

I Liceum Ogólnokształcące im. Bolesława Krzywoustego w Słupsku
Scientia est nostra vis

M A T E M A T Y K A

**Próbny pisemny egzaminu dojrzałości – profil matematyczno-fizyczny
 1 marca 2003 roku.**

1. Dane są zbiory:

$$A = \{x \in \mathbb{R}; x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 32 \geq 0\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}; \log_{0,1}(4 - x^2) - \log_{0,1}(6x - 3) < 0\},$$

$$C = \left\{x \in \mathbb{R}; \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^x < 4\right\}$$

Wyznaczyć zbiór $(A \setminus B) \cap C$

2. Dana jest elipsa $4x^2 + 9y^2 = 36$

- Wpisać w elipsę prostokąt o największym polu. Wyznaczyć to pole.
- Obliczyć objętość figury powstałej przez obrót elipsy dookoła osi OX.

3. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 \cdot e^x$

- Zbadać przebieg zmienności i narysować wykres tej funkcji
- Przedyskutować istnienie i liczbę rozwiązań równania $f(x) - 1 = m$ w zależności od parametru $m \in \mathbb{R}$.

4. W prawidłowym ostrosłupie czworokątnym kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ma miarę α . Niech R będzie promieniem kuli opisanej, a r promieniem kuli wpisanej w ten ostrosłup.

a) Wyznaczyć $\frac{R}{r}$

b) (*) Wykazać, że $\frac{R}{r} \geq \sqrt{2} + 1$

5. Pierwiastki równania $\sin^2 \frac{\pi \cdot x}{2} + 2 \cos \frac{\pi \cdot x}{2} = 1$ należące do przedziału $(0, 2\pi)$, są wartościami zmiennej losowej. Zmienna losowa przyjmuje wartości,brane w kolejności rosnącej, z prawdopodobieństwem tworzącym ciąg geometryczny, którego pierwszy wyraz jest równy

$$a_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 - \sqrt{3}n + e} - n}{7(n + \pi)}$$

Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej.