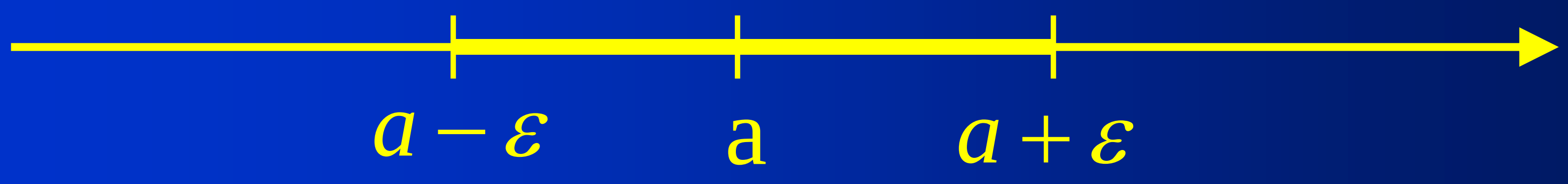
Przygotował - Piotr Gumienny

GRANICA CIĄGU LICZBOWEGO

Weźmy pod uwagę prostą (oś liczbową) na której zaznaczono punkt a i dowolną liczbę $\varepsilon > 0$

DEFINICJA

Przedział otwarty $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ nazywamy otoczeniem punktu a.



Przykład

Otoczeniem punktu a=3

o promieniu $\varepsilon=0,5$ jest przedział (2,5;3,5)
o promieniu $\varepsilon=0,1$ jest przedział (2,9;3,1)
o promieniu $\varepsilon=0,01$ jest przedział (2,99;3,01)

Zwrot:

„prawie wszystkie wyrazy ciągu”

odnosi się do ciągów nieskończonych i oznacza tyle, co wszystkie wyrazy ciągu z wyjątkiem (oprócz) **skończonej** ich liczby.

Przykład
Prawie wszystkie liczby naturalne są więcej niż trzycyfrowe.

Liczb naturalnych jedno-, dwu- i trzycyfrowych jest 999 (jeśli z 0, to 1000). Jest ich zatem skończona ilość.
Powyższe zdanie jest zatem prawdziwe.

Przykład

Prawie wszystkie liczby naturalne są nieparzyste.

Liczb naturalnych parzystych jest nieskończenie wiele, zatem powyższe zdanie jest fałszywe.

Rozważmy ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \dfrac{2n+1}{n}$

Wyznaczmy kilka początkowych jego wyrazów

$$a_1 = \frac{2\cdot 1+1}{1} = 3$$

$$a_2 = \frac{2\cdot 2+1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$a_3 = \frac{2\cdot 3+1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$a_4 = \frac{2\cdot 4+1}{4} = \frac{9}{4}$$

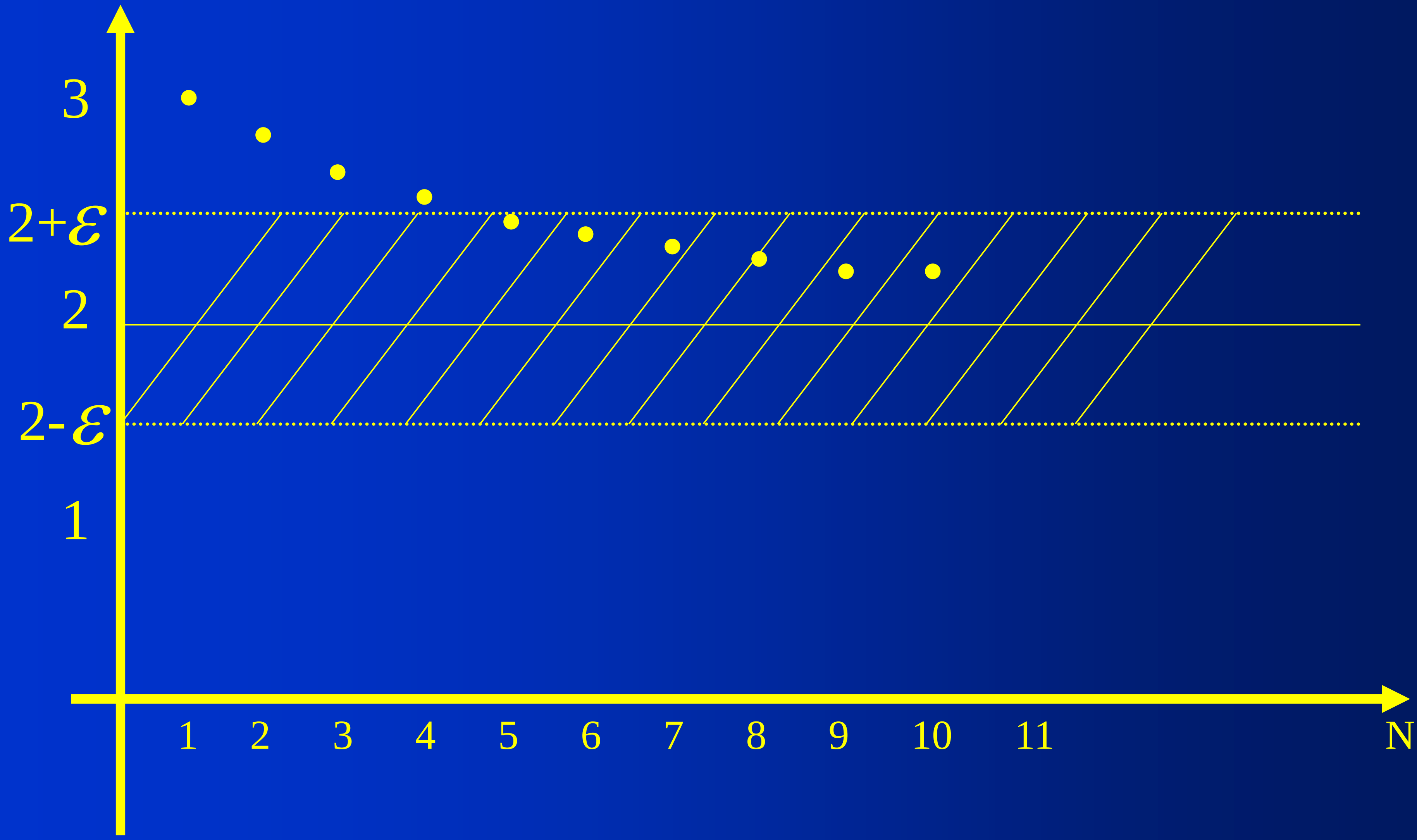
$$a_5 = \frac{2\cdot 5+1}{5} = \frac{11}{5}$$

$$a_6 = \frac{2\cdot 6+1}{6} = \frac{13}{6}$$

$$a_7 = \frac{2\cdot 7+1}{7} = \frac{15}{7}$$

$$a_8 = \frac{2\cdot 8+1}{8} = \frac{17}{8}$$

I sporządźmy jego wykres



Zauważmy, że do dowolnego otoczenia liczby 2 należą prawie wszystkie wyrazy ciągu.

Inaczej mówiąc: dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie n_0, że po skreśleniu n_0 początkowych wyrazów ciągu wszystkie następne będą należały do epsylonowego otoczenia punktu 2.

(dla naszego przykładu $n_0 = 4$)

O liczbie 2 powiemy, że jest granicą tego ciągu.

<u>DEFINICJA</u>

Mówimy, że liczba a jest granicą ciągu a_n jeśli do dowolnego otoczenia liczby a należą prawie wszystkie wyrazy ciągu a_n.

Piszemy: $$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

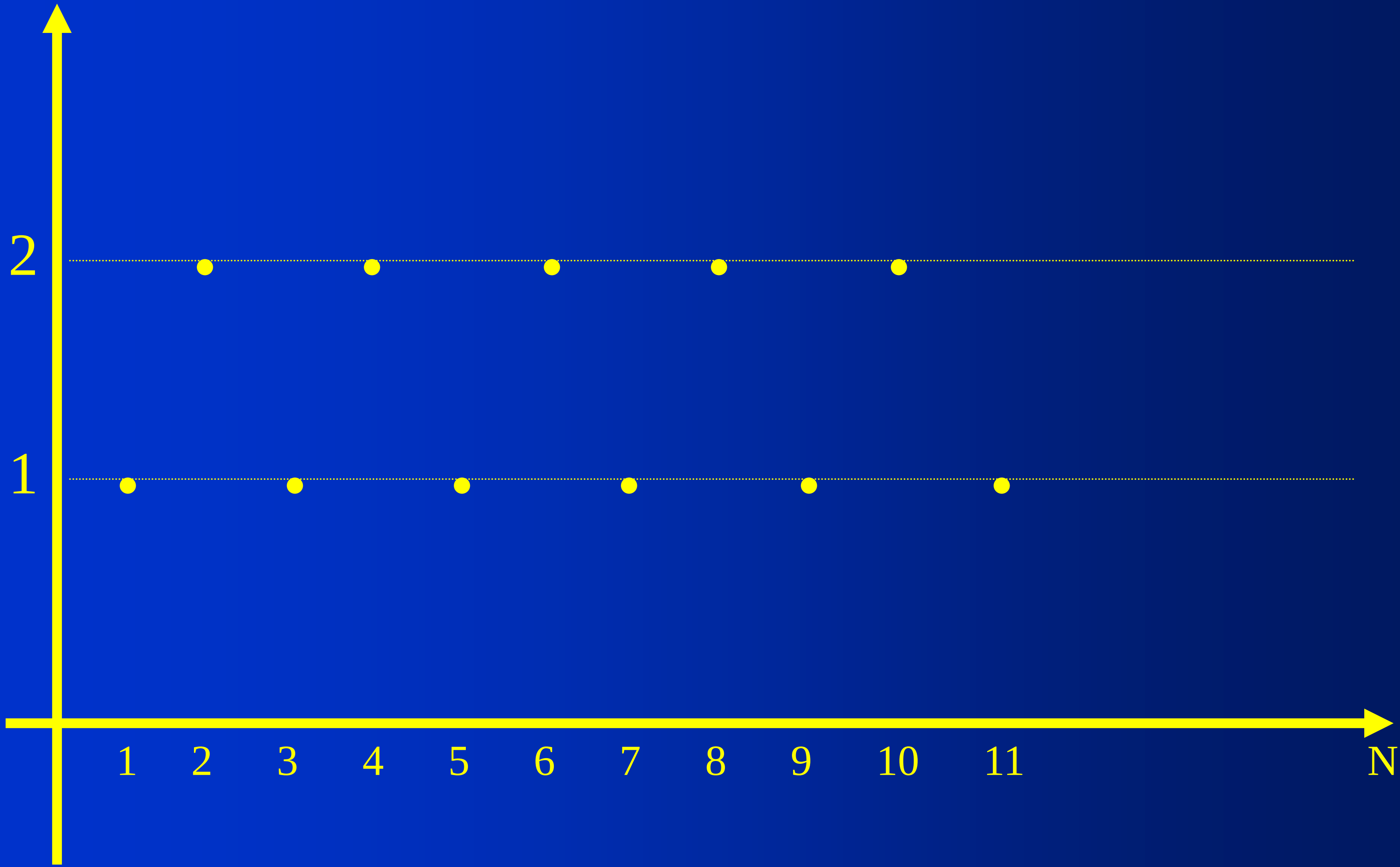
lim - limes - granica (łac.)

Ciąg, który ma granicę nazywamy zbieżnym.

Definicję tę można zapisać następująco:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0}{\exists}\ \underset{n>n_0}{\forall}\ |a_n - a| < \varepsilon$$

Nie każdy jednak ciąg ma granicę, co ilustruje poniższe przykład



Aby pokazać z definicji, że ciąg a_n ma granicę trzeba wykazać, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba n_0 taka, że wszystkie wyrazy ciągu a_n o wskaźnikach n> n_0 należą do epsylonowego otoczenia punktu a (granicy) tj. spełniają warunek $|a_n - a| < \varepsilon$

Przykład

Wykaż z definicji, że granicą ciągu $a_n = \dfrac{1}{n}$ jest liczba 0.

Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wtedy

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$$

$$|n| > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Znaleźliśmy taką liczbę n_0 ($n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$), że jeśli tylko n> n_0 , to do epsylonowego otoczenia liczby 0 będą należały wszystkie wyrazy ciągu o wskaźnikach większych od n_0 .

Na przykład
Jeśli ε=0,02, to n_0=50 i począwszy od 51 wszystkie wyrazy ciągu będą należały do otoczenia o promieniu ε=0,02.

Jak widać wykazywanie istnienia granicy z definicji jest kłopotliwe i ponadto wymaga „trafienia” w odpowiednią liczbę (granicę).

O wiele wygodniej jest posługiwać się twierdzeniami ułatwiającymi obliczanie granic.

Własności ciągów zbieżnych

Twierdzenie

Każdy ciąg może mieć co najwyżej jedną granicę.

Twierdzenie

Granicą ciągu stałego $(a, a, a \ldots)$ jest liczba a

$$\lim_{n\to\infty} a = a$$

Twierdzenie

(o działaniach arytmetycznych na granicach)

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} = a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a + b$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a - b$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$; $b_n \neq 0$ i $b \neq 0$

Twierdzenie

(o wyłączaniu stałej przed znak granicy)

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $k \in \mathrm{R}$, to:

$$\lim_{n\to\infty}(k \cdot a_n) = k \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = k \cdot a$$

Twierdzenie

(o zachowaniu nierówności)

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = b$

oraz $a_n \geq b_n$, to: $\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} b_n$

Twierdzenie

Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

(twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe,
tzn. nie każdy ciąg ograniczony jest zbieżny
np. $a_n = (-1)^n = (-1 , 1 , -1 , 1 , \ldots)$

Twierdzenie

(o trzech ciągach)

Jeżeli $a_n \leq b_n \leq c_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = b$,

to (b_n) jest zbieżny oraz zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

Twierdzenie

a) Jeżeli $a_n \to a$ to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

A teraz parę przykładów

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=\lim_{n\to\infty}(3\cdot\frac{1}{n})=3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=3\cdot 0=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}(2\cdot\frac{1}{n^2})=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=2\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n})=$$

$$2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=2\cdot 0\cdot 0=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2} \overset{(!)}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2+2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n^2}} =$$

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n^2})} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

(!) Jeżeli chcemy obliczyć granicę ciągu (a_{n}) , którego wzór ogólny dany jest ilorazem, należy podzielić licznik i mianownik przez najwyższą potęgę mianownika.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{2n^2+3} \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+n}{2}}{2n^2+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{4n^2+6} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{4+\frac{6}{n^2}} = \frac{1}{4}$$

(*) zauważmy, że w liczniku mamy sumę n-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

$$S_n = \frac{1+n}{2}\cdot n = \frac{n^2+n}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = ?$$

Skorzystamy z twierdzenia o trzech ciągach

Weźmy ciągi $a_n = 0 \quad i \quad c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}$

Zauważmy, że $a_n \leq \quad b_n \quad \leq c_n$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} & \leq & \frac{1}{n} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

Zatem szukaną granicą ciągu jest liczba 0

Aby dowiedzieć się więcej...

- *poczytaj literaturę*
- *rozwiąż parę zadań samodzielnie*
- *przyjdź na konsultacje*

I to by było na tyle ...