# CIĄGI

# CIĄGI

- ciągi liczbowe
- indukcja matematyczna
- ciąg arytmetyczny
- ciąg geometryczny
- szereg geometryczny
- zadania

# CIĄGI LICZBOWE

- Pojęcie ciągu liczbowego
- Określanie ciągu
- Monotoniczność ciągu

# POJĘCIE CIĄGU LICZBOWEGO

DEFINICJA:

**Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych dodatnich.**

Ciąg nazywamy liczbowym, gdy jego wartości są liczbami. Wartości f(1), f(2),..., f(n)nazywamy wyrazami ciągu. Zamiast oznaczeń f(1), f(2),..., f(n) wprowadzamy oznaczenia $a_1$, $a_2$,...$a_n$ i nazywamy je odpowiednio: pierwszym, drugim,... n-tym wyrazem ciągu.
Ciąg o wyrazach $a_1$, $a_2$,...$a_n$,... zapisujemy: $(a_n)$.
Wyrazy $a_1$, $a_2$,..., $a_n$,... ciągu liczbowego $(a_n)$ są to liczby rzeczywiste przyporządkowane odpowiednio liczbom naturalnym 1,2,...n,...

# POJĘCIE CIĄGU LICZBOWEGO - PRZYKŁADY CIĄGÓW

Niech każdej liczbie naturalnej dodatniej n będzie przyporządkowana liczba

$$\frac{n}{n+1}$$

Określiliśmy w ten sposób pewien ciąg liczbowy nieskończony. Jego początkowymi wyrazami są:

$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$, itd..

Ciąg ten zapisujemy: $\left( \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots \right)$

lub $\left( \frac{n}{n+1} \right)$

# POJĘCIE CIĄGU LICZBOWEGO - PRZYKŁADY CIĄGÓW

Każdej liczbie naturalnej $1 \leq n \leq 6$ przyporządkowujemy liczbę $a_n = 40 - n^2$. Otrzymujemy w ten sposób ciąg o sześciu wyrazach:

$a_1 = 40-1^2 = 39$, $a_2 = 40-2^2 = 36$, $a_3 = 40-3^2 = 31$, $a_4 = 40-4^2 = 24$, $a_5 = 40-5^2 = 15$, $a_6 = 40-6^2 = 4$.

Jest to przykład **ciągu skończonego.**

**UWAGA!!!**

FUNKCJE OKREŚLONE NA SKOŃCZONYM ZBIORZE POCZĄTKOWYCH KOLEJNYCH LICZB NATURALNYCH NAZYWAMY CIĄGAMI SKOŃCZONYMI!!!

# OKREŚLANIE CIĄGU

- Ciąg podobnie jak funkcja może być podany w różny sposób. Najczęściej jednak za pomocą **przepisu słownego** lub **wzoru ogólnego**.

# OKREŚLANIE CIĄGU - PRZYKŁAD

*Dany jest ciąg $(a_n)$, określony wzorem $a_n=n^2+1$. Obliczyć wyrazy: $a_1, a_2, a_{10}, a_{50}, a_k, a_{k+1}$.*

ROZWIĄZANIE:

$a_1=1^2+1=2$ $a_2=2^2+1=5$

$a_{10}=10^2+1=101$ $a_{50}=50^2+1=2501$

$a_k=k^2+1$ $a_k+1=(k+1)^2+1$

ODPOWIEDŹ:

$a_1=2$, $a_2=5$, $a_{10}=101$, $a_{50}=2501$, $a_k=k^2+1$, $a_{k+1}=k^2+2k+2$

**UWAGA!!!**

Niekiedy ciąg określa się za pomocą wzoru rekurencyjnego. Wzór rekurencyjny – wzór służący do wyznaczania wyrazów pewnego ciągu, który uzależnia wartość dowolnego (ogólnego) wyrazu tego ciągu od wartości poprzedzających go wyrazów.

# MONOTONICZNOŚĆ CIĄGU

Ponieważ ciągi są funkcjami, więc analogicznie jak w przypadku funkcji możemy badać monotoniczność ciągów, korzystając z definicji funkcji rosnącej, malejące, nierosnącej oraz niemalejącej.
Przyjmujemy następujące określenia:

**DEFINICJA NR 1**

**Ciąg $(a_n)$ nazywamy rosnącym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego wyraz z wyjątkiem pierwszego jest większy od wyrazu poprzedzającego.**

**czyli:**

**Ciąg $(a_n)$ jest rosnący $\Leftrightarrow \bigwedge_{n\in N} a_{n+1}>a_n$**

**DEFINICJA NR2**

**Ciąg $(a_n)$ nazywamy malejącym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego wyraz z wyjątkiem pierwszego jest mniejszy od wyrazu poprzedzającego.**

**czyli:**

**Ciąg $(a_n)$ jest malejący $\Leftrightarrow \bigwedge_{n\in N} a_{n+1}<a_n$**

# MONOTONICZNOŚĆ CIĄGU

## UWAGA!!!

**W zadaniach dotyczących badania monotoniczności ciągów liczbowych wygodniej jest korzystać z następujących warunków, równoważnych warunkom występującym w definicjach:**

1) ciąg $(a_n)$ jest rosnący $\Leftrightarrow \bigwedge_{n \in N} a_{n+1} - a_n > 0$

2) ciąg $(a_n)$ jest malejący $\Leftrightarrow \bigwedge_{n \in N} a_{n+1} - a_n < 0$

# MONOTONICZNOŚĆ CIĄGU - PRZYKŁAD

*Zbadaj monotoniczność ciągu $(a_n)$ danego wzorem $a_n = \frac{1}{n}$.*

<u>ROZWIĄZANIE:</u>

W celu zbadania monotoniczności ciągu tworzymy różnicę $a_{n+1} - a_n$ i badamy jej znak. Wyraz $a_n$ mamy dany. Aby wyznaczyć $a_{n+1}$ należy w miejsce n wstawić n+1.

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \; ; \qquad a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-n-1}{(n+1)n} = \frac{-1}{(n+1)n}$$

Dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n wyrażenie postaci $\frac{-1}{(n+1)n}$ ma wartość ujemną ($(n+1)n>0$ dla każdego $n \in N^+$). A zatem wykazaliśmy, że: $\bigwedge_{n \in N} a_{n+1} - a_n < 0$

<u>ODPOWIEDŹ:</u> W myśl definicji numer 2, ciąg $(a_n)$ jest ciągiem malejącym.

# INDUKCJA MATEMATYCZNA

- Zasada indukcji matematycznej

# INDUKCJA MATEMATYCZNA

W matematyce wielką rolę odgrywa metoda dowodzenia twierdzeń dotyczących własności liczb naturalnych, znana pod nazwą indukcji zupełnej lub indukcji matematycznej.

**ZASADA INDUKCJI MATEMATYCZNEJ:**

Jeśli T(n) oznacza pewne twierdzenie mówiące o liczbie naturalnej n, to aby udowodnić, że twierdzenie to jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n, wystarczy:

1) sprawdzić, że jest ono prawdziwe dla pewnej liczby $n=n_0$, tzn.: sprawdzić, że zachodzi $T(n_0)$
2) dla każdej liczby naturalnej $n = k \geq n_0$ z założenia, że twierdzenie to jest prawdziwe dla liczby $n=k$ wykazać, że jest ono prawdziwe dla liczby następnej $n = k+1$

# INDUKCJA MATEMATYCZNA - PRZYKŁAD

- *Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $2^n > n$.*
- ROZWIĄZANIE:
- Skorzystamy z zasady indukcji matematycznej:
- 1. dla n=0 mamy: $2^0=1 > 0$
- otrzymaliśmy nierówność prawdziwą
- 2. Zakładamy, że nierówność jest prawdziwa dla pewnej liczby naturalnej **n = k**

# INDUKCJA MATEMATYCZNA - PRZYKŁAD

- **Założenie indukcyjne:** $2^k > k$
  wykażemy, że nierówność jest prawdziwa dla $n = k+1$
  **Teza indukcyjna:** $2^{k+1} > k+1$
  **Dowód:** $2^{k+1} = 2^k \cdot 2^1 = 2 \cdot 2^k$
  z założenia: $2^k > k$ oraz $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$, więc $2 \cdot 2^k > 2k$
  otrzymujemy: $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k = k+k > k+1$
- czyli wykazaliśmy, że: $2^{k+1} > k+1$

- <u>ODPOWIEDŹ</u>: Na mocy indukcji matematycznej, nierówność $2^n > n$ jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

# CIĄG ARYTMETYCZNY

- Określenie ciągu arytmetycznego
- Wzór ogólny
- Suma częściowa ciągu arytmetycznego

# OKREŚLENIE CIĄGU ARYTMETYCZNEGO

- DEFINICJA:
- Ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg, w którym każdy wyraz oprócz pierwszego powstaje przez dodanie do poprzedniego tej samej liczby r. Liczbę r nazywamy różnicą ciągu arytmetycznego.

- UWAGA!!!
- Ciąg arytmetyczny może być nieskończony lub skończony, ale ciąg skończony musi mieć co najmniej trzy wyrazy.

# OKREŚLENIE CIĄGU ARYTMETYCZNEGO

- Jeżeli ciąg $(a_n)$ jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r, to z definicji mamy: $a_2-a_1=r$, $a_3-a_2=r$, $a_{10}-a_9=r$, $a_{50}-a_{49}=r$,...

- Ogólnie: $a_{n+1} - a_n = r$, tzn.: w ciągu arytmetycznym różnica między dowolnym wyrazem ciągu i wyrazem, który go bezpośrednio poprzedza jest stała.

# WZOR OGOLNY CIĄGU ARYTMETYCZNEGO

- **Niech dany będzie ciąg arytmetyczny $(a_n)$ o różnicy r. Na podstawie definicji ciągu arytmetycznego mamy:**
- $a_2=a_1+r$
- $a_3=a_2+r=a_1+2r$
- $a_4=a_3+r=a_1+3r$
- $a_5=a_4+r=a_1+4r$
- ……………………………………

- **Można zauważyć, że każdy z wpisanych wyrazów jest sumą wyrazu pierwszego i pewnej wielokrotności różnicy r. Przy czym liczba różnic jest o 1 mniejsza od wskaźnika wyrazu. To spostrzeżenie pozwala na sformułowanie twierdzenia.**

# WZÓR OGÓLNY CIĄGU ARYTMETYCZNEGO

## TWIERDZENIE 1:

Jeżeli ciąg $(a_n)$ jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r, to:

$$\bigwedge_{n \in N} a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

# WZÓR OGÓLNY CIĄGU ARYTMETYCZNEGO

**Dowód** przeprowadzamy stosując zasadę indukcji matematycznej

1. Sprawdzamy prawdziwość wzoru dla **n=1**

**L** = $a_1$ **P** = $a_1 + (1 - 1)r = a_1$; czyli: **L = P**

Zatem wzór jest prawdziwy dla n = 1.

2. Zakładamy, że wzór jest prawdziwy dla **n = k**

**Założenie indukcyjne:** $a_k = a_1 + (k - 1)r$

Wykażemy, że wzór jest prawdziwy dla **n = k + 1.**

**Teza indukcyjna:** $a_{k+1} = a_1 + (k+1-1)r = a_1 + kr$

**Dowód tezy:**

Korzystając z założenia, że $\mathbf{a_k = a_1 + (k-1)r}$ mamy:

**L** = $a_{k+1} = a_k + r = a_1 + kr$ **P** = $a_1 + kr$; czyli: **L = P**

Na mocy indukcji matematycznej, wzór ten jest prawdziwy dla każdej liczby naturalnej różnej od zera.

# PRZYKŁAD

W ciągu arytmetycznym $a_1 = 2$, $r = 5$. Oblicz: $a_4$, $a_{10}$, $a_{100}$, $a_k$, $a_{k+1}$

ROZWIĄZANIE:

Korzystamy ze wzoru: $\bigwedge_{n\in N} a_n = a_1 + (n - 1)r$

Stąd:

$a_4 = a_1 + 3r$ $\qquad$ $a_4 = 2 + 15 = 17$

$a_{10} = a_1 + 9r$ $\qquad$ $a_{10} = 2 + 45 = 47$

$a_{100} = a_1 + 99r$ $\qquad$ $a_{100} = 2 + 495 = 497$

$a_k = a_1 + (k - 1)r$ $\qquad$ $a_k = 2 + (k - 1)5$

$a_{k+1} = a_1 + kr$ $\qquad$ $a_{k+1} = 2 + 5k$

ODPOWIEDŹ:

$a_4 = 17$, $a_{10} = 47$, $a_{25} = 122$, $a_{100} = 497$, $a_k = 2 + (k - 1)5$, $a_{k+1} = 2 + 5k$

# WYRAZ OGÓLNY CIĄGU ARYTMETYCZNEGO

- **TWIERDZENIE 2:**
- Każdy wyraz ciągu arytmetycznego, poczynając od drugiego, jest średnią arytmetyczną jego dwóch sąsiednich wyrazów, tzn.:

$$a_n = \frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2} \text{ dla } n \in N^+ \setminus \{1\}$$

- **UWAGA !!!**
- Jeśli ciąg arytmetyczny jest skończony, to twierdzenie to nie jest prawdziwe dla ostatniego wyrazu ciągu, gdyż nie ma po nim następnego.

# SUMA CZĘŚCIOWA CIĄGU ARYTMETYCZNEGO

Rozpatrzmy ciąg arytmetyczny $(a_n)$, którym $a_1=1$, $r=2$, mający 10 wyrazów: $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=5$, $a_4=7$, $a_5=9$, $a_6=11$, $a_7=13$, $a_8=15$, $a_9=17$, $a_{10}=1$. Utwórzmy sumy wyrazów jednakowo odległych od początku i końca tego ciągu:

$a_1 + a_{10} = 1 + 19 = 20$

$a_2 + a_9 = 3 + 17 = 20$

$a_3 + a_8 = 5 + 15 = 20$

$a_4 + a_7 = 7 + 13 = 20$

$a_5 + a_6 = 9 + 11 = 20$

$a_6 + a_5 = 11 + 9 = 20$

$a_7 + a_4 = 13 + 7 = 20$

$a_8 + a_3 = 15 + 5 = 20$

$a_9 + a_2 = 17 + 3 = 20$

$a_{10} + a_1 = 19 + 1 = 20$

Wypisane sumy są równe. Możemy zatem powiedzieć, że suma dwóch wyrazów ciągu arytmetycznego jednakowo oddalonych od pierwszego i ostatniego wyrazu tego ciągu jest stała. Powyższy wniosek jest prawdziwy dla każdego skończonego ciągu arytmetycznego.

# SUMA CZĘŚCIOWA CIĄGU ARYTMETYCZNEGO

TWIERDZENIE 1:
W skończonym ciągu arytmetycznym$(a_n)$ suma wyrazów jednakowo odległych od początku i końca jest stała i równa sumie wyrazów: pierwszego i ostatniego.

UWAGA!!!
W ciągu $(a_n)$ o n wyrazach sumę wyrazów jednakowo odległych od początku i końca zapisujemy:

$$a_k + a_{n-k+1}$$

wyraz k-ty od początku      wyraz k-ty od końca

# SUMA CZĘSCIOWA CIĄGU ARYTMETYCZNEGO

**TWIERDZENIE 2:**

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego równa jest iloczynowi liczby wyrazów przez średnią arytmetyczną wyrazu pierwszego i ostatniego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

lub:

$$S_n = \frac{[2a_1+(n-1)r]n}{2}$$

# SUMA CZĘŚCIOWA CIĄGU ARYTMETYCZNEGO - PRZYKŁAD

Oblicz sumę wszystkich nieparzystych liczb naturalnych mniejszych od 100.

ROZWIĄZANIE:

Liczby 1,3,5,7, ...,99 tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy r=2, przy czym $a_1 = 1$.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

Aby obliczyć sumę, musimy wyznaczyć n (ilość liczb naturalnych nieparzystych mniejszych od 100). Ze wzoru: $a_n = a_1 + (n - 1)r$:

$99 = 1 + (n - 1)2$

$n = 50$

$$S_{50} = \frac{1 + 99}{2} 50 = 2500$$

ODPOWIEDŹ:

Suma wszystkich nieparzystych liczb naturalnych <100 wynosi 2500.

# CIĄG GEOMETRYCZNY

- Określenie ciągu geometrycznego
- Wzór ogólny
- Suma częściowa ciągu geometrycznego

# OKREŚLENIE CIĄGU GEOMETRYCZNEGO

Ciągiem geometrycznym nazywamy ciąg, w którym każdy wyraz oprócz pierwszego powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez tę samą liczbę q. Liczbę q nazywamy ilorazem ciągu geometrycznego.

# OKREŚLENIE CIĄGU GEOMETRYCZNEGO

Jeżeli ciąg $(a_n)$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q, to wprost z definicji mamy: $a_2 = a_1 q$, $a_3 = a_2 q$, ..., $a_{10} = a_9 q$, ...

$$\frac{a_2}{a_1} = q, \quad \frac{a_3}{a_2} = q, \ \ldots, \ \frac{a_{10}}{a_9} = q \ \ldots, \qquad a_1 \neq 0 \text{ i } q \neq 0$$

**UWAGA!!!**

**1. Ciąg geometryczny może być nieskończony lub skończony, ale ciąg skończony musi zawierać co najmniej trzy wyrazy.**
**2. Przyjmujemy, że ciąg postaci $(a_1,0,0,0,0,\ldots)$ jest ciągiem geometrycznym, gdzie $a_1$ jest pierwszym wyrazem oraz $q=0$ (pozostałe wyrazy są równe 0).**

# WZÓR OGÓLNY

Niech dany będzie ciąg geometryczny $(a_n)$ o ilorazie $q\neq 0$ i $a_1\neq 0$.
Na podstawie definicji ciągu geometrycznego mamy:

$a_2 = a_1 g$

$a_3 = a_2 g = a_1 q^2$

$a_4 = a_3 g = a_1 q^3$

$a_5 = a_4 g = a_1 q^4$

.......................................................

Można zauważyć, że wyrazy ciągu geometrycznego są iloczynami wyrazu pierwszego i pewnej potęgi ilorazu q, przy czym wykładnik, do którego podniesione q, jest o jeden mniejszy od wskaźnika wyrazu. Pozwala to na sformułowanie twierdzenia:

**TWIERDZENIE 1:**

**Jeżeli $(a_n)$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q\neq 0$, to:**

$$\bigwedge_{n\in N} a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

# WZÓR OGÓLNY - PRZYKŁAD

***Między liczby 2 i 162 wstawić trzy liczby x, y, z takie, aby wszystkie pięć: 2, x, y, z, 162 tworzyły ciąg geometryczny.***

<u>ROZWIĄZANIE:</u>

W naszym ciągu geometrycznym mamy: $a_1 = 2$, $a_2 = x$, $a_3 = y$, $a_4 = z$, $a_5 = 162$

ponieważ $a_5 = a_1q^4$, więc $162 = 2q^4$

stąd: $q^4 = 81 \Leftrightarrow q = -3$ lub $q = 3$

dla $q = -3$ mamy:

$a_2 = x = a_1q = -6$

$a_3 = y = a_2q = 18$

$a_4 = z = a_3q = -54$

dla $q=3$ mamy:

$a_2 = x = a_1q = 6$

$a_3 = y = a_2q = 18$

$a_4 = z = a_3q = 54$

otrzymaliśmy dwa ciągi spełniające warunki zadania

<u>ODPOWIEDŹ:</u> $x = -6$, $y = 18$, $z = -54$ lub $x = 6$, $y = 18$, $y = 54$

# WZÓR OGÓLNY

- **TWIERDZENIE 2**:

- Każdy wyraz $a_n$ ciągu geometrycznego z wyjątkiem pierwszego (gdy ciąg jest skończony - ostatniego) spełnia warunek:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

- Wynika z tego, że wyrazy $a_n$-1 i $a_n$+1 mają ten sam znak oraz $|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

Jeżeli wszystkie wyrazy ciągu geometrycznego są dodatnie prawdziwy jest wniosek, że każdy wyraz ciągu, począwszy od drugiego, jest średnią geometryczną wyrazu poprzedniego i następnego:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

# SUMA CZĘŚCIOWA CIĄGU GEOMETRYCZNEGO

Obliczymy sumę n początkowych kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego.
Przyjmujemy takie same oznaczenia jak dla ciągu arytmetycznego.

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_3$

..........................

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

## TWIERDZENIE:

Jeżeli $(a_n)$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q, to:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \dfrac{1-q^1}{1-q}, & \text{gdy } q \neq 1 \\ na_1, & \text{gdy } q = 1 \end{cases}$$

# UWAGA!!!

- Wzór postaci:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

- wygodniej jest stosować gdy:
- $q > 1$

- Wzór postaci:

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

- wygodniej jest stosować gdy:
- $q < 1$

# SUMA CZĘŚCIOWA CIĄGU GEOMETRYCZNEGO - PRZYKŁAD

*W pewnym ciągu geometrycznym $a_1=8$ i $q=2$. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.*

**ROZWIĄZANIE:**

Przyjmujemy, że rozważany ciąg geometryczny ma co najmniej 10 wyrazów. Korzystamy ze wzoru:

$$S = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (q > 1)$$

po podstawieniu danych z treści otrzymujemy:

$S_{10} = 8184$

**ODPOWIEDŹ:** $S_{10} = 8184$

# SZEREG GEOMETRYCZNY

# SZEREG GEOMETRYCZNY

- **DEFINICJA:**
- Ciąg nieskończony $(S_n)$ o wyrazach:
- $S_1 = a_1$
- $S_2 = a_1 + a_1q$
- ..........................................
- $S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}$
- ..........................................
- Nazywamy **ciągiem sum częściowych ciągu** $a_1, a_1q, a_1q^2, \ldots, a_1q^{n-1}, \ldots$ lub **szeregiem geometrycznym** i oznaczamy symbolem:
- $\mathbf{a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} + \ldots}$

# SZEREG GEOMETRYCZNY

Jeżeli ciąg $(S_n)$ jest zbieżny, to jego granicę S nazywamy sumą nieskończonego ciągu geometrycznego $(a_1, a_1q, a_1q^2,\dots, a_1q^{n-1},\dots)$ lub sumą szeregu geometrycznego i piszemy:

$$S = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} + \dots$$

**UWAGA!!!**

Wyrazy ciągu $(a_1, a_1q, a_1q^2,\dots,a_1q^{n-1}, \dots)$ nazywamy wyrazami szeregu $a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} + \dots$

Jeżeli szereg $a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} + \dots$ ma sumę, to mówimy, że jest zbieżny (do tej sumy). Jeżeli nie ma sumy, to mówimy, że jest rozbieżny.

# SZEREG GEOMETRYCZNY

**TWIERDZENIE:**

**Jeżeli $|q| < 1$, to ciąg $(S_n)$ sum częściowych ciągu geometrycznego (szereg geometryczny) jest zbieżny i ma sumę:**

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

# SZEREG GEOMETRYCZNY - PRZYKŁAD

Wyznacz sumę: $3 - \frac{3}{4} + \frac{3}{16} - \frac{3}{64} + \ldots$

**ROZWIĄZANIE:**

Suma ta jest szeregiem geometrycznym zbieżnym: $a_1=3$, $q= -\frac{1}{4}$, ($|q| < 1$).

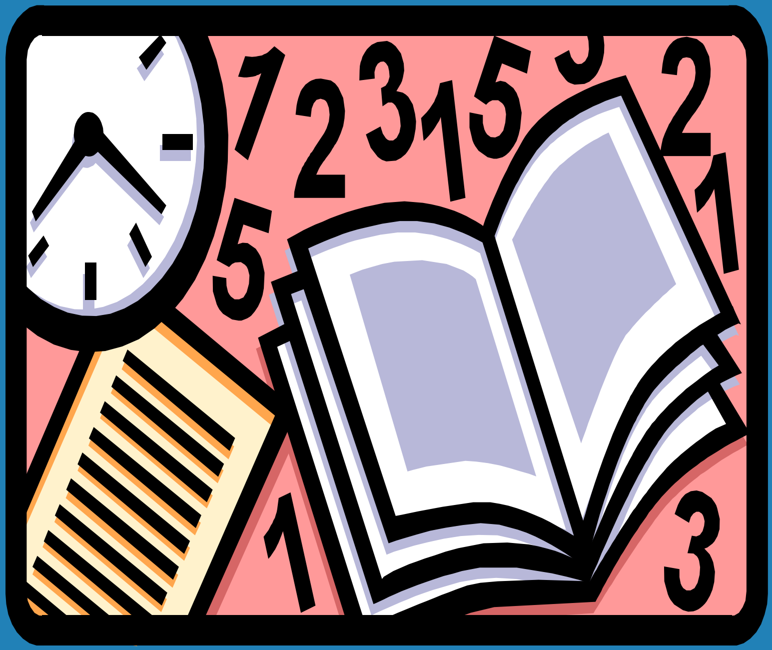
Korzystając ze wzoru: $S = \frac{a_1}{1 - q}$ mamy: $S = 2\frac{2}{5}$

**ODPOWIEDŹ:**

$S = 2\frac{2}{5}$.

# ZADANIA

- pojęcie ciągu liczbowego
- monotoniczność ciągu
- indukcja matematyczna
- ciąg arytmetyczny
- ciąg geometryczny
- szereg geometryczny



# POJĘCIE CIĄGU LICZBOWEGO

OBLICZ PIĘĆ POCZĄTKOWYCH WYRAZÓW CIĄGU $(a_n)$, KTÓREGO WYRAZ OGÓLNY OKREŚLONY JEST WZOREM:

ODP.:

1) $a_n = 9 - 2n$ — $7, 5, 3, 1, -1$

2) $a_n = \dfrac{3}{n+1}$ — $\dfrac{3}{2}, 1, \dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{1}{2}$

3) $a_n = (-2)^n$ — $-2, 4, -8, 16, -32$

4) $a_n = 3^{n-1}$ — $1, 3, 9, 27, 81$

# MONOTONICZNOŚĆ CIĄGU

ZBADAJ MONOTONICZNOŚĆ CIĄGÓW:

ODP.:

1) $a_n = 1 + 2n$ ciąg rosnący

2) $a_n = 2n^2 - 3$ ciąg rosnący

3) $a_n = n(n + 1)$ ciąg rosnący

4) $a_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n$ ciąg rosnący

5) $an = \dfrac{n^2 + 1}{n^2}$ ciąg malejący

# INDUKCJA MATEMATYCZNA

STOSUJĄC ZASADĘ INDUKCJI MATEMATYCZNEJ WYKAŻ, ŻE DLA KAŻDEJ LICZBY NATURALNEJ $n \geq 1$ PRAWDZIWE SĄ WZORY:

1) $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n = n(n + 1)$

2) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

3) $2 + 6 + 18 + 54 + \ldots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1$

4) $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$

# CIĄG ARYTMETYCZNY

OBLICZ WYRAZ PIERWSZY $a_1$ I RÓŻNICĘ r CIĄGU ARYTMETYCZNEGO $(a_n)$, JEŻELI:

ODP.:

1) $\begin{cases} a_3 + a_6 = 29 \\ a_5 + a_{11} = 50 \end{cases}$ $a_1 = 4,\ r = 3$

2) $\begin{cases} a_3 + a_5 = 24 \\ a_3 \cdot a_5 = 135 \end{cases}$ $a_1 = 3,\ r = 3$ lub $a_1 = 21,\ r = -3$

3) $\begin{cases} a_9 + a_{12} = 40 \\ a_{15}^2 - a_{11}^2 = 400 \end{cases}$ $a_1 = 115,\ r = -10$ lub $a_1 = 1,\ r = 2$

# CIĄG GEOMETRYCZNY

1). Wyznacz trzy liczby, które tworzą ciąg geometryczny, jeżeli wiadomo, że ich suma jest równa 42, a iloczyn jest równy 512.

2) Jaką liczbę należy dodać do każdej z liczb 1, 11, 111, aby powstałe sumy utworzyły ciąg geometryczny?

3) W sześciowyrazowym ciągu geometrycznym suma wyrazów o wskaźnikach nieparzystych jest równa 266, zaś o wskaźnikach parzystych jest równa 399. Wyznacz wyraz pierwszy i iloraz tego ciągu.

ODP.: 1) 32, 8, 2 lub 2, 8, 32; 2) $\frac{1}{9}$ ; 3) $a_1 = 32$, $q = \frac{3}{2}$

# SZEREG GEOMETRYCZNY

DLA JAKICH WARTOŚCI x ISTNIEJE SUMA SZEREGU GEOMETRYCZNEGO ZBIEŻNEGO? OBLICZ SUMĘ JEŻELI:

1) $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$

2) $1 + (1 + x)^2 + (1 + x)^4 + (1 + x)^6 + \ldots$

ODP.: 1) $x \in (-1,1)$, $S = \dfrac{1}{1 - x^2}$; 2) $x \in (-2,0)$, $S = \dfrac{-1}{x^2 + 2x}$