FUNKCJA JEDNEJ ZMIENNEJ

DEFINICJA

Niech dane będą dwa niepuste zbiory X i Y.

Jeżeli <u>każdemu</u> elementowi $x \in X$ przyporządkujemy <u>dokładnie jeden</u> element $y \in Y$ to mówimy, że na zbiorze X została określona funkcja o wartościach w zbiorze Y.

Piszemy:

$f: X \to Y$

$x \to y = f(x)$

f- symbol funkcji

x- argument funkcji

y - wartość funkcji w pkt. x

X- zbiór argumentów (dziedzina)

Y- przeciwdziedzina

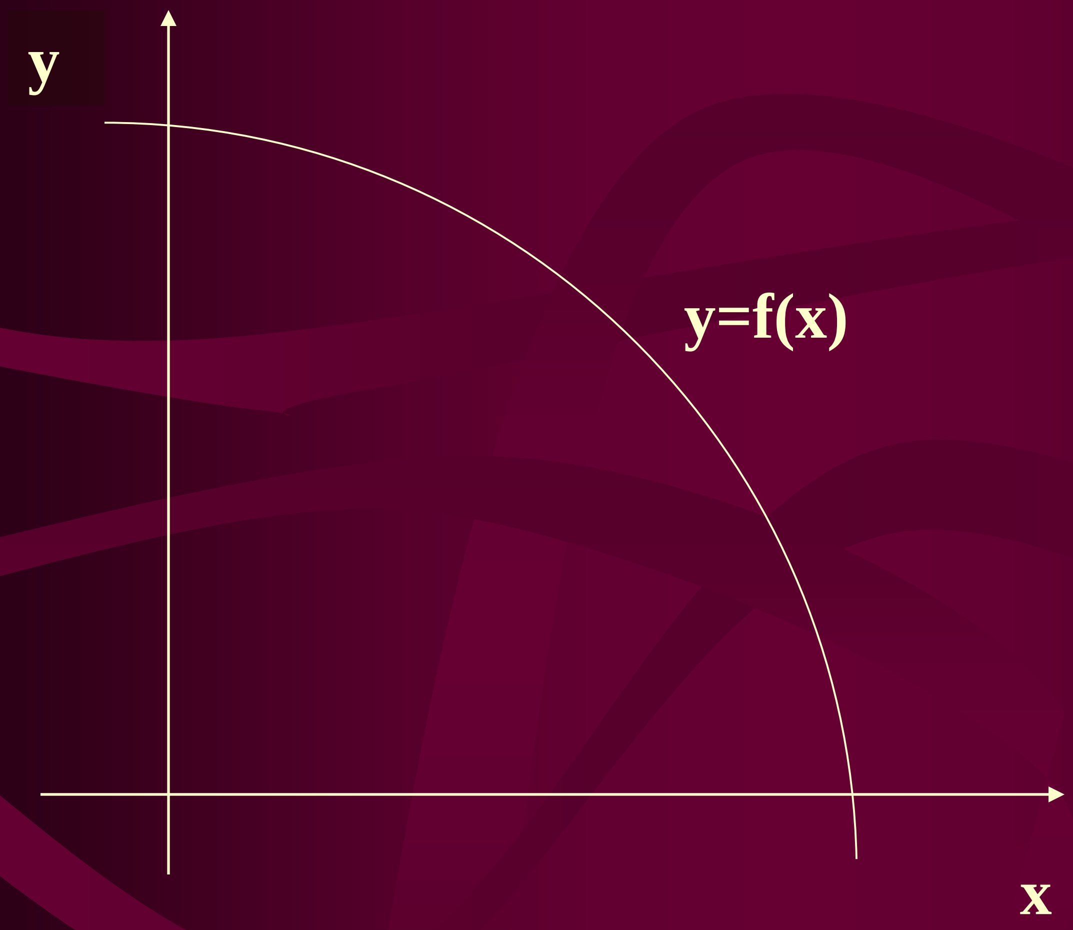
Funkcję można określić na różne sposoby:

- **słownie- np. Każdemu uczniowi klasy I D przyporządkowujemy jego numer w dzienniku.**
- **grafem X Y**

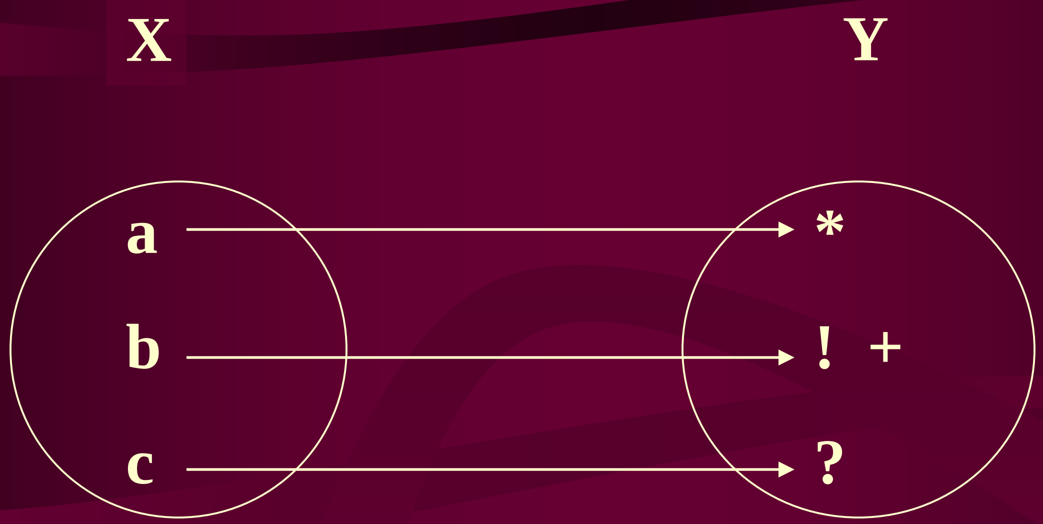
- **wzorem $y = x + 1,\ X = R$**
- **tabelką**

x	a	b
y	1	2

•wykresem



Przykład

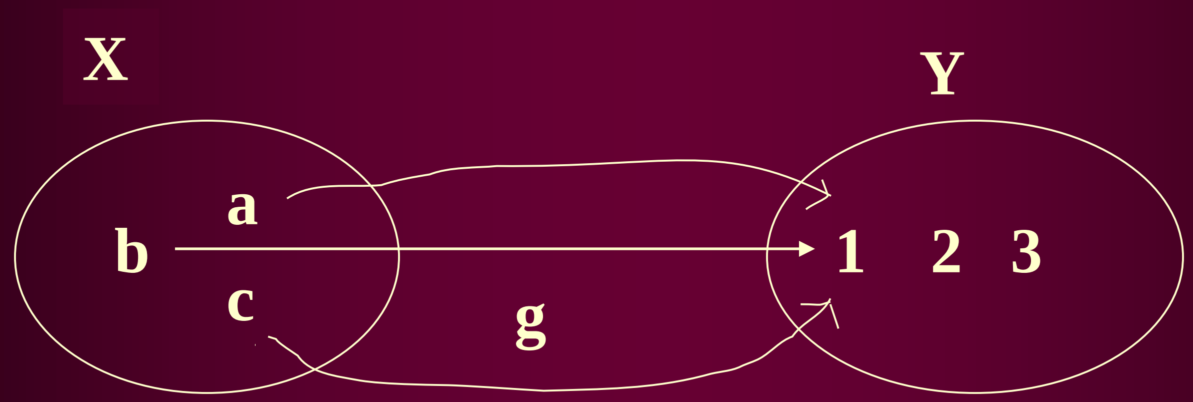


f(a)=*

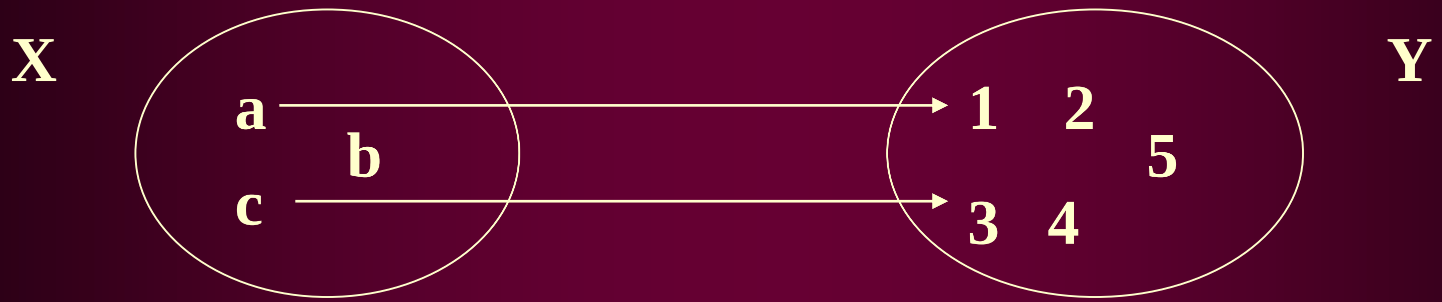
f(b)=!

f(c)=?

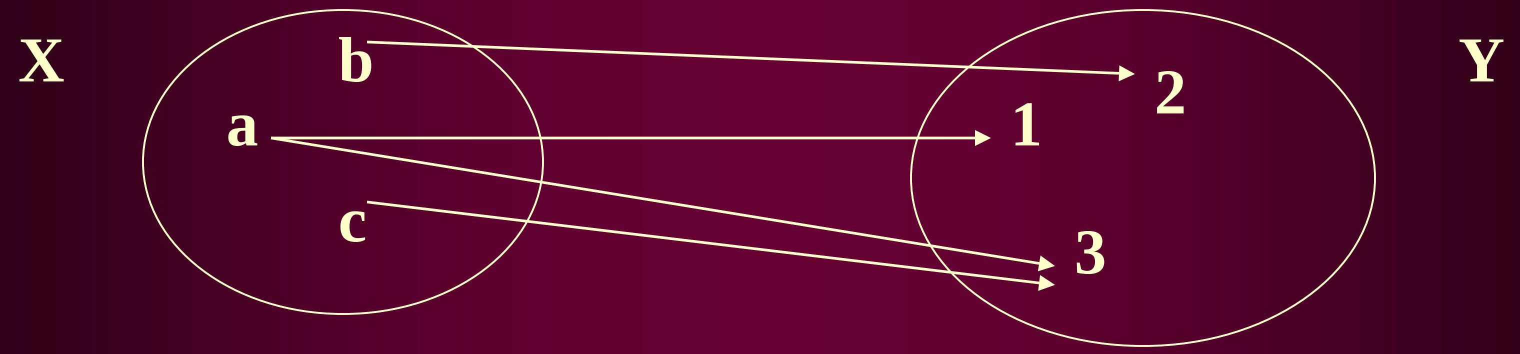
To przyporządkowanie jest funkcją.



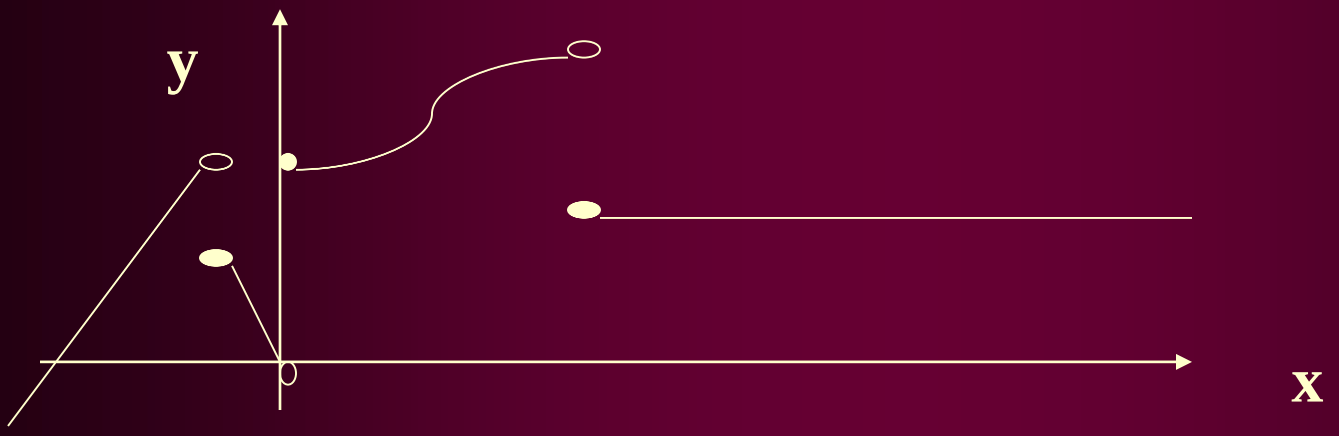
g(a)=g(b)=g(c)=1



To przyporządkowanie nie jest funkcją, ponieważ nie każdemu elementowi ze zbioru X przyporządkowano element ze zbioru Y.



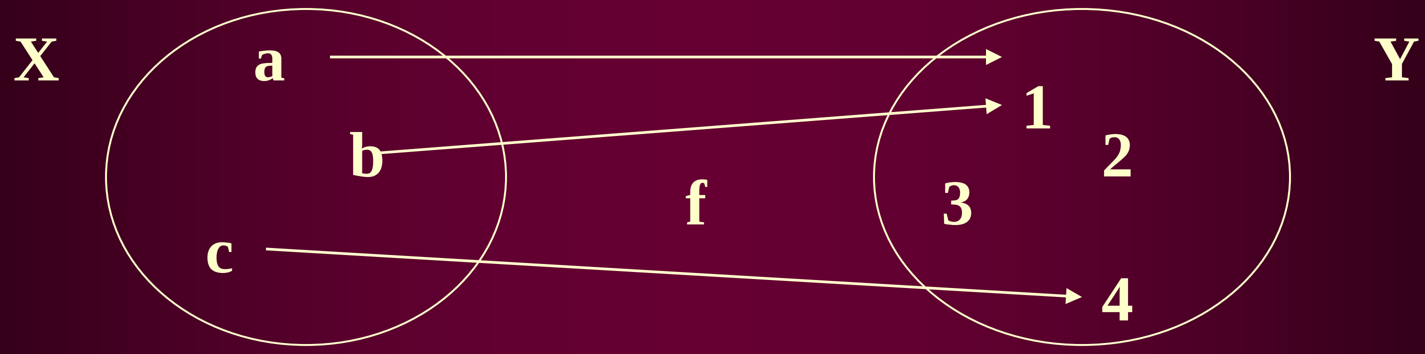
To przyporządkowanie nie jest funkcją, ponieważ 1 elementowi ze zbioru X przyporządkowano kilka elementów ze zbioru Y.



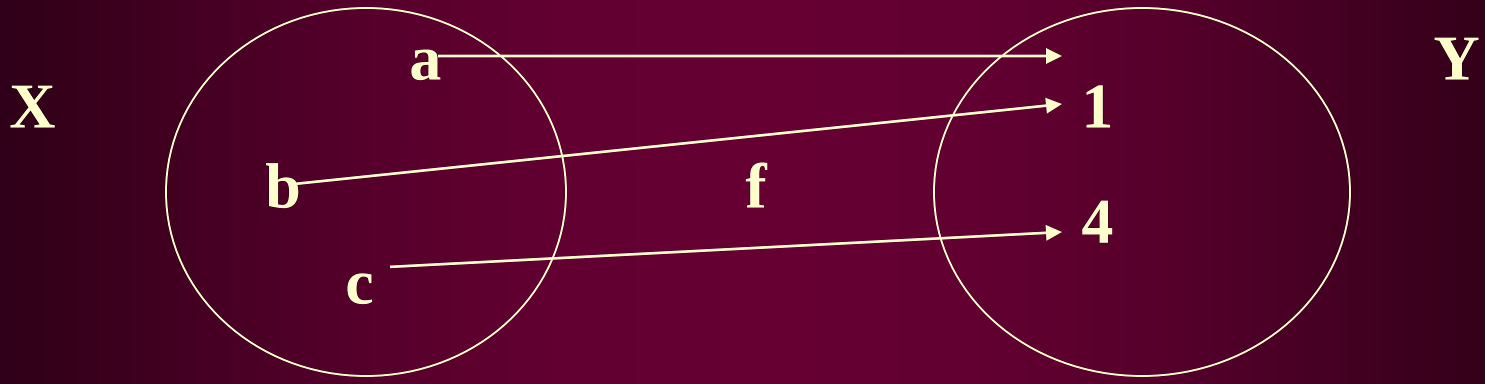
To przyporządkowanie jest funkcją, ponieważ każdemu x przyporządkowany jest y.

DEFINICJA

Mówimy, że funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest "na", jeżeli każdy element $y \in Y$ przyporządkowany jest co najmniej jednemu elementowi $x \in X$.



To jest funkcja „w”.

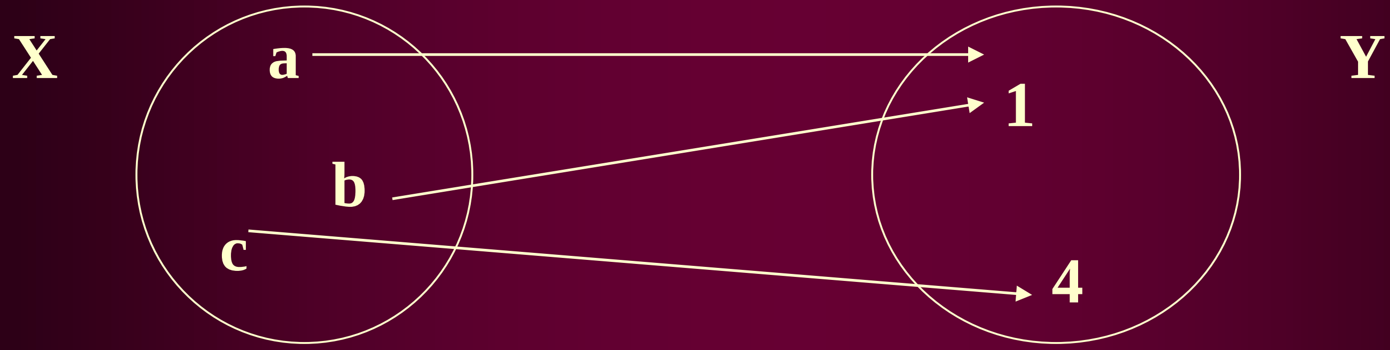


To jest funkcja „na”.

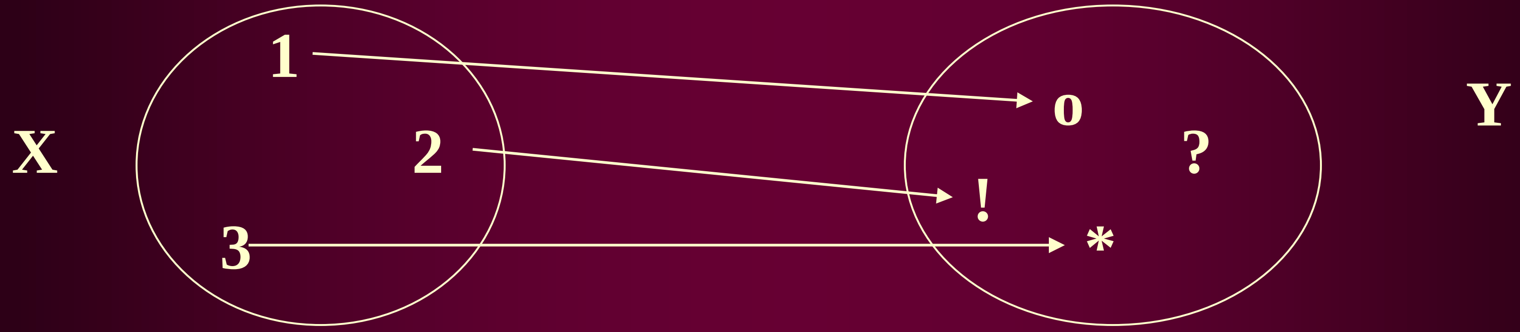
DEFINICJA

Mówimy,że funkcja $f\colon X\to Y$ jest różnowartościowa jeżeli element $y\in Y$ przyporządkowany jest dokładnie jednemu elementowi $x\in X$.

$$\bigwedge_{x_1,x_2\in X} (x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2))$$



To nie jest funkcja różnowartościowa.

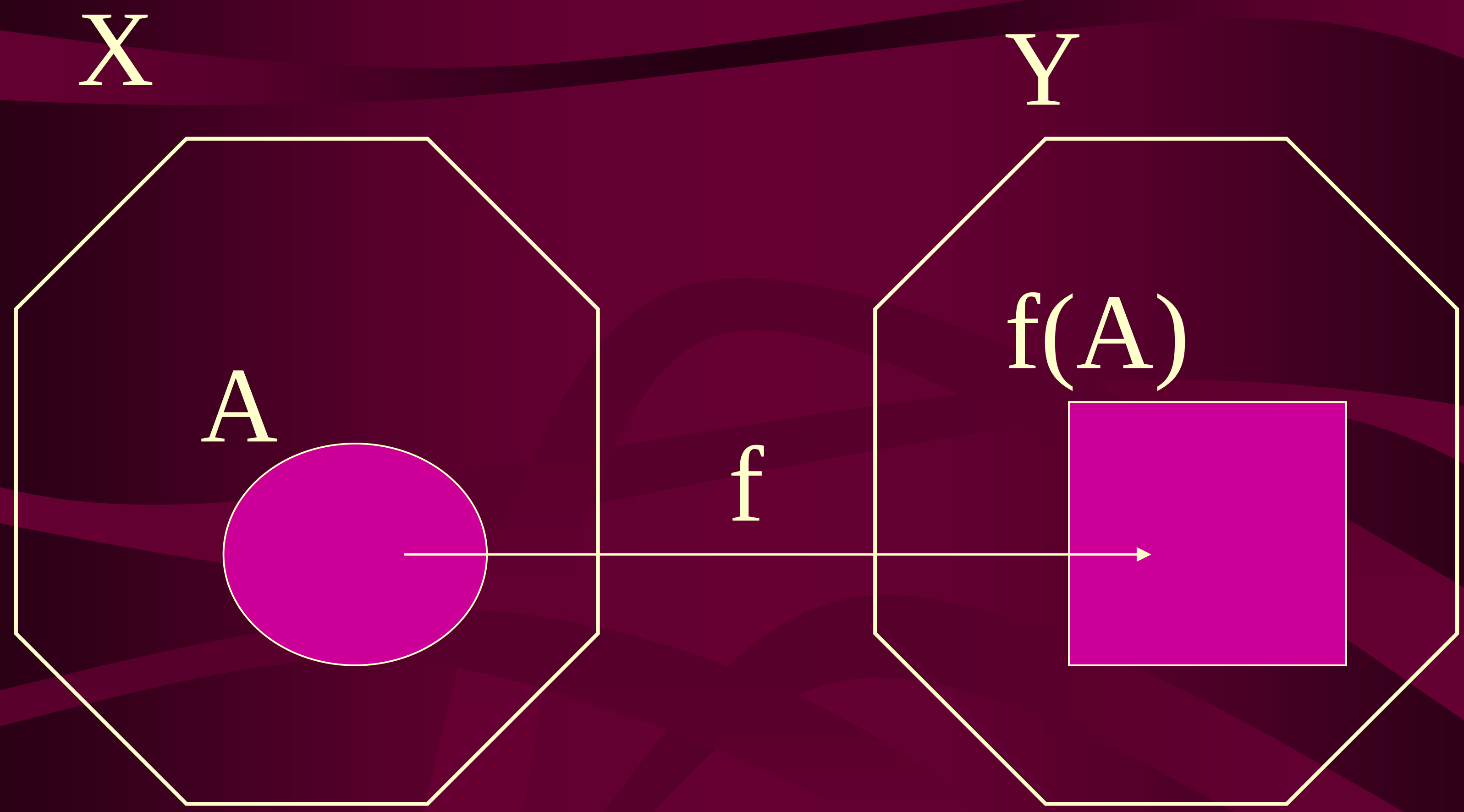


To jest funkcja różnowartościowa.

DEFINICJA

Obrazem zbioru AcX, wyznaczonym przez funkcję f:X→Y nazywamy zbiór wartości funkcji f dla argumentów ze zbioru A.

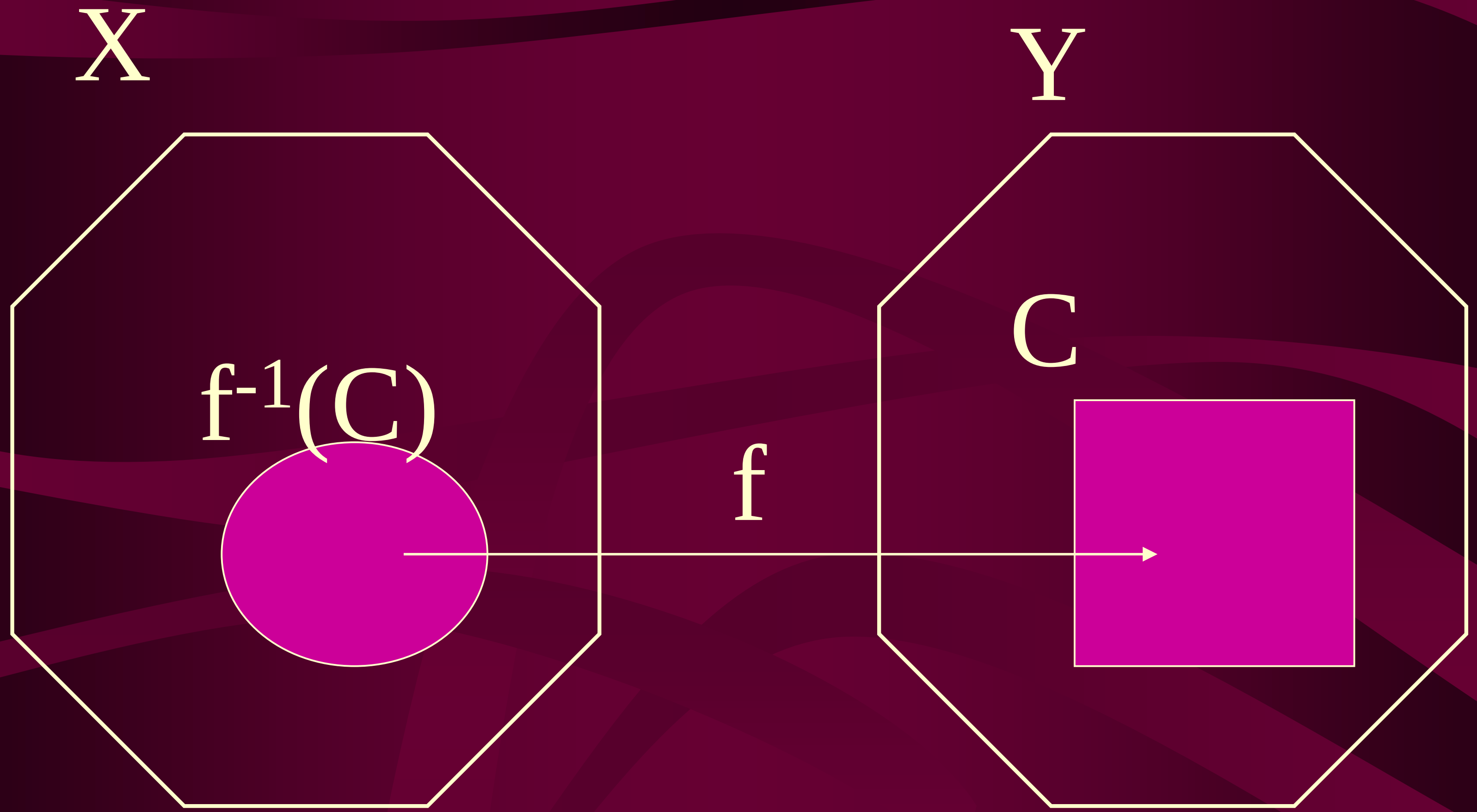
$$f(A)=\{y\in Y;\ \ y=f(x)\wedge x\in A\}$$


X
Y
A
f
f(A)

DEFINICJA

Przeciwobrazem zbioru C⊂Y, wyznaczonym przez funkcję f:X→Y nazywamy zbiór argumentów funkcji f, których obrazy należą do zbioru C.

$$f^{-1}(C)=\{x\in X;\ \ f(x)\in C\}$$


X
Y
C
f-1(C)
f

Jeśli zbiory X i Y są zbiorami liczbowymi, to funkcję f nazywamy liczbową.

Piszemy: f:D $\rightarrow$ R

Wykresem funkcji f nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny o współrzędnych (x,y) takich, że x należy do dziedziny funkcji, a y jest odpowiadającą mu wartością funkcji.

$$\{(x, y); x \in D \wedge y = f(x)\}$$

UWAGA !!!

Wykres funkcji ZALEŻY OD JEJ DZIEDZINY !!!

<u>PRZYKŁAD</u>

Narysuj wykres funkcji y=x+1 przyjmując za dziedzinę:

-{-3, -1, 0, 2, 4}

- N
- <-1,4)
- R

DEFINICJA

Miejscem zerowym funkcji $f: X \to Y$ nazywamy zbiór argumentów funkcji f, dla których wartość funkcji jest równa 0.

Geometrycznie: miejsce zerowe funkcji jest wyznaczone przez punkt(y) przecięcia wykresu z osią OX.

UWAGA!!!

Funkcja może nie mieć, mieć jedno, kilka, lub nieskończenie wiele miejsc zerowych.

Wyznaczyć miejsce zerowe funkcji (rachunkowo), to znaczy rozwiązać równanie f(x)=0.

DEFINICJA

Mówimy, że funkcje $f : D_1 \to R \ i \ g : D_2 \to R$

są równe, jeśli:

$$D_1 = D_2$$

$$\underset{x}{\forall} f(x) = g(x)$$

Na funkcjach liczbowych można wykonywać działania arytmetyczne:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

DEFINICJA

Mówimy, że funkcja f jest rosnąca w zbiorze AcD, gdy

$$\underset{x_1, x_2 \in A}{\forall} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

(wraz ze wzrostem argumentów rosną wartości funkcji)

DEFINICJA

Mówimy, że funkcja f jest malejąca w zbiorze AcD, gdy

$$\underset{x_1, x_2 \in A}{\forall} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

(wraz ze wzrostem argumentów maleją wartości funkcji)

DEFINICJA

Mówimy, że funkcja f jest stała w zbiorze AcD, gdy

$$\underset{x_1, x_2 \in A}{\forall} f(x_1) = f(x_2)$$

(wartości funkcji są stałe)

Pojęcia: funkcja rosnąca, malejąca, stała składają się na pojęcie monotoniczności funkcji.

Funkcje rosnące lub malejące nazywamy ściśle monotonicznymi. Funkcje nierosnące lub niemalejące nazywamy monotonicznymi.

DEFINICJA

Mówimy, że funkcja f jest parzysta, jeśli dla każdego x należącego do D zachodzi

$$-x \in D$$

$$f(-x) = f(x)$$

UWAGA!!! Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi OY.

DEFINICJA

Mówimy, że funkcja f jest nieparzysta, jeśli dla każdego x należącego do D zachodzi

$$-x \in D$$

$$f(-x) = -f(x)$$

UWAGA!!! Wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem pkt. OO.

DEFINICJA

Mówimy, że funkcja f jest okresowa, jeśli istnieje taka liczba T≠0, że

$$x+T \in D$$

$$f(x) = f(x+T)$$

(wartości funkcji „cyklicznie” powtarzają się)

ZADANIA

1. Wyznacz dziedzinę funkcji

$$f(x)=\frac{2x-7}{3x+12}$$

$$f(x)=\sqrt{2x-4}$$

$$y=\frac{1}{x^2-9}$$

$$y=\frac{\sqrt{x}}{|x-2|}$$

$$y=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4x+4}$$

$$y=\sqrt{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}$$

2. Podaj przykład (graf, tabelka, wykres) funkcji, która:

- jest „na” i nie jest różnowartościowa

- jest różnowartościowa i nie jest „na”

- jest różnowartościowa i jest „na”

- nie jest różnowartościowa i nie jest „na”

3. Na podstawie wykresu (na tablicy) odczytaj własności funkcji - dziedzinę, zbiór wartości, monotoniczność, parzystość, okresowość, m-ca zerowe, wartości (dodatnie, ujemne), obraz i przeciwobraz (zadanych zbiorów), czy jest „na”, różnowartościowa

4. Dany wykres funkcji (tablica) przekształć:

- w symetrii względem osi OX

- w symetrii względem osi OY

- w symetrii względem punktu OO

- w symetrii względem dwusiecznej kąta XOY

- w translacji o wektor [3,-1]

5. Zbadaj parzystość funkcji

$$f(x) = x^2 - 4$$

$$f(x) = x^3$$

$$f(x) = x + |x|$$

6. Zbadaj monotoniczność funkcji

$$f(x) = 2x + 5$$

$$f(x) = -3x + 1$$

$$f(x) = |x|$$

$$f(x) = x^2$$

7. Dana jest funkcja $f(x) = 2x - 4$

Wyznacz:

$$f(-3),\ f(0),\ f\left(\frac{1}{2}\right),\ f(\sqrt{2})$$

$$f(x+1),\ f\left(\frac{1}{x}\right),\ f(\sqrt{x}),\ f(2x)$$

$$3f(x),\ f^2(x)$$

8. Wyznacz miejsca zerowe funkcji

$$f(x) = 4x + 20$$

$$f(x) = -3x - 6$$

$$f(x) = |x + 3|$$

$$f(x) = x^2 - 5$$