MATEMATYKA
Tematy pisemnego egzaminu dojrzałości
obowiązujące w liceach ogólnokształcących w klasach, w których realizowany był
program dla profilu matematyczno-fizycznego
w dniu 7 maja 2003 roku o godzinie 9^{00}

Zadanie 1

Punkt $P=\left(\frac{m}{2},\frac{m}{2}\right)$ leży na prostej l nachylonej do osi OX pod kątem $135°$. Prosta k przechodzi przez wierzchołek paraboli $y=mx^2-2mx+1$ oraz przez punkt, w którym ta parabola przecina oś OY. Oblicz, dla jakich wartości m suma kwadratów współrzędnych punktu przecięcia się prostych l i k jest równa 5?

Zadanie 2

Dana jest funkcja $f(x)=\sqrt{2}\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+x\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)\right]$.

a) Uzasadnij, że dla każdej rzeczywistej liczby x prawdziwa jest równość $f(x)=\sin 2x$.
b) Rozwiąż równanie $2[f(x)]^2+f(x)=0$.
c) Narysuj wykres funkcji $y=f(x)$ i na jego podstawie podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x)<\frac{1}{2}$, gdy $x\in\langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$.

Zadanie 3

a) Wyznacz równanie zbioru środków wszystkich okręgów stycznych wewnętrznie do okręgu o równaniu $(x-2)^2+y^2=4$ i do prostej $y=0$.
b) Przedstaw w układzie współrzędnych na płaszczyźnie interpretację geometryczną zadania.
c) Oblicz pole figury ograniczonej wyznaczoną krzywą, osią OX i prostymi $x=1$ i $x=3$.

Zadanie 4

W stożek, którego przekrojem osiowym jest trójkąt równoboczny o boku długości ***2a*** wpisano walec o największej objętości. Wyznacz stosunek długości wysokości tego walca do długości promienia podstawy stożka.

Zadanie 5

a) Oblicz, dla jakich x liczby: $1+\log_2 3$, $\log_x 36$, $\frac{4}{3}\log_8 6$ w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny?

b*) Wykaż, że jeżeli liczby dodatnie $a_1,a_2,a_3,...a_n$ tworzą ciąg geometryczny, to $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n=(a_1\cdot a_n)^{\frac{n}{2}}$.