I Liceum Ogólnokształcące im. Bolesława Krzywoustego w Słupsku
Scientia est nostra vis

M A T E M A T Y K A

Próbny pisemny egzaminu dojrzałości – profil matematyczno-fizyczny
2 marca 2002 roku.

1. Zbadać przebieg zmienności funkcji $f(x)=x|\ln x-2|$, gdzie $x\in[1,+\infty)$
   i naszkicować jej wykres.
   Na podstawie wykresu określić liczbę rozwiązań równania $x|\ln x-2|=m,\ \ x\in[1,+\infty)$.

2. Znaleźć równania stycznych do elipsy $5x^2+4y^2=20$ prostopadłych do prostej $x+y-4=0$.
   Obliczyć pole czworokąta, którego wierzchołkami są punkty styczności elipsy i wyznaczonych prostych oraz ogniska elipsy.

3. Sprawdzić, że wielomian $(x-a)^{2n}+(x-b)^n-1$ jest podzielny przez wielomian $x^2-(a+b)x+ab$, gdzie a jest rozwiązaniem równania $\log_x 2x\cdot\log_2 x=2$ zaś b jest wartością argumentu x, dla której funkcja $f(x)=(x-1)^2\cdot\sqrt{x^2-2x+3}$ osiąga minimum.

4. W urnie jest 12 kul: białych, czarnych i niebieskich w stosunku ilościowym *a: b: c*, gdzie $a=\int\limits_0^1 xe^x\,dx,\ b=\int\limits_{-2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$ zaś c jest największą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $2^{\frac{1}{1-x}}\le\cos\frac{\pi}{4}$.
   Z urny losuje się bez zwracania 5 kul. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby wylosowanych kul białych.

5. W sześcian o krawędzi jeden wpisano kulę. Płaszczyzna Q jest styczna do tej kuli i prostopadła do przekątnej sześcianu. Obliczyć objętość ostrosłupa wyznaczonego przez powierzchnię boczną sześcianu i płaszczyznę Q.