- Rachunek całkowy -

Prezentacja Pauliny Pawlak

Już starożytni znali pewne idee i metody zaliczane dziś do rachunku całkowego. Takimi **metodami**, z zachowaniem należytej precyzji logicznej, uczony grecki ARCHIMEDES (III w. Przed Chrystusem) obliczał objętości i pola powierzchni różnych brył.

Właściwy rozwój metod całkowych nastąpił w XVII w. i wiąże się z badaniami matematyka włoskiego F.B. CAVALIERIEGO, angielskiego J. WALLISA, astronoma niemieckiego J. KEPLERA. Okres ten zamykają prace I. NEWTONA oraz niemieckiego matematyka i filozofa G. W. LEIBNIZA, zawierające systematyczny wykład teorii i metod związanych z pojęciem całki, wprowadzające terminologię i oznaczenia, ukazujące związek rachunku całkowego z różniczkowym oraz praktyczne metody całkowania prostych typów funkcji. Dlatego też NEWTONA i LEIBNIZA uważa się za twórców rachunku całkowego.

W XVIII i XIX w. coraz szerzej używano całki w różnych działach fizyki. Uwolnienie teorii całki od nieścisłości i oparcie jej na pojęciu granicy jest zasługą francuskiego matematyka i fizyka
A. L. CAUCHY'EGO.

Dalszy rozwój teorii dotyczących całek to także prace Niemca G. F. B. RIEMANNA oraz Francuza H. LEBESGUE'A.

Rachunek całkowy dotyczy metod obliczania i własności całek (całka nieoznaczona, całka oznaczona itp.).

Znaczny wkład w uściślenie rachunku całkowego wniósł A.L. Cauchy.

Rachunek całkowy jest jednym z podstawowych narzędzi matematycznych fizyki i techniki (obok rachunku różniczkowego).

SPIS TRESCI

Funkcja pierwotna:

Funkcja pierwotna danej funkcji jednej zmiennej y=f(x), nazywamy taka funkcje F(x), której pochodna jest równa f(x).

$$F - \text{pierwotna do } f \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

PRZYKŁAD 1

PRZYKŁAD 2

TWIERDZENIE:

Jeżeli funkcje $F: D \to R$ i $G: D \to R$ są funkcjami pierwotnymi funkcji $f: D \to R$ to istnieje takie $C \in R$, że zachodzi:

$$G(x) = F(x) + C$$

TWIERDZENIE:

Funkcje pierwotne funkcji $f(x)$ różnią się co najwyżej o stałą. Zapis: $G(x) = F(x) + C$ oznacza rodzinę funkcji f.

DEFINICJA:

Zbiór wszystkich funkcji pierwotnych (rodzinę) funkcji f: D→R nazywamy *CAŁKĄ NIEOZNACZONĄ* funkcji f: D→R i oznaczamy:

$$\int f(x)dx$$

LEGENDA:

[c]-symbol całki
f -funkcja podcałkowa
d - wyznacza zmienną całkowania

PODSTAWOWE WZORY RACHUNKU CAŁKOWEGO

1. $\int 0dx = c$
2. $\int 1dx = [c]dx = x + C$
3. $\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C$
4. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ dla $n \neq -1$ i $x \in R_+$
5. $\int \sqrt{dx} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$ dla $x \in R_+$
6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg}x + C$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg}x + C$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$
11. $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \mathrm{arc\,tg}x + C = -\mathrm{arc\,ctg}x + C$
12. $\int e^x dx = e^x + C$
13. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
14. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $a>0$ i $a \neq 1$

PODSTAWOWE PRAWA CAŁKOWANIA

Calka iloczynu funkcji przez stala:
$$\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx$$

Calka sumy funkcji:
$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Calkowanie przez czesci:
$$\int u \cdot v'\,dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\,dx$$

więcej...

Calkowanie przez podstawianie:

Twierdzenie :

$t : X \to T$ – różniczkowalna $\wedge\ t = h(x)$

g ma w t funkcję pierwotną G

$\forall x \in X : f(x) = g(h(x)) \cdot h'(x)$

Teza :

$$\int \mathrm{f}(\mathrm{x})\,dx = G(h(x)) + C$$

więcej...

CAŁKA NIEOZNACZONA

TWIERDZENIE:

Jeżeli funkcja $F:D\to R$ jest funkcją pierwotną funkcji $f:D\to R$ i funkcja $G:D\to R$ jest funkcją pierwotną $g: D\to R$, to:

1. $\int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + C$

2. $\int (f-g)(x)dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx = F(x) - G(x) + C$

3. $\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx = k\cdot F(x) + C$

(Dowód twierdzenia polega na zróżniczkowaniu prawych stron równań)

ZADANIA

CAŁKOWANIE PRZEZ CZESCI

Twierdzenie: < o całkowaniu przez części >

Jeżeli funkcje f i g mają w przedziale D ciągłe pochodne f′ i g′ to zachodzi wzór:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

(Dowód twierdzenia polega na zróżniczkowaniu prawej strony równania)

PRZYKŁAD

ZADANIA

CAŁKOWANIE PRZEZ PODSTAWIENIE

Twierdzenie: < pierwsze o całkowaniu przez podstawienie t = h(x) >

Jeżeli:

1. Funkcja h(x) jest różniczkowalna w przedziale D i przekształca go na przedział T
2. Funkcja g(t) ma w przedziale T funkcję pierwotną G(t)
3. f(x) = g[h(x)] w przedziale D

to:

$$\int f(x)dx = G[h(x)] + C$$

PRZYKŁAD

Twierdzenie: < drugie o całkowaniu przez podstawienie x = φ(t) >

Jeżeli:

1. Funkcja jest różniczkowalna i różnowartościowa w przedziale T i przekształca go na przedział D.
2. Funkcja f ma w przedziale D funkcję pierwotną F

to prawdziwa jest na tym przedziale równość:

$$\int f(x)dx = \int f\left[\varphi\left(t\right)\right] \cdot \varphi^{/}\left(t\right)dt$$

ZADANIA

CAŁKOWANIE FUNKCJI WYMIERNYCH

I. Przy obliczaniu całek funkcji wymiernej skorzystać można z rozkładu tej funkcji na ułamki proste.

Definicja:

Funkcję wymierną postaci $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^n}$ nazywamy ułamki prostym.

PRZYKŁAD

II. Wśród pozostałych metod, obok omówionej już metody podstawienia istnieje także inna gdzie stosuje się dzielenie licznika (jedno lub wielomianu) przez mianownik (także jedno lub wielomianu).

PRZYKŁAD

III. Po wyliczeniu szeregu całek funkcji wymiernej gdzie $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ nasuwa się wniosek:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

który to można z powodzeniem stosować.

PRZYKŁAD

CAŁKA FUNKCJI NIEWYMIERNYCH

Przy obliczaniu całki funkcji niewymiernej korzysta się z metod omówionych w punkcie III. CALKOWANIE PRZEZ PODSTAWIENIE.

PRZYKŁAD 1

PRZYKŁAD 2

ZADANIA

CAŁKA OZNACZONA

Definicja:

Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale <a,b> i F jej funkcją pierwotną..
Liczbę F(b) – F(a) nazywamy całką oznaczoną funkcji f na przedziale <a,b> i oznaczamy:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Liczby a i b nazywamy odpowiednio dolną i górną granicą całkowania.

PRZYKŁAD

Twierdzenie:

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

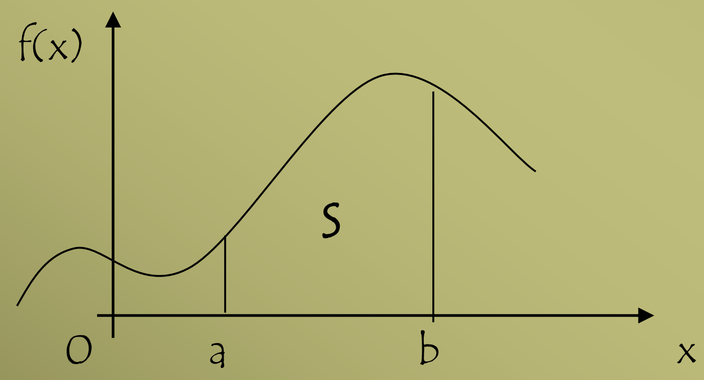
2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3. Jeżeli a< c< b, to: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA CAŁKI OZNACZONEJ

Twierdzenie:

Jeżeli funkcja f jest ciągła i nieujemna na przedziale domkniętym <a,b>, to całka oznaczona z funkcji f jest równa polu figury ograniczonej prostymi x = a, x = b, osią OX i krzywą y = f(x).



Obszar S przedstawia trapez krzywoliniowy.

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

GEOMETRYCZNE ZASTOS. CAŁKI OZNACZONEJ

CAŁKA NIEWŁASCIWA

Twierdzenie:

Funkcja ciągła ma całkę oznaczoną w przedziale domkniętym <a,b> jeśli funkcja f jest określona na przedziale <a,+∞) i ciągła, to jest całkowalna w każdym przedziale <a,t> i <a,+∞).

Granicę skończoną nazywamy całą niewłaściwą funkcji f i oznaczamy:

$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx$$

co możemy zapisać jako:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

PRZYKŁAD

RACHUNEK CAŁKOWY - ZADANIA

Zadanie 1:

Oblicz całkę nieoznaczoną. :

a) $\int 3x^2 dx$

b) $\int (x-1)^2 dx$

c) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{2} dx$

d) $\int x^3 - 3\cos x \, dx$

e) $\int \left(2e^x - \sqrt{x}\right) dx$

RACHUNEK CAŁKOWY – ZADANIA (c.d.)

Zadanie 2:

Oblicz całkę nieoznaczoną korzystając z metody całkowania przez części:

a) $\int x \cdot e^x dx$

b) $\int \sqrt{x} \cdot x^2 dx$

c) $\int x^2 \cdot \sin x \, dx$

d) $\int \cos^2 x \, dx$

Zadanie 3:

Oblicz samodzielnie stosując metodę podstawiania:

a) $\int \cos(x+2) \, dx$

b) $\int (x+1)^{1998} \, dx$

c) $\int x\sqrt{x^2 - 3} \, dx$

RACHUNEK CAŁKOWY – ZADANIA (c.d.)

Zadanie 4:

Wyznacz całkę funkcji wymiernej:

a) $\int \frac{11x - 1}{2x^2 - 5x - 3} dx$

b) $\int \frac{3x - 4}{x^2 - x - 6} dx$

c) $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 1} dx$

d) $\int \frac{4x + 6}{x^2 + 3x} dx$

e) $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 2} dx$

RACHUNEK CAŁKOWY – ZADANIA (c.d.)

Zadanie 5:

Wyznacz całkę oznaczoną podanych funkcji:

a) $$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

b) $$\int_2^{3} \left(x^2 - 4x\right) dx$$

c) $$\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \cos^2 x \, dx$$

d) $$\int_0^{1} \sqrt{x+1}\, dx$$

e) $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx$$

KONIEC PREZENTACJI

PRZYKŁAD 1:

$f(x) = x$ $\quad$ $f: R \to R$

1. Funkcją pierwotną funkcji f jest:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 \qquad F: R \to R$$

bo: $F'(x) = (\frac{1}{2}x^2)' = x = f(x)$

2. Funkcją pierwotną funkcji f jest również:

$$G(x) = x^2 + e \qquad F: R \to R$$

bo: $G'(x) = (x^2 + e)' = x = f(x)$

POWRÓT

PRZYKŁAD 2:

$f(x) = x^2$ $\quad$ $f: R \rightarrow R$

1. Funkcją pierwotną funkcji f jest:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4 \qquad F: R \rightarrow R$$

bo: $F'(x) = (\frac{1}{3}x^3 + 4) = x^2 = f(x)$

2. Funkcja f może posiadać również inną funkcję pierwotną:

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3 \qquad G: R \rightarrow R$$

bo: $G'(x) = (\frac{1}{3}x^3 + 4) = x^2 = f(x)$

POWRÓT

CAŁKA NIEOZNACZONA - ZADANIA

Zadanie:

Wyznacz całkę nieoznaczoną:

$$\int\left(x^3+2x-1\right)dx=\int x^3dx+\int 2xdx-\int 1dx=\frac{x^{3+1}}{3+1}+2\int xdx-x=\frac{x^4}{4}+2\cdot\frac{1}{2}x^2-x=$$

$$=\frac{x^4}{4}+x^2-x=\frac{1}{4}x^4+x^2-x+C$$

Zadanie:

Wyznaczyć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = x-x^3$ do wykresu której należy punkt P(-1,2).

- Wyznaczamy wszystkie funkcje pierwotne funkcji f(x): $\int f(x)dx=\int x-x^3dx=\int xdx-\int x^3dx=\frac{1}{2}x^2-\frac{x^4}{4}=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4+C$
- Otrzymaliśmy rodzinę krzywych $G(x)=-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$
- Aby punkt należał do krzywej musi spełniać jej równanie:

$$2=\frac{1}{2}\cdot(-1)^2-\frac{1}{4}\cdot(-1)^4+C$$

$$2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+C$$

$$C=2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

$$C=\frac{7}{4}$$

(**ODP**: Szukana funkcja ma postać $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4+\frac{7}{4}$)

POWRÓT

Przykład:

Oblicz: $\int x \cdot \cos x \, dx$

Mamy do czynienia z iloczynem funkcji podcałkowych. Jeżeli jedną z nich potraktujemy jako pochodną pewnej innej funkcji np.:

$g'(x) = \cos x$

A drugą jako zwyczajną funkcję np.: $f(x) = x$

Możemy zastosować wzór.
Najpierw uporządkujemy funkcje i ich pochodne niezbędne do podstawienia do wzoru.

$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$g'(x) = \cos x$	$g(x) = \sin x$

Podstawiając do wzoru otrzymamy:

$$\int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx = x \cdot \sin x + \cos x + C$$

POWRÓT

Zadania:

OBLICZ:

1. $$\int x\cdot \cos x\,dx = \left\{\begin{matrix} f(x)=x & \vdots\ f'(x)=1 \\ g'(x)=\cos x & \vdots\ g(x)=\sin x \end{matrix}\right\} = x\cdot\sin x - \int 1\cdot \sin x\,dx = x\cdot \sin x + \cos x + C$$

2. $$\int x^2\cdot e^x\,dx = \left\{\begin{matrix} f(x)=x^2 & \vdots\ f'(x)=2x \\ g'(x)=e^x & \vdots\ g(x)=e^x \end{matrix}\right\} = x^2\cdot e^x - \int 2x\cdot e^x\,dx = x^2\cdot e^x - 2\int x\cdot e^x\,dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} f(x)=x & \vdots\ f'(x)=1 \\ g'(x)=e^x & \vdots\ g(x)=e^x \end{matrix}\right\} = x^2\cdot e^x - 2\cdot\left(x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x\,dx\right) = x^2\cdot e^x - 2\cdot\left(x\cdot e^x - \int e^x\,dx\right) =$$

$$= x^2\cdot e^x - 2x\cdot e^x + 2e^x + C$$

POWRÓT

Przykład:

Oblicz: $\int (2x+3)^6 dx$

Podstawiamy za t = 2x+3, czyli h(x) = 2x+3. Stąd h′(x) = 2, dt = 2dx, ponieważ :

$$(2x+3)^6 = \frac{1}{2}(2x+3)^6 \cdot 2$$

Więc: $g(t) = \frac{1}{2} t^6$

Mamy tu D = T = (-∞ ; +∞). Korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie, otrzymujemy:

$$\int (2x+3)^6 dx = \int \frac{1}{2} t^6 dt = \frac{1}{14} t^7 + C = \frac{1}{14}(2x+3)^7 + C$$

POWRÓT

ZADANIA:

Oblicz całkę nieoznaczoną korzystając z metody całkowania przez podstawienie:

1. $$\int \sin 2x\, dx = \left\{\begin{array}{l} t = 2x \\ 1dt = 2dx \\ \frac{1}{2}dt = dx \end{array}\right\} = \sin t \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \sin t\, dt = -\frac{1}{2}\cos t = -\frac{1}{2}\cdot 2x + C$$

2. $$\int \sqrt{4x+2}\, dx = \left\{\begin{array}{l} t = 4x+2 \\ dt = 4dx \\ \frac{1}{4}dt = dx \end{array}\right\} = \int \sqrt{t}\cdot\frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}\int \sqrt{t}\, dt = \frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{2}}\, dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}\cdot t^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot(4x+2)^{\frac{3}{2}} + C$$

3. $$\int \cos\frac{5}{2}x\, dx = \left\{\begin{array}{l} x = \frac{2}{5}t \\ dx = \frac{2}{5}dt \\ t = \frac{5}{2}x \end{array}\right\} = \int \cos\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}t\right)\frac{2}{5}dt = \frac{2}{5}\int \cos t\, dt = \frac{2}{5}\cdot\sin t = \frac{2}{5}\cdot\sin\frac{5}{2}x + C$$

POWRÓT

Przykład 1:

Dokonaj rozkładu na ułamki proste funkcji: $f(x) = \dfrac{2x+5}{x^2+x-2}$

• Dążymy do przedstawienia dwumianu w mianowniku jako iloczynu dwóch jednomianów, wyznaczając pierwiastki równania $x^2 + x - 2$ otrzymujemy:

$$\frac{2x+5}{x^2+x-2} = \frac{2x+5}{(x+2)\cdot(x-1)}$$

• Rozkładamy funkcję na sumę ułamków prostych:

$$\frac{2x+5}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-1)}$$

• Dodajemy otrzymane ułamki sprowadzając do wspólnego mianownika:

$$\frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-1)} = \frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{(A+B)x-A+2B}{(x+2)(x-1)}$$

• Mamy więc:

$$\frac{2x+5}{(x+2)(x-1)} = \frac{(A+B)x-A+2B}{(x+2)(x-1)}$$

Przykład 1 (c.d.) :

Ułamki te są sobie równe wtedy i tylko wtedy gdy:
$2x + 5 = (A + B)x - A + 2B$

Jeżeli wielomiany tego samego stopnia są sobie równe muszą mieć takie same współczynniki przy odpowiednich potęgach.
Więc:

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ 2B - A = 5 \end{cases}$$

Rozwiązujemy otrzymany układ równań :

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{3} \\ B = \frac{7}{3} \end{cases}$$

- Podstawiając (do punktu 2) otrzymamy:

$$\frac{2x+5}{x^2+x-2} = -\frac{1}{3(x+2)} + \frac{7}{3(x-1)}$$

POWRÓT

Przykład 2:

Wyznacz całkę nieoznaczoną: $\int \frac{x+2}{4x-1}\,dx$

Dzielimy licznik przez mianownik:

$(x+2):(4x-1) = \frac{1}{4}$

$x - \frac{1}{4}$

____

$= \frac{9}{4}$

Ponieważ w ilorazie dzielnik jest taki sam jak mianownik ewentualnej reszty będącej ułamkiem zwykłym np.:

$$\frac{15}{4} = 3 + \frac{3}{4}$$

$$\frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2}$$

Przykład 2 (c.d.) :

Wynik dzielenia naszych jednomianów będący inną postacią funkcji podcałkowej zapisujemy:

$$\int \frac{x+2}{4x-1}dx = \int \left(\frac{1}{4} + \frac{\frac{9}{4}}{4x-1} \right) dx$$

Obliczenie takiej całki jest już proste:

$$\int \left(\frac{1}{4} + \frac{\frac{9}{4}}{4x-1} \right) dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{9}{4}\int \frac{1}{4x-1}dx = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{4}\ln|4x-1| + C$$

POWRÓT

Przykład:

Oblicz: $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

Zauważmy iż licznik jest pochodną mianownika

$(x^2+1)' = 2x$

Zatem można skorzystać z wniosku:

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln|x^2+1| + C$$

POWRÓT

Przykład 1:

Oblicz:

$$\int \sqrt{3x+1}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} 3x+1 = t \\ 3dx = & dt \\ dx = & \frac{1}{3}dt \end{array} \right\} = \int \sqrt{t}\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{t^3} = \frac{2}{9}\cdot\sqrt{(3x+1)^3} + C$$

PRZYKŁAD 2

POWRÓT

Przykład 2:

Oblicz:

$$\int \sqrt{3x+1}\,dx = \left\{\begin{array}{l} t^2 = 3x+1 \\ 2tdt = 3dx \\ dx = \frac{2}{3}tdt \end{array}\right\} = \int t \cdot \frac{2}{3}tdt = \frac{2}{3}\int t^2 dt = \frac{2}{3}\cdot\frac{t^3}{3} = \frac{2}{9}t^3 = \frac{2}{9}\left(\sqrt{3x+1}\right)^3 + C$$

POWRÓT

ZADANIA:

Wyznacz całkę funkcji niewymiernej:

1. $$\int \frac{1}{\sqrt{3-5x}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t^2 = 3x - 5x \\ 2tdt = -5dx \\ dx = -\frac{2}{5}tdt \end{array} \right\} = \int \frac{1}{t}\cdot -\frac{2}{5}tdt = -\frac{2}{5}\int dt = -\frac{2}{5}t + C$$

2. $$\int x\sqrt{2x-3}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{2x-3} \\ t^2 = 2x-3 \\ 2tdt = 2dx \\ dx = tdt \\ z \quad t^2 = 2x-3 \\ x = \frac{t^2+3}{2} \end{array} \right\} = \int \frac{t^2+3}{2}\cdot t\cdot tdt = \frac{1}{2}\int \left(t^2+3\right)\cdot t^2dt = \frac{1}{2}\int \left(t^2+3t^2\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int t^4dt + 3\int t^2dt\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{t^5}{5} + 3\cdot\frac{t^3}{3}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{t^5}{5} + \frac{5t^3}{5}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^5+5t^3}{5} = \frac{t^5+5t^3}{10} + C$$

POWRÓT

Przykład:

Oblicz:

1. $$\int_1^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

2. $$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln|x|\right]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

Całka oznaczona zachowuje wszystkie „własności" (wzory) całki nieoznaczonej.

POWRÓT

TWIERDZENIE:

Niech y = f(x) będzie funkcją ciągłą na przedziale <a,b> wtedy:

1. Objętość bryły obrotowej powstałej poprzez obrót obszaru ograniczonego łukiem krzywej y = f(x), prostymi x = a i x = b oraz osią OX dookoła tej osi wyraża się wzorem:

$$V = \Pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

2. Pole powierzchni bocznej:

$$P = 2\Pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx$$

3. Długość łuku krzywej:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx$$

POWRÓT

Przykład:

Oblicz: $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t x^{-2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{t}+1\right) = 1$$

POWRÓT