CIĄGI MATEMATYCZNE INDUKCJA MATEMATYCZNA

WEJDŹ

Marcin Bardziłowski

Ciąg nieskończony

Funkcję ***f*** określoną na zbiorze ***N*** o wartościach w zbiorze ***y*** nazywamy: CIĄGIEM NIESKOŃCZONYM

Przykład:

N	1	2	3	4	5
Y	♦	♦	●	❖	⊠

Wtedy:

f(1)= ♦

f(2)= ♦

f(3)= ●

f(5)= ⊠

Ciąg skończony

Niech ***A*** będzie skończonym wzorem początkowych liczb naturalnych:

$$A=\{1,2,3,\ldots,k\}$$

Funkcję ***f*** określoną na zbiorze ***A*** , o wartościach w zbiorze ***Y*** nazywamy: CIĄGIEM SKOŃCZONYM.

Przykład: $A=\{1,2,3\}$

N	1	2	3
Y	❖	♦	●

Wtedy:

f(1)= ❖

f(2)= ♦

f(3)= ●

Ciąg liczbowy

Jeżeli ***Y*** jest zbiorem liczbowym, to ciąg nazywamy:
CIĄGIEM LICZBOWYM.

Ciąg liczbowy można opisać wzorem:

a) Ogólnym: np. $$a_n = \frac{3+n}{2n+1}$$

b) Rekursywnym(rekurencyjnym): np. $$a_1 = 1$$ $$a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{a_n}$$

Monotoniczność ciągu

Rodzaje monotniczności ciągu:

(a_n) rosnący <=> $a_n < a_n+1$

(a_n) malejący <=> $a_n > a_n+1$

(a_n) staly <=> $a_n = a_n+1$

Monotoniczność ciągu

Przykład:

$$a_n = \frac{2-n}{n} \qquad a_{n+1} = \frac{2-(n+1)}{n+1} = \frac{1-n}{1+n}$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{2-n}{n} - \frac{1-n}{1+n} = \frac{2}{n(n+1)} > 0$$

$$a_n > a_{n+1}$$

Na mocy definicji ciąg a_n jest MALEJĄCY

Ograniczenie ciągu

Mówimy, że ciąg (a_n) jest ograniczony, jeśli:

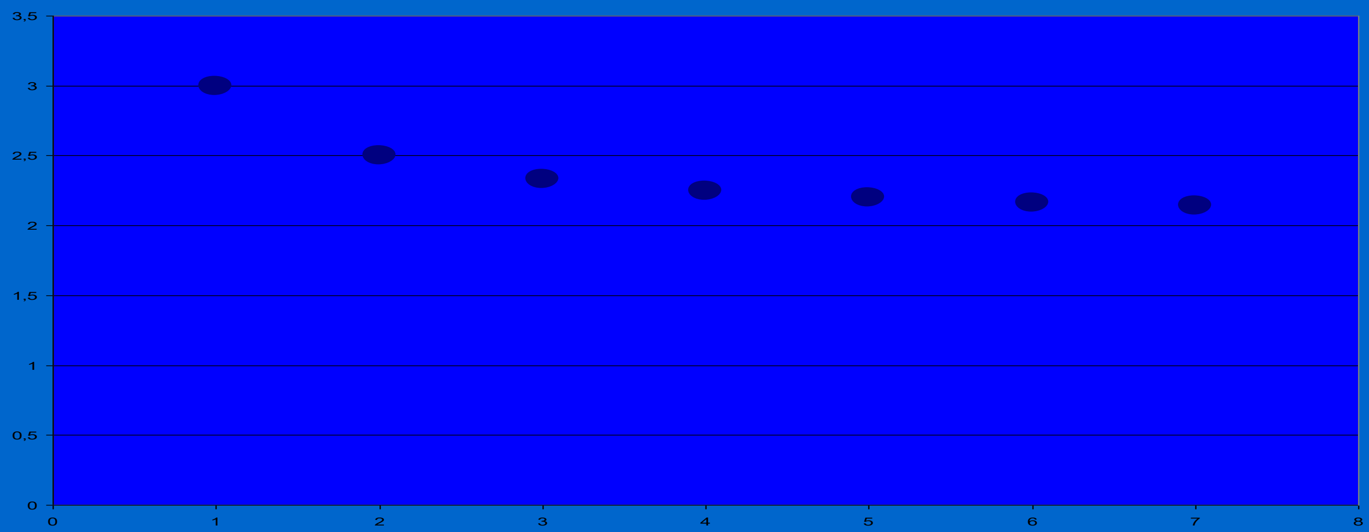
$$\bigvee_{m,M} \; \bigwedge_{n \in N} \quad m \leq a_n \leq M$$

Ograniczenie dolne

Ogrniczenie górne

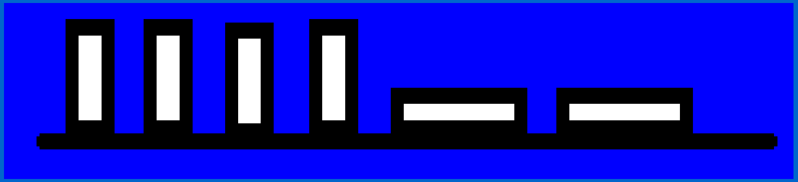
Ograniczenie ciągu

Zbadajmy ograniczenie malejącego ciągu $a_n = 2 + \frac{1}{n}$



Ciąg a_n jest malejący, zatem największą wartość osiąga dla n=1. Jest ograniczony „od góry" przez liczbę 3 i wszystkie większe oraz „z dołu" przez liczbę 2 i wszystkie mniejsze. Ograniczenie: $2 \leqslant a_n \leqslant 3$

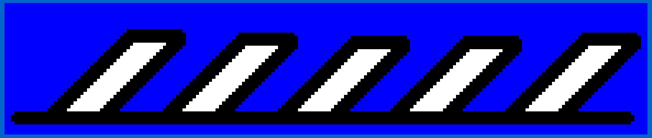
Indukcja matematyczna



Przyjmijmy, że kolejne klocki domina symbolizują liczby naturalne, zaś przewrócony klocek prawdziwość twierdzenia dla danej liczby naturalnej...

Indukcja matematyczna

Aby twierdzenie było prawdziwe dla liczb naturalnych muszą się przewrócić wszystkie klocki.



Aby tak było musi zachodzić:

1. Musi leżeć pierwszy klocek.

2. Klocek na dowolnym miejscu (n) musi spowodować przewrócenie klocka następnego (n+1)

Indukcja matematyczna

Twierdzenie: Niech $T(n)$ będzie twierdzeniem , w którym mowa o liczbie naturalnej.

Jeżeli istnieje liczba $n_0 \in N$ taka że:

1. Twierdzenie $T(no)$ jest prawdziwe

2. Dla każdej liczby naturalnej n ($n >$ lub $= n_0$), z prawdziwości twierdzenia $T(n)$ wynika prawdziwość tierdzenia $T(n+1)$ $\left(T(n) \Rightarrow T(n+1)\right)$, to twierdzenie $T(n)$ jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej $n >$ lub $= n_0$

Słowniczek

- dowód indukcyjny- dowód przeprowadzany metodą indukcyjną
- dedukcja - rozumowanie od ogółu do szczegółu
- indukcja - rozumowanie od szczegółu do ogółu

Indukcja matematyczna c.d.

Przykład:

Otrzymaj sumę liczb naturalnych od 1 do 100:

a). Sposób Gauss'a:

2 sumy
$$\begin{cases} 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 \\ 100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1 \end{cases}$$

$$\underbrace{\mathbf{101+101+\ldots\ldots\ldots\ldots+101+101}}_{100}$$

Indukcja matematyczna c.d.

$$2S = 100 * 101$$

$$2S = 10100$$

$$S = 5050$$

S - suma (patrz poprzednia strona)

Wniosek:

$$\bigwedge_{n \in N} \mathbf{1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Indukcja matematyczna c.d.

b). Udowodnienie prawdziwości metody Gauss’a dla liczb N metodą indukcji:

$$\bigwedge_{n \in N} 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

spr.

$n_0=1 \Rightarrow L=1$

$P = \frac{1*(1+1)}{2} = \frac{3}{2} = 1$

dla $n_0=1$ twierdzenie jest prawdziwe

Indukcja matematyczna c.d.

Założenie - T(n)

Teza - T(n+1)

Dowód(krok indukcyjny):

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$L = 1+2+3+\ldots+n+(n+1) = \ldots = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Na mocy indukcji matematycznej twierdzenie jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej **n** .