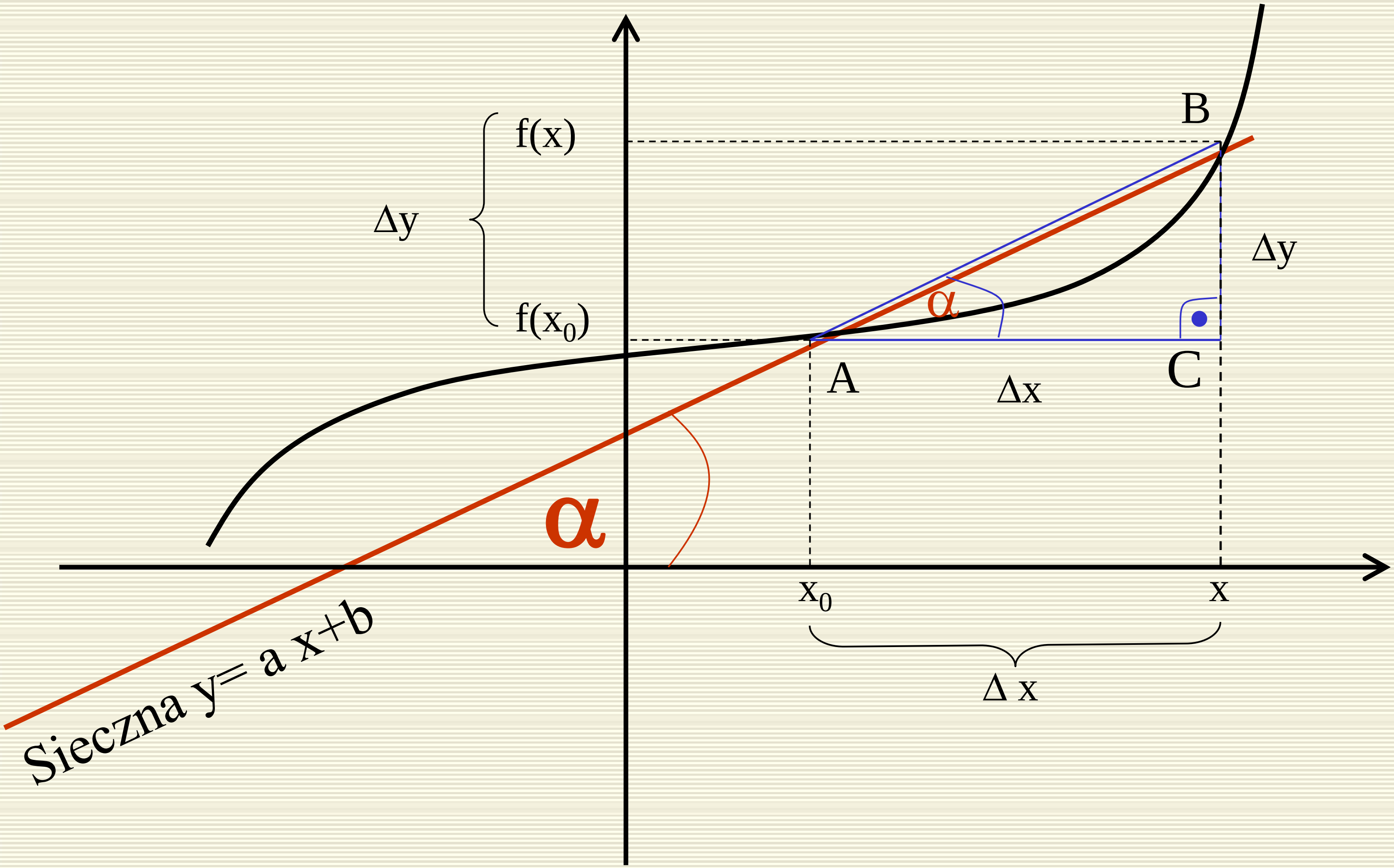
Niech dana będzie funkcja $f \div D \to R$
Weźmy punkt $x_0$ taki, że zawiera się w dziedzinie wraz ze swoim otoczeniem. Weźmy dowolny punkt x leżący w sąsiedztwie punktu $x_0$. Różnicę $x - x_0$ nazywamy przyrostem argumentu i oznaczamy $\Delta x$. Odpowiadający jemu przyrost wartości $f(x) - f(x_0)$ oznaczamy $\Delta y$.

→

# Definicja ilorazu różnicowego

**Def**. Iloraz $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nazywamy ilorazem różnicowym funkcji f odpowiadającym przyrostowi argumentu od $x_0$ do x.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$




Graficzna ilustracja ilorazu różnicowego.

przykład

Oblicz iloraz różnicowy odpowiadający przyrostowi argumentów od $x_0=1$ od $x=3$ dla
$f(x)= - x^2 + 2x + 3$.

Obliczamy $\Delta x$.

$\Delta x=3 - 1=2$

Obliczamy $f(x)$.

$f(x)= f(3)= -(3)^2 + 2\cdot 3 +3= 0$

Obliczamy $f(x_0)$.

$f(x_0)= - (1)^2 +2 +3= 4$

Iloraz różnicowy wynosi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{-4}{2} = 2$$

Oblicz iloraz różnicowy odpowiadający przyrostowi argumentów od $x_0=1$ od $x=0$ dla $f(x)= - x^2 + 2x + 3$.


Obliczamy $\Delta x$.

$\Delta x=0 - 1=-1$

Obliczamy $f(x)$.

$f(x)= f(0)= 3$

Obliczamy $f(x_0)$.

$f(x_0)= f(1)= 4$

Iloraz różnicowy wynosi: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{-1}=1$

## Z przykładów prezentowanych na poprzednim slajdzie wynika, że:

1. Iloraz różnicowy jest liczbą.
2. Iloraz różnicowy każdej liczbie x (przy ustalonej liczbie $x_0$) jest przyporządkowany jednoznacznie.
3. Interpretacja geometryczna (wykres): przez punkty A $(x_0, f(x_0))$ i B $(x, f(x))$ można poprowadzić prostą $y=ax+b$, zwaną sieczną krzywej. Iloraz różnicowy odpowiadający przyrostowi argumentów od $x_0$ do x jest równy tangensowi nachylenia siecznej do osi OX (współczynnikowi kierunkowemu siecznej).

$$a = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Dana jest funkcja $f(x)= x^2 - 4x$. Wyznacz równanie siecznej wyznaczonej przez punkty $x_0= 0$ i $x= 2$.

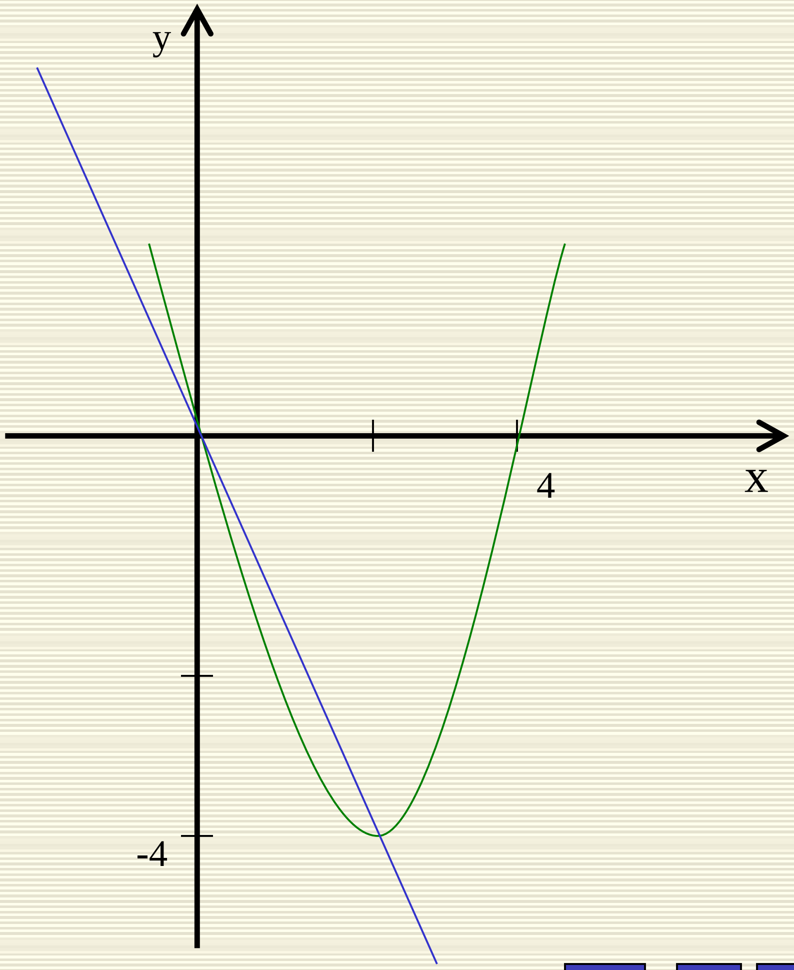
$\Delta x= x- x_0= 2$

$f(x_0)= f(0)= 0$

$f(x)=f(2)= - 4$

$\Delta y= f(x) – f(x_0)= - 4$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4}{2} = -2$$




$y=ax +b$

$-4= -2 \cdot 2 +b$

$b=0$

$y= - 2x$

# Pochodna funkcji w punkcie

- Pierwsza definicja pochodnej funkcji w punkcie
- Druga definicja pochodnej funkcji w punkcie
- Geometryczna interpretacja pochodnej funkcji w punkcie
- Funkcja różniczkowalna w punkcie
- Funkcja różniczkowalna w zbiorze
- Fizyczna interpretacja pochodnej funkcji w punkcie
- Jednostronne pochodne funkcji
- Inne symbole pochodnych

# Pierwsza definicja pochodnej funkcji w punkcie

Iloraz różnicowy funkcji w punkcie można traktować jako funkcję, która każdemu punktowi x z sąsiedztwa punktu $x_0$ przyporządkowuje odpowiadającą mu liczbę. Funkcja ta jest określona w sąsiedztwie punktu $x_0$.

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad D = (x_0 - \varepsilon, x_0 - \varepsilon) \setminus \{x_0\}$$

Funkcja nie jest określona w punkcie $x_0$, ale może mieć w tym punkcie granicę.

**Def.** Granicę ilorazu różnicowego w punkcie $x_0$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-(x_0)}{x-x_0}$$

(o ile istnieje i jest skończona) nazywamy pochodną funkcji f w punkcie $x_0$ i oznaczamy: $f'(x_0)$; są też inne symbole .

$$f'(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

O funkcji, która ma pochodną w punkcie $x_0$ mówimy, że jest różniczkowalna w punkcie $x_0$.

przykład

Wyznacz z definicji pochodną funkcji

$f(x)= 2x - 5$ w punkcie $x_0= 2$.

1. obliczamy wartość funkcji w punkcie $x_0$

$f(x_0)= 2 \cdot 2 - 5= -1$

2. korzystając z definicji

$$f'(x_0) = f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{(2x-5)-(-1)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2x-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x-2)}{(x-2)} = 2$$

Pochodna funkcji w punkcie $x_0=2$ wynosi 2.

# Druga definicja pochodnej funkcji w punkcie

Przyjmując oznaczenia:

$x - x_0 = h$

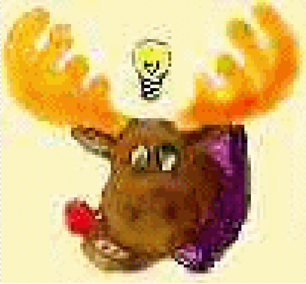
$x = x_0 + h$

$x \to x_0$, a $h \to 0$

i podstawiając do wzoru $f'(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

(z pierwszej definicji) otrzymamy:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 2} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



przykład

Wyznacz z II definicji pochodną funkcji

$f(x)= 2x - 5$ w punkcie $x_0= 2$.

$x = x_0 + h$

$x_0 + h = 2 + h$

$f(x_0 + h)= f(2 + h)= 2(2 = h) – 5= 2h – 1$

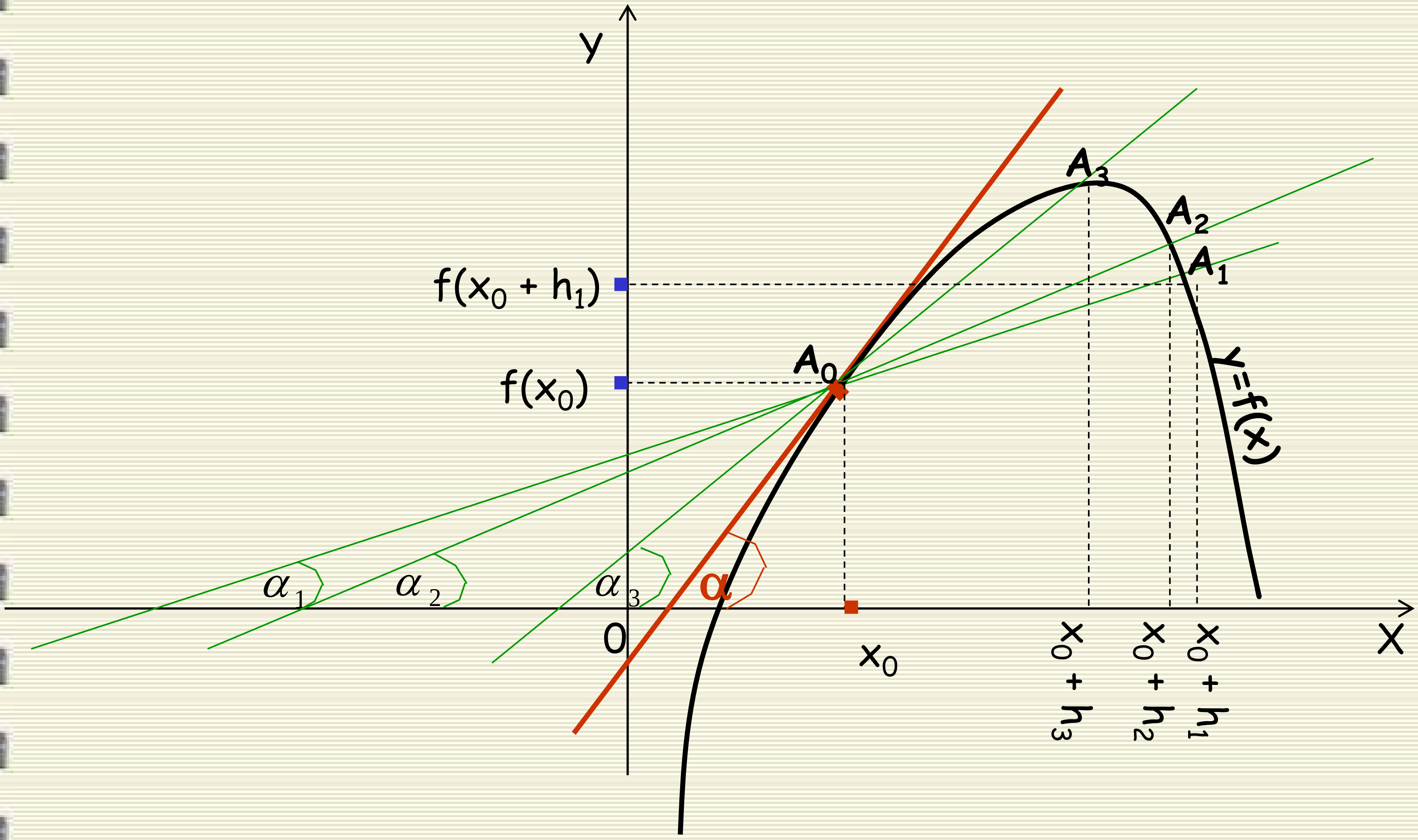
$f(x_0)= -1$

Podstawiając do wzoru:

$$f'(\chi_0) = \lim_{h \to 0} \frac{2h - 1 + 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

Pochodna funkcji w punkcie $x_0=2$ wynosi 2.

# Geometryczna interpretacja pochodnej funkcji w punkcie



Pochodna funkcji $f'(x_0)$ jest równa tangensowi kąta $\alpha$, jaki tworzy z osią OX styczna do wykresu funkcji $y=f(x)$ w punkcie o odciętej $x_0$.

Natomiast równanie stycznej do wykresu funkcji $f= f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$ wynosi:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

# Funkcja różniczkowalna w punkcie $x_0$

Funkcję f zmiennej rzeczywistej określoną w pewnym otoczeniu punktu $x_0$ nazywamy różniczkowalną w punkcie $x_0$ $\Leftrightarrow$ ,gdy istnieje pochodna funkcji f w punkcie $x_0$.

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0$, to jest w tym punkcie ciągła.

$\rightarrow$

Różniczkowalność funkcji f w punkcie $x_0$ badamy obliczając granicę:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

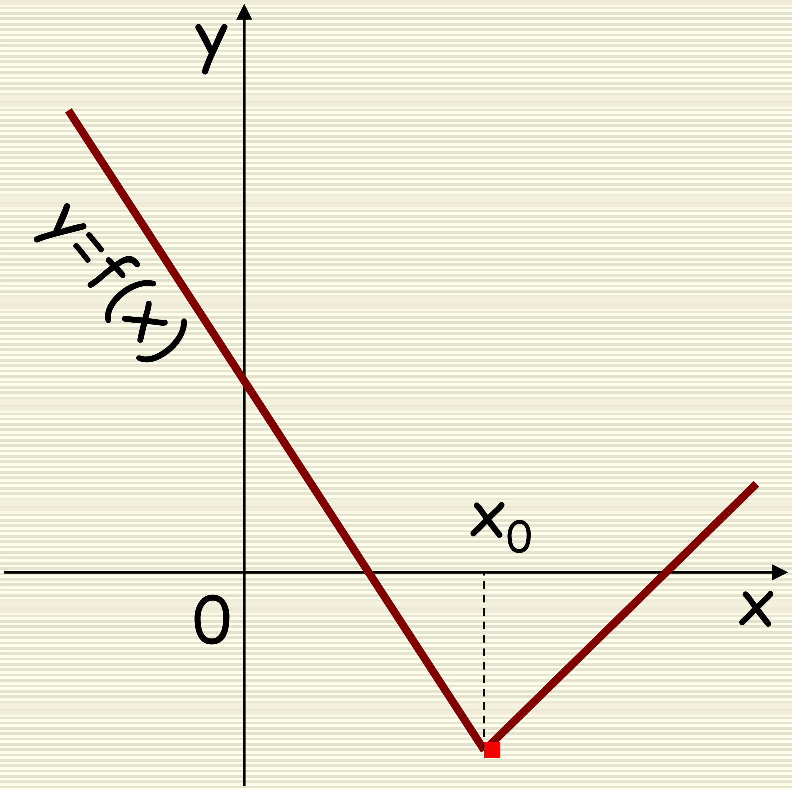
lub obliczając:

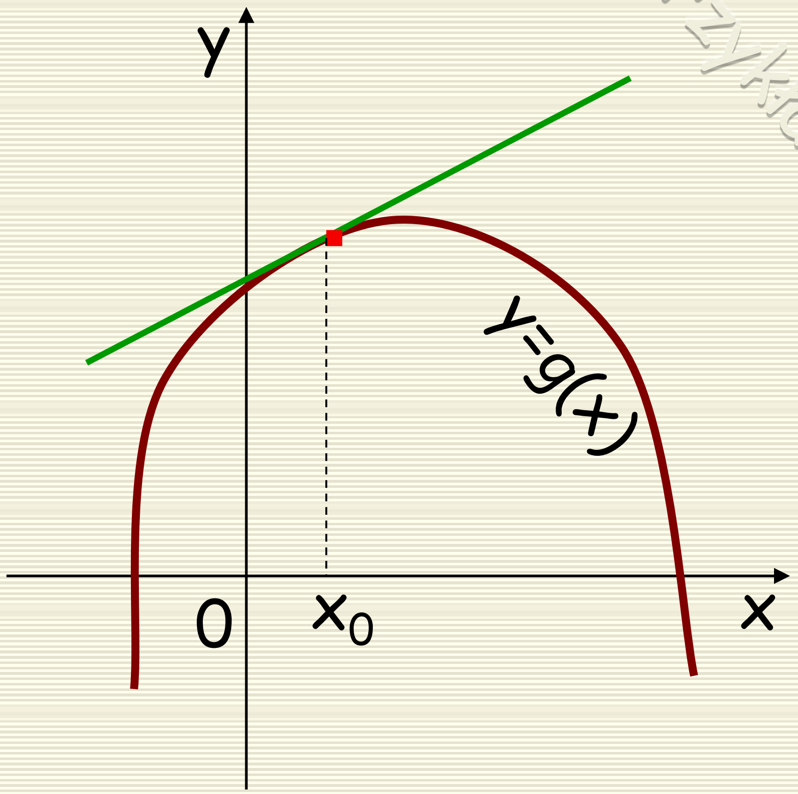
$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) \text{ i}$$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$$

oraz sprawdzając, czy:

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$




Funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0$

Funkcja g jest różniczkowalna w punkcie $x_0$

# Funkcja różniczkowalna w zbiorze

Funkcję f nazywamy różniczkowalną w zbiorze (przedziale), jeżeli jest różniczkowalna w każdym punkcie zbioru przedziału.

# Fizyczna interpretacja pochodnej funkcji w punkcie


Jeżeli punkt p porusza się po osi liczbowej OS i współrzędna s punktu P jest funkcją czasu: s= s(t) oraz $\Delta t \neq 0$ oznacza przyrost czasu, to iloraz różnicowy

$$\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

c.d. →

jest średnią prędkością punktu P między chwilami t i t+ Δt. Granica tego ilorazu, gdy Δt→0 jest prędkością v(t) punktu P chwili t:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)$$

# Jednostronne pochodne funkcji

Jeżeli iloraz różnicowy $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ma granicę jednostronną w punkcie $x_0$, to granicę tę nazywamy pochodną jednostronną funkcji f w punkcie $x_0$ i oznaczamy odpowiednio symbolami:

$f_{+}^{'}\left(x_0\right)$ - pochodna prawostronna lub

$f_{-}^{'}\left(x_0\right)$ - pochodna lewostronna

c.d. →

- pochodna prawostronna

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{x \to x_0^{+}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

-pochodna lewostronna

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{x \to x_0^{-}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Pochodna $f'(x_0)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy ***obie*** pochodne jednostronne istnieją i są sobie równe.

# Inne symbole pochodnych :

a. Lagrange'a : $f'(x)$ oraz $y'$

b. Newtona : $\dot{y}$

c. Leibnitz'a : $\frac{d_y}{d_x}$ oraz $\frac{d_f}{d_x}$

# Podstawowe twierdzenia o obliczaniu pochodnych

- Podstawowe twierdzenia o obliczaniu pochodnych
- Pochodne niektórych funkcji
- Przykład

# Twierdzenia o pochodnych 1

Jeżeli funkcje f(x) i g(x) są różniczkowalne w zbiorze X, to dla każdego $x \in X$ prawdziwe są związki:

$$\left[f(x)+g(x)\right]' = f'(x)+g'(x)$$

$$\left[f(x)-g(x)\right]' = f'(x)-g'(x)$$

$$\left[f(x)\cdot g(x)\right]' = f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)$$

# Twierdzenia o pochodnych 2

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2};$$

gdy $\mathrm{g}(\mathrm{x}) \neq 0$

$$[c\cdot f(x)]' = c\cdot f'(x),\ c \in R$$

# Pochodne niektórych funkcji

| l.p. | Wzór funkcji | Pochodna f(x)' funkcji f | Uwagi |
|---|---|---|---|
| a) | c | 0 | $c \in R$ |
| b) | $x^{n}$ | $n \cdot x^{n-1}$ | $n \in R \setminus \{0,1\}$ |
| c) | $\sqrt{x}$ | $1 \div 2\sqrt{x}$ | x>0 |
| d) | sin x | cos x | - |
| e) | cos x | - sin x | - |
| f) | tg x | $1 \div \cos^2 x$ | $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ dla } k \in C$ |
| g) | ctg x | $-\left(1 \div \sin^2 x\right)$ | $x \neq k\pi \text{ dla } k \in C$ |

przykład

$$f(x)=2\cdot\sqrt[3]{x}+\frac{1}{3}x^3+\sqrt{7}$$

$$f(x)=2x^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{3}x^3+\sqrt{7}$$

$$D: x\in R^+$$

$$f'(x)=\boxed{2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}}+x^2+\frac{1}{2\sqrt{7}}$$

$$f'(x)=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+x^2+\boxed{\frac{1}{2\sqrt{7}}}$$

$$D': x\in R^+\setminus\{0\}$$

O ile jest to możliwe, należy doprowadzić daną funkcję do najprostszej postaci, a następnie wyznaczyć jej dziedzinę. Korzystając ze wzorów i twierdzeń prezentowanych na stronach 25 - 27 obliczamy pochodną funkcji. Tutaj zastosowano wzory

b)

i c).

Wyliczoną pochodną należy uporządkować i wyznaczyć jej dziedzinę.

# Druga pochodna funkcji

- Definicja drugiej pochodnej
- Fizyczna interpretacja drugiej pochodnej
- Przykład

# Druga pochodna

Jeżeli funkcja pochodna f' jest różniczko-walna, to pochodną funkcji f' nazywamy drugą pochodną funkcji f i oznaczamy symbolem f''.

$$f''(x) = (f')'(x)$$

Analogicznie określamy pochodne wyższych rzędów.

# Fizyczna interpretacja drugiej pochodnej

Przyśpieszenie a(t) jest pochodną prędkości względem czasu, czyli jest drugą pochodną drogi względem czasu.

$$a(t) = v'(t), \text{ czyli}$$

$$a(t) = s''(t) \quad (s''(t) = v(t))$$

przykład

Oblicz drugą pochodną funkcji $f(x)= 3x^4 - 2x^2 + 5x$

$f(x)= 3x^4 - 2x^2 + 5x$ , $D=R$

$f'(x)=12x^3 - 4x + 5$ ,$D'=R$

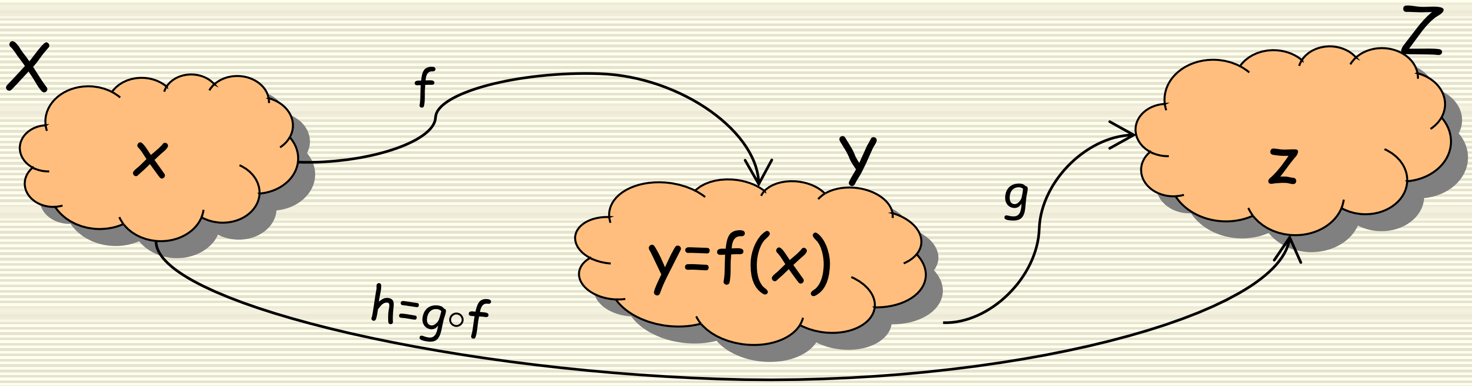
$f''(x)= f'[f'(x)]$

$f''(x)= 36x^2 - 4$ ,$D''=R$

# Pochodna funkcji złożonej

- Złożenie funkcji
- Przykład
- Twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej
- Przykład

# Złożenie funkcji




Niech dane będą funkcje f i g takie, że f:x→y i g:x→z. Uporządkowana para funkcji (f,g) wyznacza nową funkcję zwaną złożeniem (superpozycją) funkcji f i g. Funkcja h:x→z

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

Składanie funkcji nie jest przemienne: $f \circ g \neq g \circ f$

przykład

Wyznacz złożenie funkcji $f \circ g$ i $g \circ f$, gdy $g(x)= x^2$ i $f(x)= 2x - 1$.

- $g \circ f= g[f(x)] = g(2x - 1)=$

  $=(2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$

- $f \circ g= f[g(x)] = f(x^2) = 2x^2 - 1$

# Twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej

**<u>Tw.</u>** Jeżeli funkcja h jest złożeniem funkcji f i g, oraz funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x, a funkcja g jest różniczkowalna w punkcie f(x), to funkcja h jest różniczkowalna w punkcie x i zachodzi

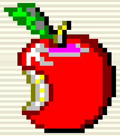
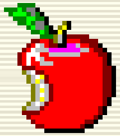
$$h'(x)=g'[f(x)] \cdot f'(x)$$

Oznacza to ,że aby policzyć pochodną funkcji złożonej należy pomnożyć przez siebie pochodną funkcji wewnętrznej i zewnętrznej.

przykład

Oblicz pochodną funkcji :

a) $f(x) = (3x - 1)^{2001}$

( (  )$^{n}$ )$'$ = n (  )$^{n-1}$

$f'(x) = 2001\,(3x - 1)^{2000}\,3$

Stosujemy metodę jabłuszek →

Stosujemy „metodę jabłuszek", to znaczy, że w punkcie a)

1) Obliczamy pochodną z wyrażenia

$3x - 1$ w wewnętrznym nawiasie

2) Będzie to nasze jabłuszko

3) Obliczamy pochodną „zewnętrzną"

z czerwonej elipsy i mnożymy

ją przez wartość jabłuszka

przykład

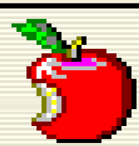
b) $f(x)= 2\sin^5(x^2 + 2x)$

$f'(x)= 2\sin^4(x^2 + 2x)\cos(x^2 + 2x)(2x +2)$

c) $f(x)= \sin 4x$

$f'(x)= 4\cos 4x$

d) $f(x)= \sqrt{x^2+5x}$

$f(x)= \sqrt{\phantom{xx}}$ 

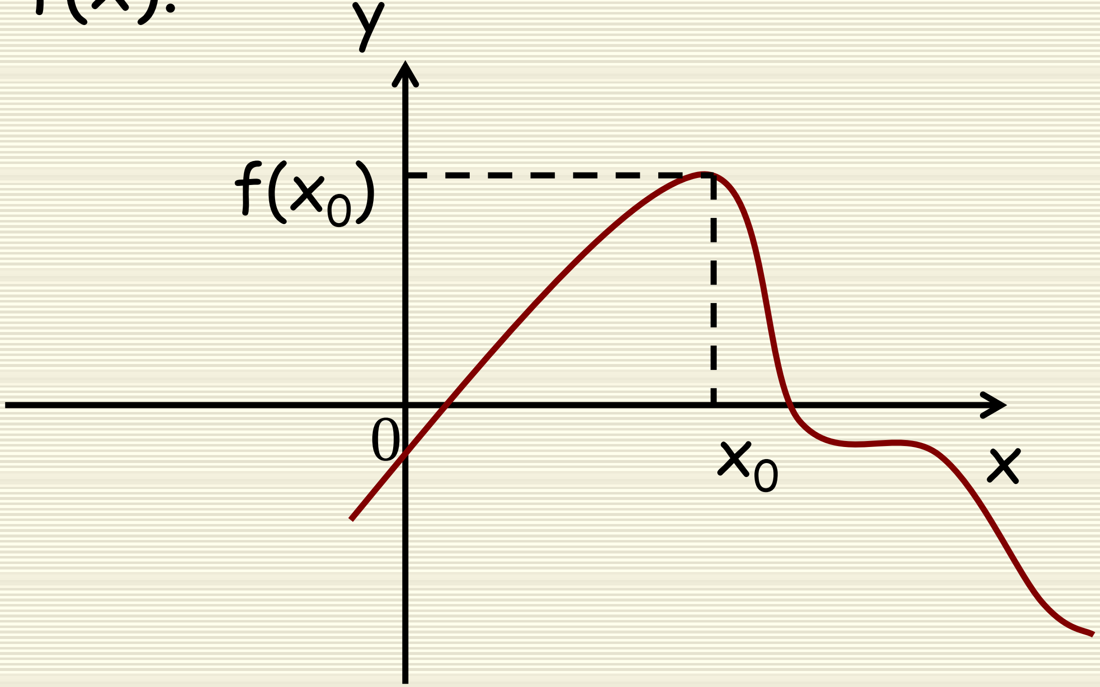
$$f'(x)=\frac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5}}$$

# Ekstrema funkcji różniczkowalnej


- Definicja maksimum funkcji
- Maksimum lokalne funkcji
- Definicja minimum funkcji
- Minimum lokalne funkcji
- Uwagi o ekstremach funkcji
- Ekstrema funkcji różniczkowalnej
- Przykład

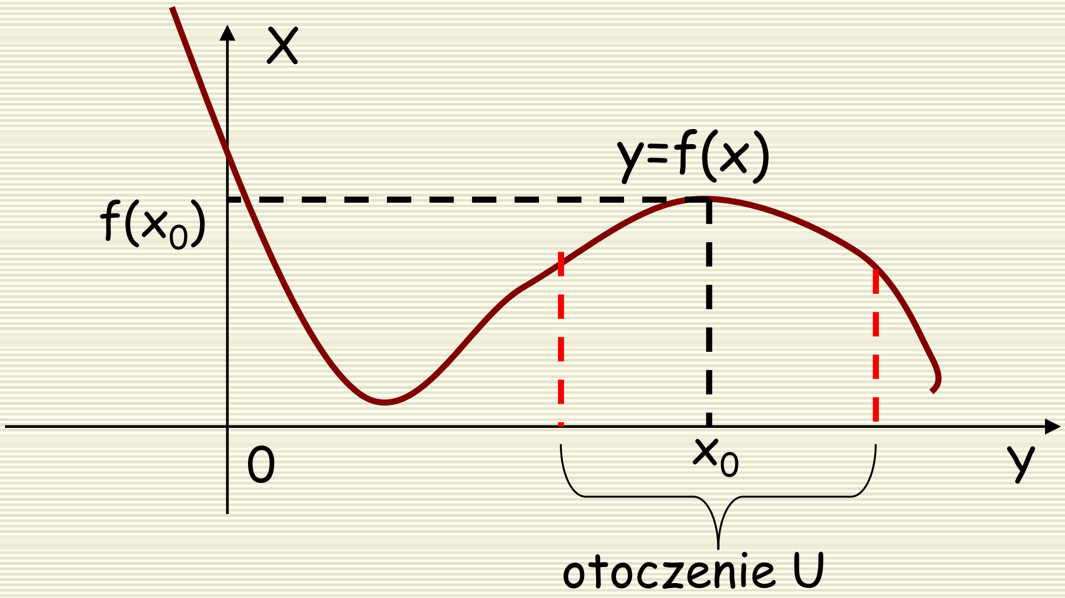

# Definicja maksimum funkcji

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0$ maksimum, jeśli dla dowolnego punktu x z sąsiedztwa punktu $x_0$ jest spełniony warunek $f(x_0) > f(x)$.



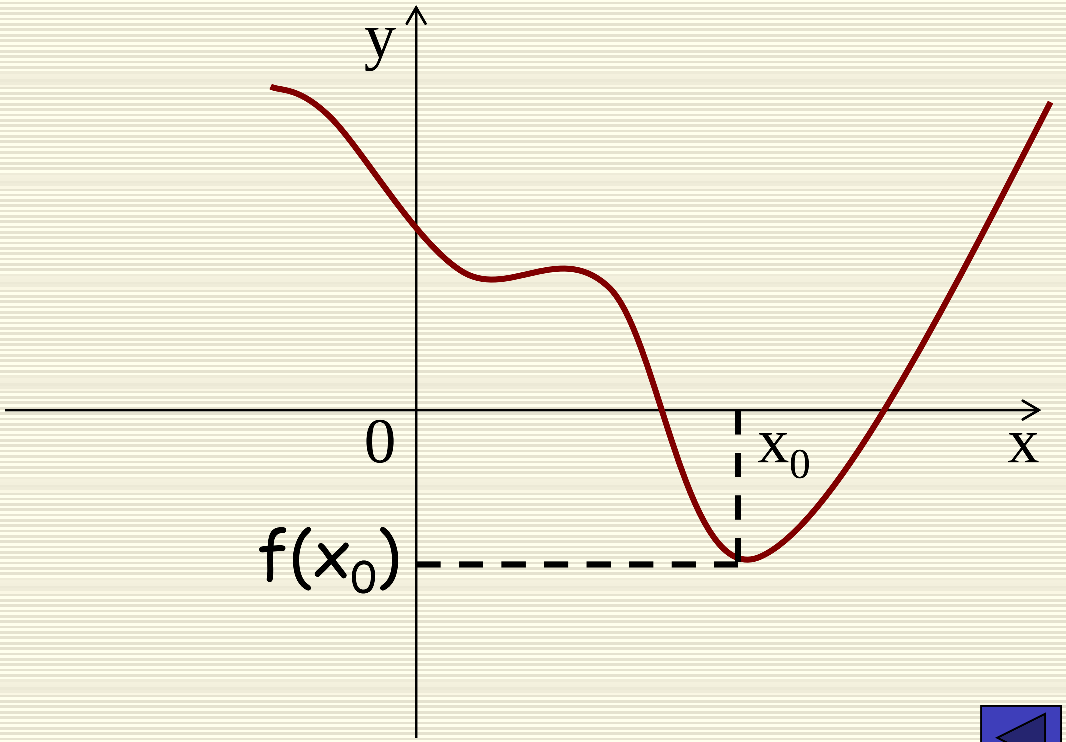
# Maksimum lokalne funkcji

Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$ maksimum lokalne równe $f(x_0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje otoczenie U punktu $x_0$ takie, że dla każdego $x \in U \cap D_f$ i $x \neq x_0$ spełniona jest nierówność $f(x) < f(x_0)$ .



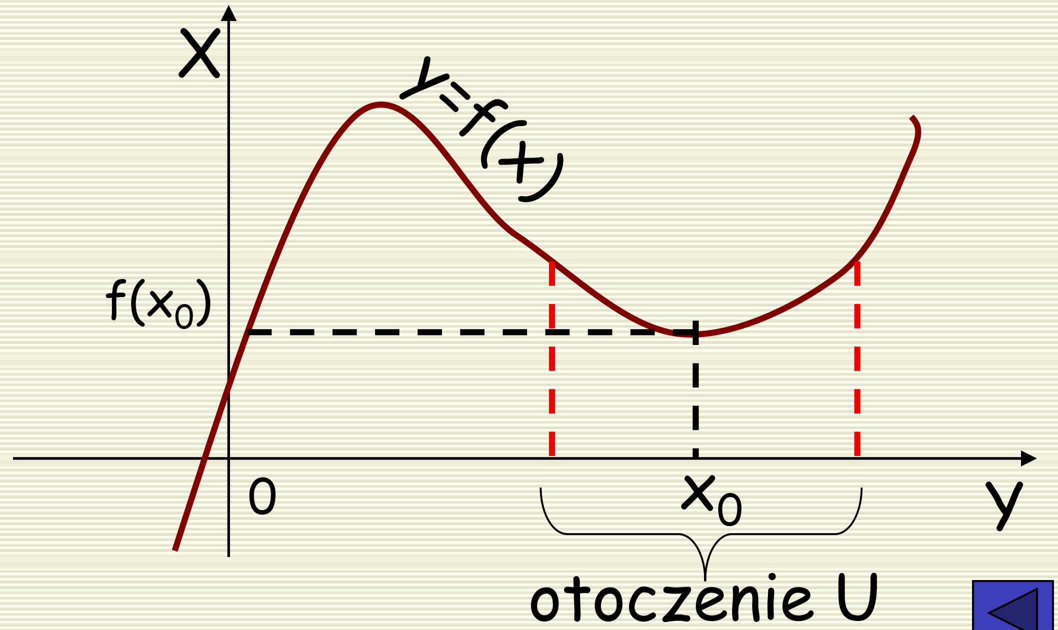
# Definicja minimum funkcji

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0$ minimum, jeśli dla dowolnego punktu x z sąsiedztwa punktu $x_0$ jest spełniony warunek $f(x_0) < f(x)$.



# Minimum lokalne funkcji

Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$ maksimum lokalne równe f($x_0$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje otoczenie U punktu $x_0$ takie, że dla każdego $x \in U \cap D_f$ i $x \neq x_0$ spełniona jest nierówność f(x) > f($x_0$) .



# Uwagi o ekstremach funkcji

1. Funkcja może nie mieć ekstremów, posiadać tylko jedno lub więcej.
2. Pojęcie minimum i maksimum funkcji jest czymś różnym od pojęcie wartości największej i największej.

# Ekstrema funkcji różniczkowalnej

1. *Twierdzenie Fermata*

*(warunek konieczny istnienia ekstremum):*

Jeżeli funkcja f:D→ R jest różniczkowalna i ma w punkcie $x_0$ ekstremum, to pochodna funkcji w tym punkcie musi być równa zero.

$$f'(x_0)=0$$

c.d.→

## 2. *Warunki wystarczający istnienia ekstremum*

a) Jeżeli funkcja f:D→ R jest różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu $x_0$ i zachodzi

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ dla } x < x_0 \\ f'(x) < 0 \text{ dla } x > x_0 \end{cases}$$

to funkcja f ma w punkcie $x_0$ maksimum.

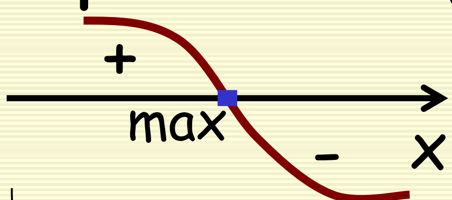
b) Jeżeli funkcja f:D→ R jest różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu $x_0$ i zachodzi

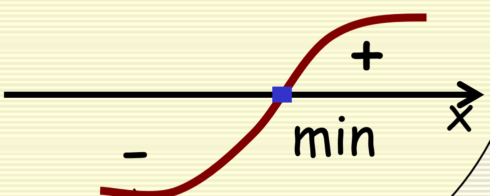
$$\begin{cases} f'(x) < 0 \text{ dla } x < x_0 \\ f'(x) > 0 \text{ dla } x > x_0 \end{cases}$$

to funkcja f ma w punkcie $x_0$ minimum.

c.d.→

Oznacza to, że jeśli pochodna funkcji f w punkcie $x_0$ zmienia znak z „+" na „-" to ma w punkcie $x_0$ maksimum. Jeśli zmienia znak z „-" na „+" to ma w punkcie $x_0$ minimum.



# Wyznacz ekstrema funkcji $f(x) = x^2 - 4x$, $D=R$

1. wyznaczamy pochodną funkcji

$$f'(x)= 2x - 4\ ,\ D'=R$$

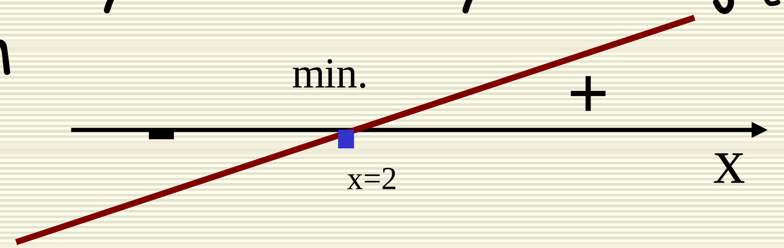
2. Sprawdzamy warunek konieczny istnienia ekstremum

$$f''(x)= 0$$

$$2x - 4 =0$$

$$x= 2$$

3. Sprawdzamy warunek wystarczający istnienia ekstremum




Funkcja posiada minimum w punkcie

$x=2$, $y_{min}= f(2)= - 4$

# Najmniejsza i największa wartość funkcji w przedziale

Na mocy twierdzenia Weierstrassa każda funkcja ciągła osiąga w przedziale domkniętym wartość najmniejszą i największą. Wartości tych poszukujemy na końcach przedziału i w ekstremach.

Nie ma to, na ten przykład, jak dobry przykład.

☺

przykład

Zadanie. Wyznacz największą i najmniejszą wartość $f(x)=x^2-4x$ w przedziale $x \in \langle -1, 3 \rangle$ .

1). Obliczamy wartości funkcji na końcach przedziału

$f(x)= x^2 - 4x$

$f(-1)= (-1)^2 - 4(-1)$

$f(-1)= 5$

$f(3)= 3^2 - 4 \cdot 3$

$f(3)= -3$

2) Wyznaczamy ekstrema funkcji

c.d.→

# 2) Wyznaczamy ekstrema funkcji

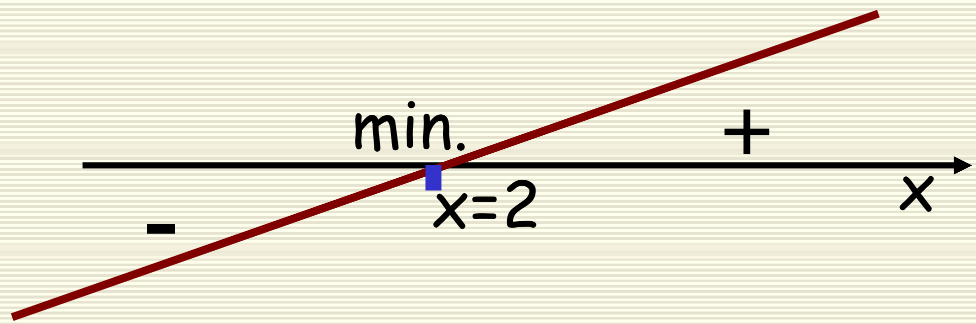
$f(x) = x^2 - 4x$

$f'(x) = 2x - 4$

$f'(x) = 0$

$2x - 4 = 0$

$x = 2$




$y_{min} = f(2)$

$y_{min} = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$

Odp. Funkcja osiąga największa wartość y= 5 w punkcie x= -1 , a wartość najmniejszą w równą y= -4 w punkcie x= 2.

# Monotoniczność funkcji

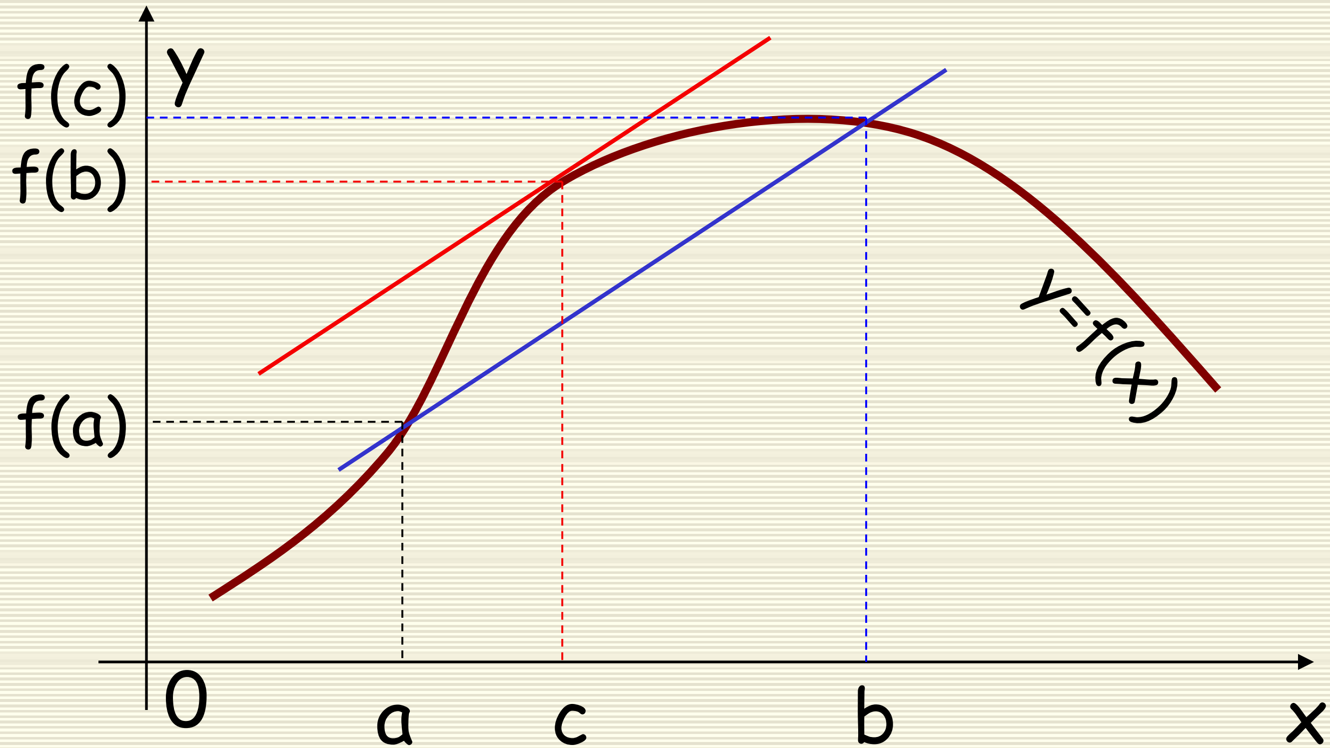
- Twierdzenie Langrange'a o wartości średniej
- Twierdzenie Rolle'a
- Twierdzenie Langrange'a
- Wnioski z twierdzeń
- Uwagi o monotoni - czności funkcji

# Twierdzenie Langrange'a o wartości średniej

Jeżeli funkcja y=f(x) jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a,b \rangle$ i różniczkowalna w przedziale (a,b), to istnieje taki punkt $c \in (a,b)$ ,że

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

→

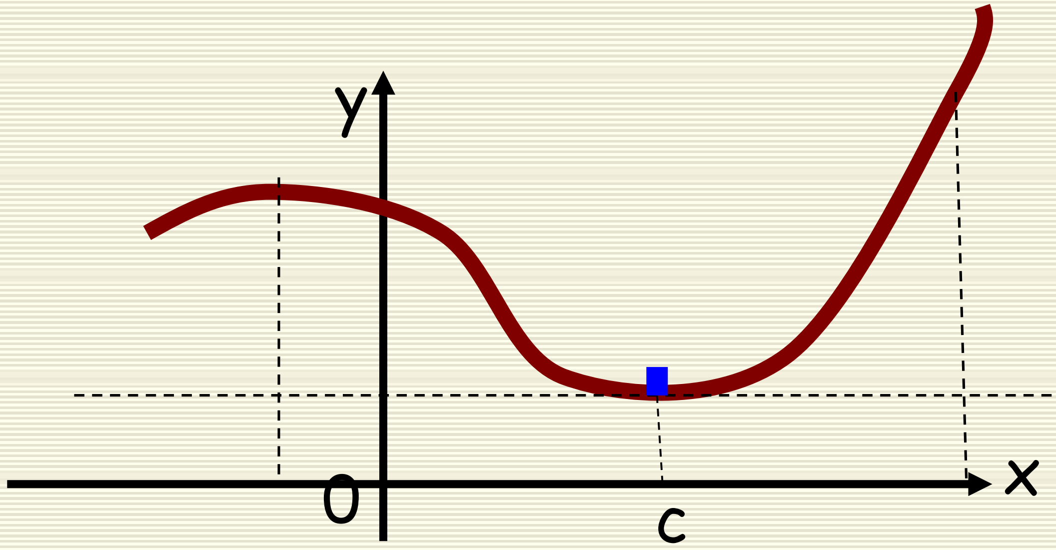



Styczna do wykresu funkcji f w punkcie (c, f(c)) jest równoległa do siecznej przechodzącej przez punkty (a, f(a)) i (b, f(b)).

# Twierdzenie Rolle'a

Jeżęli funkcja f(x) jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a,b\rangle$ , ma pochodną f'(x) w przedziale otwartym (a,b) oraz f(a)= f(b) to istnieje taki punkt $c\in\left(a,b\right)$ , że

$$f'(c)=0$$



# Twierdzenie Langrange'a

Jeżeli funkcja f(x) jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$ i różniczkowalna w prze - dziale otwartym (a,b), to istnieje taki punkt $c \in (a,b)$ , że

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

# Wnioski z twierdzeń

1. Funkcja y=f(x) jest różniczkowalna w przedziale (a,b), to dla każdego $x \in (a,b)$ :

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow$ funkcja f jest stała w przedziale (a,b)
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow$ funkcja f jest rosnąca w przedziale (a,b)
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow$ funkcja f jest malejąca w przedziale (a,b)

2. Wnioski są prawdziwe dla przedziałów

$$(-\infty, b), (a, \infty), (-\infty, \infty)$$

i stanowią różniczkowe kryterium badania monotoniczności funkcji.

# Uwagi o monotoniczności funkcji

***Twierdzenie***: Jeżeli funkcja f(x) jest rosnąca i różniczkowalna w pewnym przedziale otwartym (a,b) , to jej pochodna f'(x) jest w tym przedziale dodatnia z wyjątkiem skończonej liczby punktów w których przyjmuje wartość zero.

***Twierdzenie***: Jeżeli funkcja f(x) jest malejąca i różniczkowalna w pewnym przedziale otwartym (a,b) , to jej pochodna f'(x) jest w tym przedziale ujemna z wyjątkiem skończonej liczby punktów w których przyjmuje wartość zero.

# Wklęsłość i wypukłość funkcji

- Wklęsłość funkcji
- Wypukłość funkcji
- Punkt przegięcia wykresu funkcji

# Wklęsłość funkcji

Zakładamy, że funkcja f(x) ma w przedziale (a,b) ciągłą drugą pochodną.

Def. Krzywą y=f(x) nazywamy wypukłą w przedziale (a,b) , jeżeli dla każdego $x \in (a,b)$ styczna do tej krzywej poprowadzona w punkcie o odciętej $x_0$ leży nad tą krzywą.

Tw: Jeśli f''(x)<0 dla każdego $x \in (a,b)$ to krzywa jest wypukła w przedziale (a,b).

# Wypukłość funkcji

Zakładamy, że funkcja f(x) ma w przedziale (a,b) ciągłą drugą pochodną.

Def. Krzywą y=f(x) nazywamy wypukłą w przedziale (a,b) , jeżeli dla każdego $x \in (a,b)$ styczna do tej krzywej poprowadzona w punkcie o odciętej $x_0$ leży pod tą krzywą.

Tw: Jeśli f''(x)>0 dla każdego $x \in (a,b)$ to krzywa jest wypukła w przedziale (a,b).

# Punkt przegięcia wykresu funkcji

Punkt $P_O(x_O, f(x_O)), x_O \in (a,b)$ nazywamy punktem przegięcia wykresu funkcji y=f(x) , jeżeli istnieje taka liczba $\delta > 0$ , że wykres jest wypukły w przedziale $(x_{0,}\delta - x_0)$ a wklęsły w przedziale $(x_{0,}\delta + x_0)$ albo odwrotnie.

→

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to aby punkt $P_0(x_0, f(x_0)),\ x_0 \in (a,b)$ był punktem przegięcia krzywej y=f(x), jest:

f''(x)<0 dla x<$x_0$, f''($x_0$)=0, f''(x)>0 dla x>$x_0$

lub

f''(x)>0 dla x<$x_0$, f''($x_0$)=0, f''(x)<0 dla x>$x_0$

# Reguła de L'Hôspitala

- Zastosowanie
- Twierdzenie de L'Hôspitala
- Pomocne twierdzenia (1) , (2) , (3)
- Elsiowa porada
- Elsiowa podpowiedź

# Zastosowanie reguły

Regułę de L'Hôspitala stosujemy przy obliczaniu granic funkcji w przypadkach, gdy stosowanie własności arytmetycznych funkcji prowadzi do otrzymania wyrażeń nieoznaczonych typu:

a. $0/0$

b. $\infty/\infty$

c. $0 \cdot \infty$

d. $0^0$

e. $\infty^0$

f. $1^\infty$

g. $\infty - \infty$

# Twierdzenie de L'Hôspitala



Jeśli funkcje f i h są określone i różniczkowalne w sąsiedztwie punktu $x_0$ oraz $h(x) \neq 0 \text{ i } h'(x) \neq 0$ i zachodzi jeden z warunków:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 0$ lub

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \mp\infty$

oraz →

istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{h'(x)}{f'(x)} = m$ ,to

istnieje również granica

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = m$$

Reguła ta obowiązuje też dla granic jednostronnych, granic w nieskończoności, i w przypadku granicy niewłaściwej rozpatrywanego ilorazu. Inna nazwa tej zależności to reguła L'Hôspitala - Bernoullego.

# Pomocne twierdzenia 1

1. Wyrażenia typu $0 \cdot \infty$ przekształca się na wyrażenia typu $0/0$ lub $\infty/\infty$ za pomocą tożsamości:

$$f \cdot h = \frac{f}{1/h} = \frac{h}{1/f}$$

# Pomocne twierdzenia 2

2. Wyrażenia typu $\infty - \infty$ przekształca się na wyrażenia typu $0/0$ za pomocą tożsamości:

$$f - h = \frac{\frac{1}{h} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f \cdot h}}$$

# Pomocne twierdzenia 3

3. Wyrażenia typu $0^0$ , $\infty^0$ , $1^\infty$ przekształca się na wyrażenia typu

$0 \cdot \infty$ za pomocą tożsamości:

$$f^h = e^{h \cdot \ln f}$$

przykład

$$\lim_{x\to 0} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{3x} \underset{H}{=}$$

$$\underset{H}{=} \lim_{x\to 0} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{3} = \frac{2}{3}$$

Litera ‘H’ pod znakiem równości oznacza powołanie się na regułę de L’Hôspitala

$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \cdot \ln x}$ ,ponieważ wykładnik potęgi jest wyrażeniem typu $0 \cdot \infty$ i po zastosowaniu odpowiedniego przekształcenia spełnia założenia reguły de L'Hôspitala.

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} \underset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$ ,zatem

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = e^0 = 1$$

przykład

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} x^{\frac{\ln x}{x-1}}$$, ponieważ

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \underset{H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{x^{-1}}{1} = 1$$, zatem

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e^{1} = e$$

# Elsiowa porada

Przed zastosowaniem reguły de L'Hôspitala należy dokładnie sprawdzić WSZYSTKIE założenia twierdzenia, a zwłaszcza czy istnieje granica ilorazu pochodnych.

# Elsiowa podpowiedź


R. de L'H można zastosować przy obliczaniu granic:

$$\lim_{x\to 0} = \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \ \ (\mathrm{a} > 0)$$

$$\lim_{x\to \infty} = \frac{x^p}{a^x} = 0 \ \ (\mathrm{p} > 0, \mathrm{a} > 1)$$

oraz →

przy obliczaniu

$$\lim_{x\to 0} = \frac{arc\sin x}{\mathrm{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} = x \cdot \ln x = 0$$

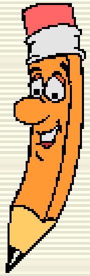
$$\lim_{x\to 0} = x^{\frac{1}{x}} = 1$$

# Informacje o autorze


Prezentację wykonała:

*Anna Baryła IVB*

E-mail:



*ania991@poczta.wp.pl*


Pracę skończono:

*28 lutego 2002*

# Pokazy niestandardowe

Każdy z tych pokazów odpowiada jednemu tematowi w zeszycie.

- Iloraz różnicowy funkcji w punkcie
- Pochodna funkcji w punkcie
- Podstawowe twierdzenia o obliczaniu pochodnych
- Druga pochodna funkcji
- Pochodna funkcji złożonej
- Ekstrema funkcji różniczkowalnej
- Najmniejsza i największa wartość funkcji w przedziale
- Monotoniczność funkcji
- Wklęsłość i wypukłość funkcji
- Reguła de L'Hôspitala