INFORMATOR
o **egzaminie maturalnym** z **matematyki**

jako przedmiotu dodatkowego (poziom rozszerzony)

od roku szkolnego 2022/2023

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Warszawa 2021

Zespół redakcyjny:
Hubert Rauch (CKE)
Mariusz Mroczek (CKE)
Marian Pacholak (OKE Warszawa)
dr Wioletta Kozak (CKE)
dr Marcin Smolik (CKE)
dr Roman Wosiek
Ewa Ludwikowska (OKE Gdańsk)
Joanna Berner (OKE Warszawa)
Piotr Ludwikowski (OKE Kraków)

Recenzenci:
prof. dr hab. Zbigniew Marciniak (UW)
dr hab. Maciej Borodzik (UW)
Ewa Dolaczyńska (recenzja nauczycielska)
Agata Górniak (recenzja nauczycielska)
dr Tomasz Karpowicz (recenzja językowa)

Informator został opracowany przez Centralną Komisję Egzaminacyjną we współpracy z okręgowymi komisjami egzaminacyjnymi.

Centralna Komisja Egzaminacyjna
ul. Józefa Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. 22 536 65 00
sekretariat@cke.gov.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Gdańsku
ul. Na Stoku 49, 80-874 Gdańsk
tel. 58 320 55 90
komisja@oke.gda.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Jaworznie
ul. Adama Mickiewicza 4, 43-600 Jaworzno
tel. 32 616 33 99
oke@oke.jaworzno.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie
os. Szkolne 37, 31-978 Kraków
tel. 12 683 21 99
oke@oke.krakow.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łomży
al. Legionów 9, 18-400 Łomża
tel. 86 473 71 20
sekretariat@oke.lomza.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łodzi
ul. Ksawerego Praussa 4, 94-203 Łódź
tel. 42 634 91 33
sekretariat@lodz.oke.gov.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
ul. Gronowa 22, 61-655 Poznań
tel. 61 854 01 60
sekretariat@oke.poznan.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Warszawie
pl. Europejski 3, 00-844 Warszawa
tel. 22 457 03 35
info@oke.waw.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna we Wrocławiu
ul. Tadeusza Zielińskiego 57, 53-533 Wrocław
tel. 71 785 18 94
sekretariat@oke.wroc.pl

Spis treści

1. Opis egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym

WSTĘP

Matematyka jest jednym z obowiązkowych przedmiotów na egzaminie maturalnym. Wszyscy zdający przystępują do egzaminu z matematyki na poziomie podstawowym. Każdy maturzysta może również przystąpić do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym jako przedmiotu dodatkowego.

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym sprawdza, w jakim stopniu zdający spełnia wymagania określone w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla szkoły ponadpodstawowej[1].

Podstawa programowa dzieli wymagania na ogólne i szczegółowe. Wymagania ogólne mają podstawowe znaczenie, gdyż syntetycznie ujmują nadrzędne cele kształcenia w nauczaniu matematyki. Wymagania szczegółowe odwołują się do ściśle określonych wiadomości i konkretnych umiejętności.

Informator o egzaminie maturalnym z matematyki od roku szkolnego 2022/2023 jest podzielony na dwie części, zamieszczone jako osobne pliki.

CZĘŚĆ PIERWSZA zawiera:
- szczegółowy opis egzaminu maturalnego z matematyki na **poziomie podstawowym**
- przykładowe zadania egzaminacyjne (wraz z rozwiązaniami oraz zasadami oceniania) na poziomie podstawowym.

CZĘŚĆ DRUGA zawiera:
- szczegółowy opis egzaminu maturalnego z matematyki na **poziomie rozszerzonym**
- przykładowe zadania egzaminacyjne (wraz z rozwiązaniami oraz zasadami oceniania) na poziomie rozszerzonym.

CZĘŚĆ PIERWSZA jest dostępna tutaj.

Informator prezentuje przykładowe zadania egzaminacyjne wraz z rozwiązaniami. Do każdego zadania dodano wykaz wymagań ogólnych i szczegółowych z podstawy programowej kształcenia ogólnego, którym odpowiada dane zadanie. Zadania w *Informatorze* nie ilustrują wszystkich wymagań z zakresu matematyki na poziomie rozszerzonym określonych w podstawie programowej, nie wyczerpują również wszystkich typów zadań, które mogą wystąpić w arkuszu egzaminacyjnym. Tylko realizacja wszystkich wymagań z podstawy programowej, zarówno ogólnych, jak i szczegółowych, może zapewnić właściwe

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 stycznia 2018 r w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum, oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2018 r. poz. 467, z późn. zm.).

przygotowanie w zakresie matematyki, w tym – właściwe przygotowanie do egzaminu maturalnego.

Przed przystąpieniem do dalszej lektury *Informatora* warto zapoznać się z ogólnymi zasadami obowiązującymi na egzaminie maturalnym od roku szkolnego 2022/2023. Są one określone w rozporządzeniu Ministra Edukacji i Nauki z dnia 26 lutego 2021 r. w sprawie egzaminu maturalnego (Dz. U. poz. 482) oraz – w skróconej formie – w części ogólnej *Informatora o egzaminie maturalnym od roku szkolnego 2022/2023*, dostępnej na stronie internetowej Centralnej Komisji Egzaminacyjnej (https://cke.gov.pl/) i na stronach internetowych okręgowych komisji egzaminacyjnych.

ZADANIA NA EGZAMINIE

Zadania na egzaminie maturalnym z matematyki na poziomie rozszerzonym będą wyłącznie zadaniami otwartymi.

Zadania otwarte to takie, w których zdający samodzielnie formułuje odpowiedź. Wśród zadań otwartych na egzaminie maturalnym z matematyki znajdą się m.in.:

- zadania krótkiej odpowiedzi, wymagające zapisania przeprowadzonego rozumowania zwykle w kilku, w dwóch lub trzech krokach
- zadania rozszerzonej odpowiedzi, wymagające utworzenia strategii rozwiązania problemu matematycznego, jej realizacji i weryfikacji uzyskanego wyniku.

Przedstawione przez zdającego rozwiązanie zadania otwartego, w którym zdający m.in. oblicza, wyznacza, wyprowadza, uzasadnia, wykazuje, musi prezentować pełny tok rozumowania, uwzględniać warunki zadania, a także odwoływać się do twierdzeń matematycznych i własności odpowiednich obiektów matematycznych.

Wszystkie zadania egzaminacyjne będą sprawdzały poziom opanowania umiejętności opisanych w następujących wymaganiach ogólnych w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla szkoły ponadpodstawowej (w nawiasach zapisano numery celów kształcenia podstawy programowej):

- sprawność rachunkowa (I)
- wykorzystanie i tworzenie informacji (II)
- wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (III)
- rozumowanie i argumentacja (IV).

Zadania egzaminacyjne będą dotyczyły następujących obszarów tematycznych matematyki (w nawiasach zapisano numery treści nauczania podstawy programowej):

- liczby rzeczywiste, wyrażenia algebraiczne, równania i nierówności, układy równań (I, II, III, IV)
- funkcje, ciągi, trygonometria, optymalizacja i rachunek różniczkowy (V, VI, VII, XIII)
- planimetria, geometria analityczna, stereometria (VIII, IX, X)
- kombinatoryka, rachunek prawdopodobieństwa i statystyka (XI, XII).

Aby sprawdzić opanowanie przez zdających wymagania ogólnego „IV. rozumowanie i argumentacja”, wśród zadań egzaminacyjnych znajdą się zadania na dowodzenie, wymagające od zdającego przeprowadzenia dowodu matematycznego. W celu sprawdzenia opanowania przez zdających wymagania ogólnego „III. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych” w *Informatorze* znajdą się również zadania z kontekstem praktycznym/realistycznym. Zadania tego typu będą miały uproszczone założenia, tzn. będą pomijały niektóre rzeczywiste warunki. Dzięki takiej idealizacji zagadnienia będzie można łatwiej zbudować jego adekwatny model matematyczny, który – po pierwsze – będzie opisywał istotę zagadnienia, po drugie – będzie korzystał z narzędzi dostępnych na danym etapie nauczania, a po trzecie – nie będzie wymagał specjalistycznej wiedzy z danego kontekstu.

OPIS ARKUSZA EGZAMINACYJNEGO

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym trwa 180 minut[2].

W arkuszu egzaminacyjnym znajdzie się od 10 do 14 zadań otwartych.

Łączna liczba punktów, jakie można uzyskać za prawidłowe rozwiązanie wszystkich zadań w arkuszu, jest równa 50.

W arkuszu egzaminacyjnym będą występowały wiązki zadań lub pojedyncze zadania. Wiązka zadań to zestaw od dwóch do czterech zadań występujących we wspólnym kontekście tematycznym, przy czym każde z zadań wiązki można rozwiązać niezależnie od rozwiązania innych zadań w danej wiązce. Wiązka zadań będzie składać się z zadań otwartych.

[2] Czas trwania egzaminu może zostać wydłużony w przypadku zdających ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi, w tym niepełnosprawnych, oraz w przypadku cudzoziemców. Szczegóły są określane w *Komunikacie dyrektora Centralnej Komisji Egzaminacyjnej w sprawie szczegółowych sposobów dostosowania warunków i form przeprowadzania egzaminu maturalnego* w danym roku szkolnym.

ZASADY OCENIANIA

Zadania otwarte

Za poprawne rozwiązanie zadania otwartego będzie można otrzymać maksymalnie 2, 3, 4, 5 lub 6 punktów. Za każde poprawne rozwiązanie, inne niż opisane w zasadach oceniania, można przyznać maksymalną liczbę punktów, o ile rozwiązanie jest merytorycznie poprawne, zgodne z poleceniem i warunkami zadania.

Zadania otwarte mogą być krótkiej odpowiedzi lub rozszerzonej odpowiedzi.

Zadania otwarte są oceniane – w zależności od maksymalnej liczby punktów, jaką można uzyskać za rozwiązanie danego zadania – zgodnie z poniższymi zasadami:

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 2 pkt:

  2 pkt – rozwiązanie poprawne.
  1 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci.
  0 pkt – rozwiązanie, w którym nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, albo brak rozwiązania.

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 3 pkt:

  3 pkt – rozwiązanie poprawne.
  2 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci.
  1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania.
  0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania.

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 4 pkt:

  4 pkt – rozwiązanie poprawne.
  3 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci.
  2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania.
  1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp, ale konieczny do rozwiązania zadania.
  0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 5 pkt:

  5 pkt – rozwiązanie poprawne.
  4 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, jednak dalsza część rozwiązania zadania zawiera usterki (np. błędy rachunkowe, zgubienie rozwiązań, brak wyboru właściwych rozwiązań).
  3 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało dalej dokończone lub w dalszej części rozwiązania wystąpiły błędy merytoryczne.
  2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania.
  1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp, ale konieczny do rozwiązania zadania.
  0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania.

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 6 pkt:

  6 pkt – rozwiązanie poprawne.
  5 pkt – rozwiązanie, w którym zostały bezbłędnie pokonane zasadnicze trudności zadania, jednak dalsza część rozwiązania zadania zawiera usterki (np. błędy rachunkowe, zgubienie rozwiązań, brak wyboru właściwych rozwiązań).
  4 pkt – rozwiązanie, w którym zostały bezbłędnie pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało dalej dokończone lub w dalszej części rozwiązania wystąpiły błędy merytoryczne.
  3 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy lub usterki.
  2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania.
  1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp, ale konieczny do rozwiązania zadania.
  0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania.

W rozwiązaniu zadań otwartych wyróżniony został najważniejszy etap, nazywany pokonaniem zasadniczych trudności zadania. Przyjęto zasadę, że za pokonanie zasadniczych trudności zadania przyznaje się co najmniej połowę punktów, jakie można otrzymać za bezbłędne rozwiązanie danego zadania. Przed pokonaniem zasadniczych trudności zadania wyróżnia się jeszcze jeden etap (w przypadku zadań za 3 pkt) lub dwa etapy poprzedzające (w przypadku zadań za 4 i więcej pkt): dokonanie istotnego postępu w rozwiązaniu zadania oraz/lub dokonanie niewielkiego postępu, który jest konieczny do rozwiązania zadania.

Etapy rozwiązania dla każdego zadania będą opisane w zasadach oceniania dla danego zadania. Ponadto dla różnych sposobów rozwiązania jednego zadania te same etapy będą opisywały w zasadach oceniania jakościowo równoważny postęp na drodze do rozwiązania zadania.

WYBRANE OZNACZENIA I SYMBOLE MATEMATYCZNE

W zadaniach z matematyki na poziomie podstawowym i rozszerzonym mogą być stosowane następujące oznaczenia i symbole matematyczne:

- $\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych
- $\mathbb{Z}$ – zbiór liczb całkowitych
- $\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych
- $\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych
- $A \cup B$ – suma zbiorów A oraz B
- $A \cap B$ – iloczyn zbiorów A i B (część wspólna zbiorów A i B)
- $A \setminus B$ – różnica zbiorów A i B
- $A \subset B$ – zbiór A jest podzbiorem zbioru B
- $x \in A$ – element x należy do zbioru A
- $[a,b]$ – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a \leq x \leq b$
  $[a,b)$ – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a \leq x < b$
  $(a,b]$ – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a < x \leq b$
  (a,b) – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a < x < b$
  Krańce przedziałów domkniętych zdający może oznaczać także – odpowiednio:
  $\langle a,b \rangle$, $\langle a,b)$, $(a,b\rangle$.

Ponadto w zadaniach z matematyki na poziomie rozszerzonym mogą być stosowane następujące symbole i oznaczenia matematyczne:

- $\wedge$ – spójnik logiczny „i”, np. $p \wedge q$ oznacza zdanie: „p i q”
- $\vee$ – spójnik logiczny „lub”, np. $p \vee q$ oznacza zdanie: „p lub q”
- $p \Longrightarrow q$ – oznacza zdanie: „jeśli p, to q”
- $p \Leftrightarrow q$ – oznacza zdanie: „p wtedy i tylko wtedy, gdy q”
- $a|b$ – a jest dzielnikiem b
- $\emptyset$ – zbiór pusty.

MATERIAŁY I PRZYBORY POMOCNICZE NA EGZAMINIE Z MATEMATYKI

Materiały i przybory pomocnicze, z których mogą korzystać zdający na egzaminie maturalnym z matematyki, to:

- linijka
- cyrkiel
- kalkulator prosty
- *Wybrane wzory matematyczne na egzamin maturalny z matematyki*.

Szczegółowe informacje dotyczące materiałów i przyborów pomocniczych, z których mogą korzystać zdający na egzaminie maturalnym (w tym osoby, którym dostosowano warunki przeprowadzenia egzaminu), będą ogłaszane w komunikacie dyrektora Centralnej Komisji Egzaminacyjnej.

2. Przykładowe zadania z rozwiązaniami

W *Informatorze* dla każdego zadania podano:

- liczbę punktów możliwych do uzyskania za jego rozwiązanie (w nawiasach, po numerze zadania)
- najważniejsze wymagania ogólne i szczegółowe, które są sprawdzane w tym zadaniu
- zasady oceniania rozwiązania tego zadania
- przykładowe rozwiązanie tego zadania.

W przykładowych rozwiązaniach zadań otwartych są wyodrębnione dodatkowe komentarze, które nie podlegają ocenie. Dodatkowe komentarze wyodrębniono w ramkach (podobnie jak ten akapit).

LICZBY RZECZYWISTE, WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE, RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI, UKŁADY RÓWNAŃ

Zadanie 1. (0–6)

Dany jest układ równań

$$\begin{cases} mx + y = m^2 \\ 4x + my = 8 \end{cases} \tag{1}$$

z niewiadomymi x i y oraz parametrem m.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których układ jest oznaczony, a para liczb (x, y) będąca rozwiązaniem układu spełnia warunek $|x + y| < 2$.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.

Wymagania szczegółowe

III. Równania i nierówności. Zdający:

2R) rozwiązuje równania i nierówności wymierne nie trudniejsze niż

$$\frac{x+1}{x(x-1)}+\frac{1}{x+1}\geq\frac{2x}{(x-1)(x+1)}.$$

IV. Układy równań. Zdający:

1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi […].

Zasady oceniania

6 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wszystkich wartości parametru m spełniających warunki zadania oraz prawidłowy wynik.

5 pkt – rozwiązanie nierówności $\left|\frac{m^2-2m+4}{m+2}\right| < 2$.

4 pkt – rozwiązanie jednej z nierówności

$$\frac{m^2-2m+4}{m+2} > -2 \qquad \text{lub} \qquad \frac{m^2-2m+4}{m+2} < 2$$

3 pkt – zapisanie nierówności

$$\frac{m^2-2m+4}{m+2} > -2 \qquad \text{i} \qquad \frac{m^2-2m+4}{m+2} < 2$$

2 pkt – wyznaczenie z układu (1) x oraz y.

1 pkt – określenie wartości parametru m, dla jakich układ jest oznaczony i wyznaczenie z układu (1) x lub y.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozwiązujemy układ (1) metodą podstawiania. Z pierwszego równania układu wyznaczamy y:

$$y = m^2 - mx$$

i wstawiamy do drugiego równania układu:

$$4x + m(m^2 - mx) = 8$$
$$(4 - m^2)x = 8 - m^3$$

Zatem układ jest oznaczony, gdy $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$. Wtedy

$$x = \frac{8-m^3}{4-m^2} = \frac{(2-m)(4+2m+m^2)}{(2-m)(2+m)} = \frac{4+2m+m^2}{m+2}$$

Stąd

$$y = m^2 - mx = m^2 - m \cdot \frac{m^2+2m+4}{m+2} = \frac{m^3+2m^2-m(m^2+2m+4)}{m+2} = \frac{-4m}{m+2}$$

Wyznaczamy wartości parametru m, dla których prawdziwa jest nierówność $|x+y| < 2$:

$$\left|\frac{4+2m+m^2}{2+m} + \frac{-4m}{m+2}\right| < 2$$

$$\left|\frac{m^2-2m+4}{m+2}\right| < 2$$

$$\frac{m^2-2m+4}{m+2} > -2 \quad \text{i} \quad \frac{m^2-2m+4}{m+2} < 2$$

$$\frac{m^2-2m+4}{m+2} + \frac{2m+4}{m+2} > 0 \quad \text{i} \quad \frac{m^2-2m+4}{m+2} - \frac{2m+4}{m+2} < 0$$

$$\frac{m^2+8}{2+m} > 0 \quad \text{i} \quad \frac{m^2-4m}{2+m} < 0$$

$$(m^2+8)(m+2) > 0 \text{ i } m \in \mathbb{R}\backslash\{-2;2\} \quad \text{i} \quad (m^2-4m)(m+2) < 0 \text{ i } m \in \mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$$

$$m \in (-2,2) \cup (2,+\infty) \quad \text{i} \quad m \in (-\infty,-2) \cup (0,2) \cup (2,4)$$

co daje nam $m \in (0,2) \cup (2,4)$.

Zadanie 2. (0–3)

Dane są liczby $a = (\log_{\sqrt{5}} 2) \cdot \log_2 25$ i $b = \frac{\log_5 6}{\log_5 8}$.

Oblicz a^{b+1}.

Wymagania ogólne

I. Sprawność rachunkowa […].

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymagania szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:
1) wykonuje działania ([...] potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;
R) stosuje wzór na zamianę podstaw logarytmu.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawne obliczenie a^{b+1} i prawidłowy wynik.

2 pkt – poprawne obliczenie a oraz przekształcenie b do prostszej postaci np. $b = \log_2 \sqrt[3]{6}$.

1 pkt – poprawnie obliczenie a lub przekształcenie b do postaci logarytmu o podstawie 2 lub 4, np. $b = \log_2 \sqrt[3]{6}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy a oraz b z wykorzystaniem wzoru na zamianę podstawy logarytmu:

$$a = \log_{\sqrt{5}} 2 \cdot \log_2 25 = \frac{\log_2 2}{\log_2 \sqrt{5}} \cdot 2\log_2 5 = \frac{\log_2 2}{\frac{1}{2}\log_2 5} \cdot 2\log_2 5 = 4$$

$$b = \frac{\log_5 6}{\log_5 8} = \log_8 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 8} = \frac{1}{3}\log_2 6 = \log_2 \sqrt[3]{6}$$

Obliczamy a^{b+1}:

$$a^{b+1} = 4^{\log_2 \sqrt[3]{6}+1} = 4^{\log_2 \sqrt[3]{6}} \cdot 4^1 = 2^{2\log_2 \sqrt[3]{6}} \cdot 4 = 2^{\log_2 \sqrt[3]{36}} \cdot 4 = 4\sqrt[3]{36}$$

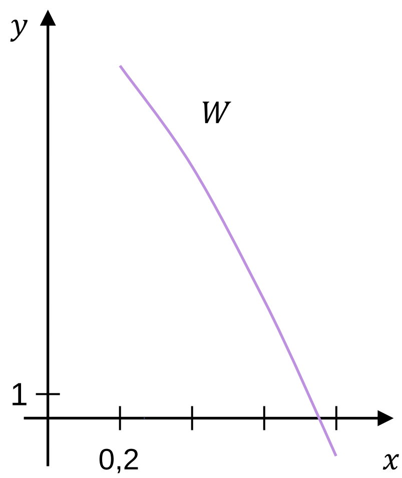
Zadanie 3. (0–3)

Na diagramie obok przedstawiono fragment wykresu wielomianu W określonego wzorem

$$W(x) = 4x^3 - 19x^2 - 12x + 18$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Oblicz wszystkie pierwiastki wielomianu W.



Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w formie […] diagramów, tabel.

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

Wymagania szczegółowe

II. Wyrażenia algebraiczne. Zdający:
 6) dzieli wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x-a$,
 1R) znajduje pierwiastki całkowite i wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Zasady oceniania

3 pkt – obliczenie wszystkich pierwiastków wielomianu W.

2 pkt – sprawdzenie, że liczba $\frac{3}{4}$ jest pierwiastkiem wielomianu oraz podzielenie wielomianu W przez dwumian $\left(x-\frac{3}{4}\right)$.

1 pkt – zastosowanie twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu i określenie liczb wymiernych mogących być pierwiastkami wielomianu W.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Skorzystamy z twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Na mocy tego twierdzenia wnosimy, że jeśli wielomian W ma pierwiastek wymierny, to należy on do zbioru

$$\mathbb{M}=\left\{\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 6,\pm 9,\pm 18,\pm\frac{9}{2},\pm\frac{9}{4},\pm\frac{3}{2},\pm\frac{3}{4},\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{4}\right\}$$

Na podstawie fragmentu wykresu funkcji W stwierdzamy, że jeden z pierwiastków wielomianu znajduje się w przedziale $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Tylko jedna liczba ze zbioru $\mathbb{M}$ leży w tym przedziale i jest to ułamek $\frac{3}{4}$.

Sprawdzamy, czy liczba $\frac{3}{4}$ jest pierwiastkiem wielomianu W:

$$W\left(\frac{3}{4}\right) = 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 - 19 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 12 \cdot \frac{3}{4} + 18 = \frac{27}{16} - \frac{171}{16} - \frac{144}{16} + \frac{288}{16} = 0$$

Zatem wielomian jest podzielny przez dwumian $\left(x - \frac{3}{4}\right)$.

Dzielimy wielomian W przez dwumian $\left(x - \frac{3}{4}\right)$ i zapisujemy go w postaci iloczynowej:

$$W(x) = \left(x - \frac{3}{4}\right)(4x^2 - 16x - 24).$$

Pierwiastkami trójmianu $4x^2 - 16x - 24$ są liczby: $2 - \sqrt{10}$ oraz $2 + \sqrt{10}$.

Pierwiastkami wielomianu W są liczby: $2 - \sqrt{10}$, $2 + \sqrt{10}$ oraz $\frac{3}{4}$.

Zadanie 4. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{-3x + 41}{x - 13} \quad \text{dla } x \neq 13.$$

Punktem kratowym nazywamy punkt w układzie współrzędnych, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi.

Wyznacz wszystkie punkty kratowe należące do wykresu funkcji f.

Wymagania ogólne

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
   1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście […].

IV. Rozumowanie i argumentacja.
   3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania […].

Wymagania szczegółowe

II. Wyrażenia algebraiczne. Zdający:
   7) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne.

V. Funkcje. Zdający:
   13) posługuje się funkcją $f(x) = \frac{a}{x}$ […].

Zasady oceniania

3 pkt – prawidłowe określenie wszystkich czterech możliwych przypadków, dla których $\frac{2}{x-13} \in \mathbb{Z}$ i prawidłowe wyznaczenie czterech punktów kratowych.

2 pkt – prawidłowe określenie dwóch z czterech możliwych przypadków, dla których $\frac{2}{x-13} \in \mathbb{Z}$ i prawidłowe wyznaczenie dwóch punktów kratowych.

1 pkt – przekształcenie postaci ogólnej funkcji homograficznej do postaci kanonicznej.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Funkcję f przedstawiamy w postaci:

$$f(x) = \frac{-3x + 41}{x - 13} = \frac{(-3(x - 13) + 2}{x - 13} = -3 + \frac{2}{x - 13}.$$

Wyznaczamy punkty kratowe.

Wartość funkcji będzie liczbą całkowitą tylko wtedy, gdy $\frac{2}{x-13} \in \mathbb{Z}$.

Szukamy całkowitych wartości x (rożnych od 13) takich, dla których $(x - 13)$ jest dzielnikiem 2. To prowadzi do następujących czterech przypadków:

- $x - 13 = -2$, co daje $x = 11$ i $f(x) = -3 - 1 = -4 \in \mathbb{Z}$
- $x - 13 = -1$, co daje $x = 12$ i $f(x) = -3 - 2 = -5 \in \mathbb{Z}$
- $x - 13 = 1$, co daje $x = 14$ i $f(x) = -3 + 2 = -1 \in \mathbb{Z}$
- $x - 13 = 2$, co daje $x = 15$ i $f(x) = -3 + 1 = -2 \in \mathbb{Z}$.

Do wykresu funkcji f należą cztery punkty kratowe o współrzędnych: $(11, -4)$, $(12, -5)$, $(14, -1)$, $(15, -2)$.

Zadanie 5. (0–3)

Wielomian W jest określony wzorem $W(x) = (x-1)(x^2 - mx + m - 1)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których wielomian W ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.

1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania […].

Wymaganie szczegółowe

III. Równania i nierówności. Zdający:

5R) […] analizuje równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Zasady oceniania

3 pkt – zapisanie zbioru tych wszystkich wartości parametru m, dla których wielomian W ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.

2 pkt – wyznaczenie tych wszystkich wartości parametru m, dla których funkcja $f(x) = x^2 - mx + m - 1$ nie ma miejsc zerowych

LUB

wyznaczenie tych wszystkich wartości parametru m, dla których funkcja $f(x) = x^2 - mx + m - 1$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe równe 1.

1 pkt – zapisanie, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu W i zapisanie warunków, jakie muszą być spełnione, aby wielomian W miał dokładnie jedno miejsce zerowe.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zauważmy, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu W. Zatem wielomian W ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty tylko wtedy, gdy funkcja $f(x) = x^2 - mx + m - 1$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe równe 1 lub gdy funkcja f nie ma miejsc zerowych.
Zatem

$$\Delta < 0 \quad \text{lub} \quad (\Delta = 0 \quad \text{i} \quad x_0 = 1)$$

$$m^2 - 4m + 4 < 0 \quad \text{lub} \quad \left(\mathrm{m}^2 - 4\mathrm{m} + 4 = 0 \quad \text{i} \quad -\frac{b}{2a} = 1\right)$$

$$(m-2)^2 < 0 \quad \text{lub} \quad \left((m-2)^2 = 0 \quad \text{i} \quad \frac{m}{2} = 1\right)$$

Nierówność $(m-2)^2 < 0$ jest sprzeczna, natomiast z warunków

$$(m-2)^2 = 0 \quad \text{i} \quad \frac{m}{2} = 1$$

otrzymujemy $m = 2$.
Odp. $m = 2$.

Zadanie 6. (0–4)

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = px^2 + (p-1)x + 1 - 2p$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe różniące się o 1.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.
  1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania […].

Wymagania szczegółowe

III. Równania i nierówności. Zdający:
  3R) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych;
  5R) […] analizuje równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Zasady oceniania

4 pkt – zapisanie zbioru tych wszystkich wartości parametru p, dla których funkcja ma dokładnie dwa miejsca zerowe różniące się o 1.

3 pkt – zapisanie nierówności $\Delta > 0$ w zależności od parametru p i jej rozwiązanie oraz zapisanie warunku $|x_1 - x_2| = 1$ w zależności od parametru p i jego rozwiązanie.

2 pkt – zapisanie nierówności $\Delta > 0$ w zależności od parametru p i jej rozwiązanie
LUB
zapisanie warunku $|x_1 - x_2| = 1$ w zależności od parametru p i jego rozwiązanie.

1 pkt – wyznaczenie warunków koniecznych i dostatecznych na to, aby funkcja f miała dokładnie dwa miejsca zerowe różniące się o 1.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy warunki konieczne i dostateczne na to, aby funkcja f miała dokładnie dwa miejsca zerowe różniące się o jeden:

W1. $p \neq 0$ (z treści zadania f jest funkcją kwadratową)
W2. $\Delta > 0$ (aby funkcja f miała dokładnie dwa miejsca zerowe)
W3. $|x_1 - x_2| = 1$ (aby miejsca zerowe funkcji f różniły się o 1).

Rozwiązujemy warunek W2:

$$\Delta > 0$$

$$(p-1)^2 - 4p(1-2p) > 0$$

$$9p^2 - 6p + 1 > 0$$

$$(3p-1)^2 > 0$$

$$p \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

Rozwiązujemy warunek W3. Skorzystamy tutaj ze wzorów Viète'a.

$$|x_1 - x_2| = 1$$

$$(x_1 - x_2)^2 = 1$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = 1$$

Gdy $p \neq 0$ mamy

$$\left(-\frac{p-1}{p}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1-2p}{p} = 1$$

$$(p-1)^2 - 4p(1-2p) = p^2$$

$$8p^2 - 6p + 1 = 0$$

$$p = \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad p = \frac{1}{4}$$

Po uwzględnieniu wszystkich warunków otrzymujemy: $p = \frac{1}{2}$ lub $p = \frac{1}{4}$.

FUNKCJE, CIĄGI, TRYGONOMETRIA, OPTYMALIZACJA I RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

Zadanie 7. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{3x}{x+1}$ dla każdego $x \in (-1; +\infty)$.

Wykaż, że f jest funkcją rosnąca.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.

1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.

Wymagania szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:

3R) dowodzi monotoniczności funkcji zadanej wzorem.

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zdający:

5R) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji.

Zasady oceniania

dla rozwiązań sposobami 1., 2. oraz 3.

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu.

2 pkt – poprawne określenie znaku

różnicy $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{3(x_2 - x_1)}{(x_2 + 1)(x_1 + 1)} > 0$

LUB

pochodnej $f'(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2} > 0$

LUB

przekształcenie nierówności $x_2 > x_1$ do postaci $3 - \frac{1}{x_1+1} < 3 - \frac{1}{x_2+1}$.

1 pkt – przyjęcie założeń $x_1, x_2 \in (-1; +\infty)$ i $x_2 > x_1$ oraz obliczenie różnicy

$f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{3(x_2 - x_1)}{(x_2 + 1)(x_1 + 1)}$

LUB

przyjęcie założenia $x \in (-1; +\infty)$ oraz obliczenie pochodnej

$f'(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$

LUB

przyjęcie założeń $x_1, x_2 \in (-1; +\infty)$ i $x_2 > x_1$ oraz przekształcenie nierówności $x_2 > x_1$ do postaci $\frac{1}{x_2+1} < \frac{1}{x_1+1}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

dla rozwiązań sposobami 4. oraz 5.

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu.

2 pkt – zapisanie, że wykres funkcji f można otrzymać z przesunięcia wykresu funkcji $g(x) = -\frac{3}{x}$ o wektor $[-1, 3]$

LUB

uzasadnienie, że wraz ze wzrostem liczby $x > -1$ wartość ułamka $\frac{3}{x+1}$ zmniejsza się.

1 pkt – zapisanie funkcji f w postaci $f(x) = 3 - \frac{3}{x+1}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1. (z wykorzystaniem definicji).

Niech $x_1, x_2 \in (-1, +\infty)$ oraz $x_2 > x_1$. Wtedy

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{3x_2}{x_2 + 1} - \frac{3x_1}{x_1 + 1} = \frac{3x_2(x_1 + 1) - 3x_1(x_2 + 1)}{(x_2 + 1)(x_1 + 1)} = \frac{3(x_2 - x_1)}{(x_2 + 1)(x_1 + 1)}$$

Dla $x_2 > x_1$ różnica $x_2 - x_1$ jest dodatnia, ponadto dla $x_1, x_2 \in (-1, +\infty)$ każda z sum

(x_2+1) oraz (x_1+1) jest dodatnia, więc iloraz $\dfrac{3(x_2-x_1)}{(x_2+1)(x_1+1)}$ również jest dodatni.

Oznacza to, że $f(x_2) > f(x_1)$ dla $x_1, x_2 \in (-1,+\infty)$ oraz $x_2 > x_1$, zatem funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-1,+\infty)$.
To kończy dowód.

Sposób 2. (z wykorzystaniem rachunku różniczkowego).
Niech $x \in (-1,+\infty)$. Obliczamy pochodną f' funkcji f:

$$f'(x) = \frac{(3x)' \cdot (x+1) - (3x) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{3(x+1) - 3x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

dla każdego $x \in (-1,+\infty)$.
Funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $(-1,+\infty)$, a jej pochodna jest w każdym punkcie tego przedziału dodatnia. Zatem funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.
To kończy dowód.

Sposób 3. (oparty na definicji funkcji rosnącej).
Niech x_1, $x_2 \in (-1,+\infty)$ będą dwoma dowolnymi argumentami funkcji f. Załóżmy, że $x_1 < x_2$. Wtedy

$$0 < x_1 + 1 < x_2 + 1$$

Dzieląc obie strony tej nierówności przez liczbę dodatnią $(x_1+1)(x_2+1)$, otrzymujemy nierówność równoważną

$$\frac{1}{x_2+1} < \frac{1}{x_1+1}$$

i dalej

$$\frac{3}{x_2+1} < \frac{3}{x_1+1}$$

$$-\frac{3}{x_1+1} < -\frac{3}{x_2+1}$$

$$3-\frac{3}{x_1+1} < 3-\frac{3}{x_2+1}$$

$$\frac{3x_1+3}{x_1+1} - \frac{3}{x_1+1} < \frac{3x_2+3}{x_2+1} - \frac{3}{x_2+1}$$

$$\frac{3x_1}{x_1+1} < \frac{3x_2}{x_2+1}$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

To oznacza, że funkcja f jest rosnąca.

Sposób 4. (z wykorzystaniem własności funkcji postaci $y = \frac{a}{x}$).

Wzór funkcji f przedstawiamy w postaci:

$$f(x) = \frac{3x}{x+1} = \frac{(3x+3)-3}{x+1} = 3 - \frac{3}{x+1}.$$

Wykres funkcji f można uzyskać przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = -\frac{3}{x}$ (określonej dla $x > 0$) o wektor $[-1, 3]$. Z wykresu/własności funkcji g wynika, że funkcja g jest rosnąca dla $x > 0$, więc funkcja f jest rosnąca dla $x > -1$.
To kończy dowód.

Sposób 5. (oparty na umiejętności porównywania ułamków).

Wzór funkcji f przedstawiamy w postaci:

$$f(x) = \frac{3x}{x+1} = \frac{(3x+3)-3}{x+1} = 3 - \frac{3}{x+1}.$$

Dla każdej liczby rzeczywistej $x > -1$ ułamek $\frac{3}{x+1}$ jest dodatni, a ponieważ licznik jest stały i dodatni, to ułamek jest tym mniejszy, im jego mianownik jest większy. Zatem ze wzrostem liczby $x > -1$ liczba $3 - \frac{3}{x+1}$ jest coraz większa. Tym samym funkcja f jest rosnąca.

Zadanie 8. (0–2)

Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n + 7^n}$.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

VI. Ciągi. Zdający:

1R) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach.

Zasady oceniania

2 pkt – prawidłowa metoda obliczenia granicy (zastosowanie twierdzenia o trzech ciągach) i prawidłowy wynik.

1 pkt – zauważenie, że $7^n \leq 6^n + 7^n \leq 2 \cdot 7^n$ i obliczenie granic ciągów $a_n = \sqrt[n]{7^n}$ oraz $c_n = \sqrt[n]{2 \cdot 7^n}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Skorzystamy z twierdzenia o trzech ciągach.

Rozważmy ciągi $a_n = \sqrt[n]{7^n}$ oraz $c_n = \sqrt[n]{2 \cdot 7^n}$ określone dla każdego $n \in \mathbb{N}$.
Zauważmy, że $7^n \leq 6^n + 7^n \leq 2 \cdot 7^n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, więc

$$\sqrt[n]{7^n} \leq \sqrt[n]{6^n + 7^n} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 7^n}$$

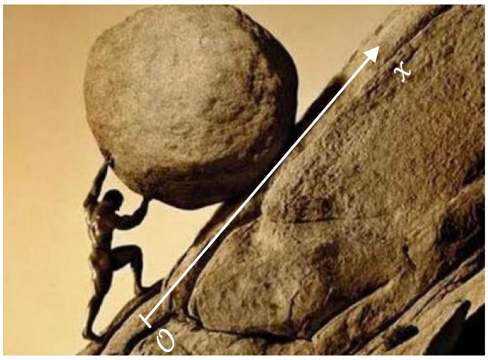
Ponadto $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^n} = 7$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 \cdot 7^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^n} = 1 \cdot 7 = 7$, więc na podstawie twierdzenia o trzech ciągach $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n + 7^n} = 7$.

Zadanie 9. (0–4)

Syzyf codziennie stoi przed zadaniem wtoczenia ciężkiej kamiennej kuli na szczyt pewnej góry. W chwili $t = 0$ znajduje się on w punkcie O oddalonym od szczytu o 4 km, a położenie x Syzyfa wtaczającego kulę jest opisane równaniem

$$x(t) = -t^3 + 16{,}5t^2 + 180t \text{ dla } t \in [0, 24]$$

gdzie x jest wyrażone w metrach, a t – w godzinach.



Oś Ox jest skierowana do wierzchołka góry i jest styczna w każdym punkcie do zbocza góry.

Oblicz najmniejszą odległość, na jaką Syzyf zbliży się do wierzchołka góry, oraz maksymalną prędkość, z jaką wtacza kamień pod górę.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymagania szczegółowe

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zdający:

3R) […] podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej;
4R) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym […];
5R) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji;
6R) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda wyznaczenia najmniejszej odległości, na jaką Syzyf zbliży się do wierzchołka góry, i poprawna metoda wyznaczenia największej wartości prędkości, z jaką wtaczany jest kamień, wraz z prawidłowymi wynikami liczbowymi.

3 pkt – zapisanie, że prędkość jest pochodną funkcji położenia i znalezienie ekstremów funkcji x'.

2 pkt – zbadanie monotoniczności funkcji x i znalezienie ekstremów funkcji x.

1 pkt – obliczenie pochodnej funkcji x.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Najpierw wyznaczymy najmniejszą odległość, na jaką Syzyf zbliży się do wierzchołka góry.

Obliczamy pochodną funkcji x:

$$x'(t) = -3t^2 + 33t + 180 \quad \text{dla} \qquad t \in [0, 24]$$

i obliczamy jej miejsca zerowe:

$$x'(t) = 0$$

$$-3t^2 + 33t + 180 = 0$$

$$t^2 - 11t - 60 = 0$$

$$\Delta = 361$$

$$t_1 = 15 \qquad t_2 < 0$$

Ponieważ:

$x'(t) > 0$ dla $t \in [0,15)$

$x'(t) < 0$ dla $t \in (15, 24]$

więc

funkcja x jest rosnąca w przedziale $[0, 15]$
funkcja x jest malejąca w przedziale $[15, 24]$

Zatem $x_{max} = x(15) = 3037{,}5$ i Syzyf zbliży się do wierzchołka góry na odległość $962{,}5$ m.

Obliczamy maksymalną wartość prędkości, z jaką Syzyf wtacza kulę.

Niech v oznacza prędkość Syzyfa wtaczającego kulę.
Ponieważ $v = x'$, więc

$v(t) = x'(t) = -3t^2 + 33t + 180$ dla $t \in [0, 24]$

Korzystamy z własności funkcji kwadratowej i obliczamy największą wartość prędkości, z jaką Syzyf wtacza kulę:

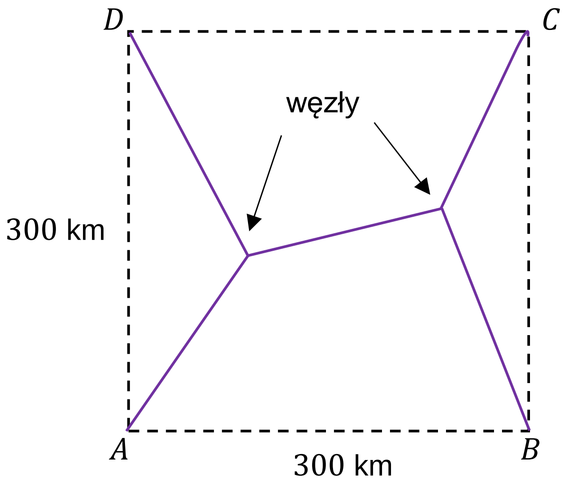
$$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{33}{2 \cdot (-3)} = \frac{11}{2} \in [0, 24]$$

$$v\left(\frac{11}{2}\right) > 0$$

Zatem największa wartość prędkości, z jaką Syzyf wtacza kulę pod górę jest równa $v(5{,}5) = 270{,}75$ m/h.

Zadanie 10. (0–6)

Cztery miasta A, B, C i D znajdują się w wierzchołkach kwadratu o boku 300 km. Pewna firma dostała zlecenie na zaprojektowanie sieci dróg, która będzie łączyć każde dwa z tych miast. Sieć ma posiadać dwa węzły, a łączna długość dróg w sieci ma być możliwie najmniejsza. (Przykład sieci dróg z dwoma węzłami, łączącej każde dwa z miast, przedstawiono na poniższym rysunku).



Oblicz, jaka musi być długość najkrótszej takiej sieci dróg i gdzie muszą być zlokalizowane węzły tej sieci.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.

4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.

Wymagania szczegółowe

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zdający:

4R) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym […];
5R) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji;
6R) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

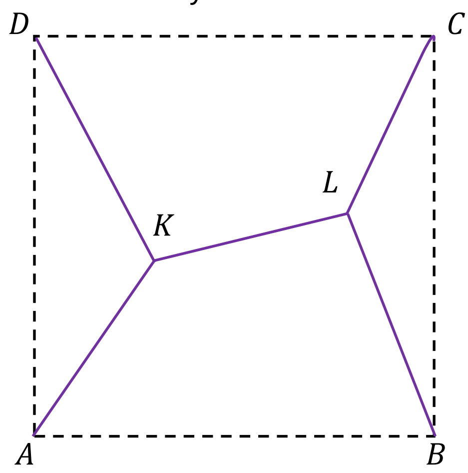
Zasady oceniania

6 pkt – obliczenie długości najkrótszej sieci z dwoma węzłami i podanie lokalizacji węzłów względem miast.
5 pkt – obliczenie długości najkrótszej sieci z dwoma węzłami.
4 pkt – obliczenie wartości najmniejszej funkcji f.
3 pkt – obliczenie pochodnej funkcji f.
2 pkt – wyrażenie długości sieci za pomocą odległości węzłów od prostych odpowiednio AD i BC.
1 pkt – uzasadnienie, że węzły muszą się znajdować na symetralnej odcinka AD.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozpatrzmy sieć dróg złożoną z odcinków AK, KL, LC, BL i DK (zobacz rysunek 1.)

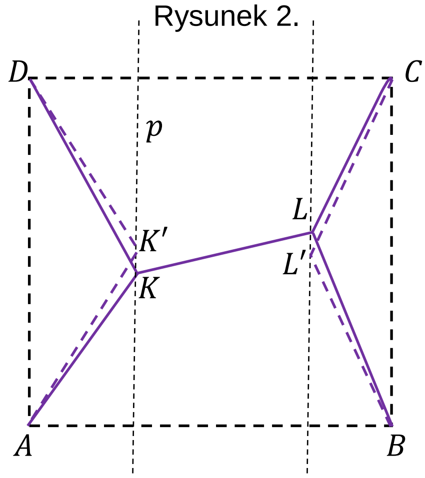
Rysunek 1.



Prowadzimy prostą p równoległą do AD i przechodzącą przez K i zaznaczamy na niej punkt K' taki, że $|AK'| = |DK'|$.

Prowadzimy prostą równoległą do BC i przechodzącą przez L i zaznaczamy na niej punkt L' taki, że $|BL'| = |CL'|$ (patrz rysunek 2.).

Rysunek 2.



Pokażemy, że sieć dróg z węzłami K i L można zastąpić siecią krótszą – z węzłami K' i L'. Niech D' będzie punktem symetrycznym do punktu D względem prostej p. Wówczas punkty D', K' oraz A są współliniowe, więc

$$|DK| + |KA| = |D'K| + |KA| \geq |D'A| = |DK'| + |K'A|.$$

Podobnie pokazujemy, że $|BL| + |LC| \geq |BL'| + |L'C|$. Ponadto odcinek $K'L'$ jest równoległy do prostej AB, więc $|K'L'| \leq |KL|$. Zatem sieć dróg z węzłami K' i L' jest krótsza niż z węzłami K i L.

Oznaczmy odległość punktu K' od prostej AD przez x, natomiast punktu L' od prostej BC przez y. Długość d sieci z węzłami K' i L' jest równa

$$d = 2\sqrt{150^2 + x^2} + 2\sqrt{150^2 + y^2} + 300 - x - y$$

gdzie $x \in [0{,}300]$ i $0 \le x + y < 300$.
Zbadamy funkcję $f(x) = 2\sqrt{150^2 + x^2} - x$ określoną dla $x \in [0{,}300]$.

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{150^2 + x^2}} \cdot 2x - 1 = \frac{2x}{\sqrt{150^2 + x^2}} - 1$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{2x}{\sqrt{(150^2 + x^2)}} = 1$$

$$4x^2 = x^2 + 150^2$$

$$x = 50\sqrt{3}$$

$$f'(x) > 0 \iff x \in (50\sqrt{3}, 300]$$

$$f'(x) < 0 \iff x \in \left[0{,}50\sqrt{3}\right)$$

Funkcja f jest malejąca w przedziale $\left[0, 50\sqrt{3}\right]$ i rosnąca w przedziale $[50\sqrt{3}, 300]$. Najmniejszą wartość funkcja przyjmuje w punkcie $x = 50\sqrt{3}$ i wartość ta jest równa $f\left(50\sqrt{3}\right) = 150\sqrt{3}$.
Zatem

$$d = f(x) + f(y) + 300 \ge 300\left(1 + \sqrt{3}\right)$$

przy czym równość zachodzi tylko wtedy, gdy $x = y = 50\sqrt{3}$. Najkrótsza sieć dróg ma zatem długość $300\left(1 + \sqrt{3}\right)$ km i składa się z 5 odcinków: AK', $K'L'$, $L'C$, BL' i DK'.
Węzeł K' jest równo oddalony (w odległości $100\sqrt{3}$ km) od miast A i D, natomiast węzeł L' jest równo oddalony (w odległości $100\sqrt{3}$ km) od miast B i C (patrz rysunek 2.).

Zauważmy jeszcze, że w przypadku sieci dróg z jednym węzłem, najkrótsza taka sieć będzie miała długość równą $600\sqrt{2}$ km (i węzeł w środku kwadratu $ABCD$). Będzie więc dłuższa niż sieć z dwoma węzłami.

Zadanie 11. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{2x-3}{x+2} + 4\log_{\frac{1}{2}} x$ dla wszystkich $x > 0$.

Wykaż, że funkcja f ma co najmniej jedno miejsce zerowe, które należy do przedziału $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.

1. przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.

Wymaganie szczegółowe

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zdający:

2R) stosuje własność Darboux do uzasadniania istnienia miejsca zerowego funkcji i znajdowania przybliżonej wartości miejsca zerowego.

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu.

2 pkt – zauważenie, że $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ i $f(4) < 0$ oraz uzasadnienie, że funkcja f jest ciągła.

1 pkt – obliczenie wartości funkcji f np. na krańcach przedziału $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczymy wartości funkcji na krańcach przedziału $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} - 3}{\frac{1}{2} + 2} + 4\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = -\frac{4}{5} + 4 = 3\frac{1}{5}$$

$$f(4) = \frac{2 \cdot 4 - 3}{4 + 2} + 4\log_{\frac{1}{2}} 4 = \frac{5}{6} - 8 = -7\frac{1}{6}$$

Zauważmy, że $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ i $f(4) < 0$.

Funkcja f jest funkcją ciągłą, jako suma funkcji ciągłych. Ma zatem własność Darboux. Dlatego w przedziale $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$ przyjmuje wszystkie wartości z zakresu $\left[-7\frac{1}{6}, 3\frac{1}{5}\right]$. W szczególności przyjmuje wartość 0 dla pewnego $x_0 \in \left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

To kończy dowód.

Zadanie 12. (0–4)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^4 + 0{,}5 \cdot (2x + 1)^4$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Oblicz najmniejszą wartość tej funkcji.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.

4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.

Wymagania szczegółowe

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zdający:

4R) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej;

5R) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji;

6R) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

dla rozwiązania sposobem 1.

4 pkt – obliczenie wartości najmniejszej funkcji f.

3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą dla $x = -\frac{1}{3}$.

2 pkt – obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji f.

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji f.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

dla rozwiązania sposobem 2.

4 pkt – obliczenie wartości najmniejszej funkcji f.

3 pkt – zapisanie, że funkcja kwadratowa $y = 6x^2 + 4x + 1$ osiąga wartość najmniejszą równą $\frac{1}{3}$ dla $x = -\frac{1}{3}$.

2 pkt – zapisanie nierówności

$$\sqrt{\frac{2}{3} \cdot f(x)} \geq \frac{6x^2 + 4x + 1}{3}$$

1 pkt – zapisanie nierówności

$$\sqrt{\frac{x^4 + x^4 + (2x+1)^4}{3}} \geq \frac{x^2 + x^2 + (2x+1)^2}{3}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

dla rozwiązania sposobem 3.

4 pkt – obliczenie wartości najmniejszej funkcji f.

3 pkt – przekształcenie wyrażenia $9t^4+4t^3+2t^2+\frac{1}{54}$ do postaci

$$9t^2\left(\left(t+\frac{2}{9}\right)^2+\frac{14}{81}\right)+\frac{1}{54}$$

2 pkt – zastosowanie wzoru na czwartą potęgę sumy/różnicy dwóch wyrażeń i zapisanie funkcji f jako

$$f\left(t-\frac{1}{3}\right)=9t^4+4t^3+2t^2+\frac{1}{54}$$

1 pkt – zastosowanie podstawienia $t=x-\frac{1}{3}$ i zapisanie funkcji f w postaci

$$f\left(t-\frac{1}{3}\right)=\left(t-\frac{1}{3}\right)^4+\frac{1}{2}\cdot\left(2\left(t-\frac{1}{3}\right)+1\right)^4$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Wyznaczamy pochodną funkcji f korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej:

$$f'(x)=4x^3+0{,}5\cdot 4(2x+1)^3\cdot 2 \qquad \text{dla } x\in\mathbb{R}.$$

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji f:

$$4x^3+0{,}5\cdot 4(2x+1)^3\cdot 2=0$$

$$x^3+(2x+1)^3=0$$

$$(x+2x+1)[x^2-x(2x+1)+(2x+1)^2]=0$$

$$(3x+1)(3x^2+3x+1)=0$$

$$3x+1=0 \quad \text{lub} \quad 3x^2+3x+1=0$$

Pierwsze z tych równań ma rozwiązanie $x=-\frac{1}{3}$, natomiast drugie jest sprzeczne.

Sprawdzamy, czy w punkcie $x=-\frac{1}{3}$ funkcja f osiąga ekstremum. Badamy monotoniczność funkcji f stosując rachunek pochodnych:

$$f'(x)=4x^3+0{,}5\cdot 4(2x+1)^3\cdot 2=4(3x+1)(3x^2+3x+1)$$

$f'(x)>0$ dla $x\in\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$

$f'(x)<0$ dla $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$

więc

funkcja f jest malejąca w zbiorze $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right]$

funkcja f jest rosnąca w zbiorze $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$,

co oznacza, że w punkcie $x=-\frac{1}{3}$ funkcja f ma ekstremum lokalne, będące jednocześnie minimum globalnym. Funkcja f osiąga wartość najmniejszą równą

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)^4+0{,}5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{54}$$

Sposób 2.

Korzystamy z nierówności między średnimi liczbowymi.

Dla każdych liczb nieujemnych a, b, c średnia kwadratowa z tych liczb jest niemniejsza od średniej arytmetycznej tych liczb:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\geq\frac{a+b+c}{3}$$

Niech x będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Korzystając z nierówności między średnią kwadratową a arytmetyczną liczb x^2, x^2, $(2x+1)^2$ otrzymujemy:

$$\sqrt{\frac{x^4+x^4+(2x+1)^4}{3}}\geq\frac{x^2+x^2+(2x+1)^2}{3}$$

$$\sqrt{\frac{2x^4+(2x+1)^4}{3}}\geq\frac{2x^2+(2x+1)^2}{3}$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{x^4+0{,}5(2x+1)^4}{1}}\geq\frac{6x^2+4x+1}{3}$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}\cdot f(x)}\geq\frac{6x^2+4x+1}{3}$$

dla każdego $x\in\mathbb{R}$.

Funkcja kwadratowa $y=6x^2+4x+1$ osiąga wartość najmniejszą dla $x=-\frac{4}{2\cdot 6}=-\frac{1}{3}$ równą $6\left(-\frac{1}{3}\right)^2+4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+1=\frac{1}{3}$, więc

$$\sqrt{\frac{2}{3}\cdot f(x)}\geq\frac{6x^2+4x+1}{3}\geq\frac{1}{9}$$

$$f(x)\geq\frac{1}{54}$$

dla każdego $x\in\mathbb{R}$.

Ponieważ

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)^4+0{,}5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{54}$$

więc najmniejsza wartość funkcji f jest równa $\frac{1}{54}$.

Sposób 3.

Niech $t=x+\frac{1}{3}$ dla $x\in\mathbb{R}$. Wtedy

$$f\left(t-\frac{1}{3}\right)=\left(t-\frac{1}{3}\right)^4+\frac{1}{2}\cdot\left(2\left(t-\frac{1}{3}\right)+1\right)^4=\left(t-\frac{1}{3}\right)^4+\frac{1}{2}\cdot\left(2t+\frac{1}{3}\right)^4 \qquad \text{dla } t\in\mathbb{R}$$

Wykorzystamy dwukrotnie wzór na czwartą potęgę sumy dwóch składników

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

Wówczas

$$\begin{aligned}f\left(t-\frac{1}{3}\right)&=t^4-4t^3\cdot\frac{1}{3}+6t^2\cdot\frac{1}{9}-4t\cdot\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\\&+\frac{1}{2}\left(16t^4+4\cdot8t^3\cdot\frac{1}{3}+6\cdot4t^2\cdot\frac{1}{9}+4\cdot2t\cdot\frac{1}{27}+\frac{1}{81}\right)=\\&=9t^4+4t^3+2t^2+\frac{1}{54}=9t^2\left(t^2+\frac{4}{9}t+\frac{2}{9}\right)+\frac{1}{54}=\\&=9t^2\left(\left(t+\frac{2}{9}\right)^2+\frac{14}{81}\right)+\frac{1}{54}\end{aligned}$$

Ponieważ dla każdego $t\in\mathbb{R}$ prawdziwe są nierówności:

$$\left(t+\frac{2}{9}\right)^2+\frac{14}{81}>0 \quad \text{i} \quad 9t^2\geq 0$$

więc $f\left(t-\frac{1}{3}\right)\geq\frac{1}{54}$, przy czym $f\left(t-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{54}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t=0$ (czyli dla $x=-\frac{1}{3}$).

Zatem najmniejsza wartość funkcji f jest równa $\frac{1}{54}$.

Zadanie 13. (0–4)

W nieskończonym malejącym ciągu geometrycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, jest spełniony warunek

$$\frac{a_5 + a_3}{a_3} = \frac{29}{25}.$$

Suma wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równa 6.

Wyznacz wzór na n–ty wyraz ciągu (a_n).

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

VI. Ciągi. Zdający:

2R) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

Zasady oceniania

4 pkt – obliczenie ilorazu, pierwszego wyrazu ciągu oraz zapisanie wzoru ogólnego ciągu.
3 pkt – obliczenie ilorazu lub pierwszego wyrazu ciągu.
2 pkt – zapisanie dwóch równań z niewiadomymi q i a_1, które pozwalają na obliczenie ilorazu ciągu oraz pierwszego wyrazu ciągu.
1 pkt – zapisanie równania z niewiadomymi q i/lub a_1, które wynika z treści zadania.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Z warunku

$$\frac{a_5 + a_3}{a_3} = \frac{29}{25}$$

oraz z informacji o monotoniczności ciągu otrzymamy iloraz q ciągu (a_n):

$$\frac{a_3 \cdot q^2 + a_3}{a_3} = \frac{29}{25}$$

$$q^2 + 1 = \frac{29}{25}$$

$$q = \frac{2}{5} \text{ lub } q = -\frac{2}{5}$$

Ciąg jest ściśle monotoniczny, więc $q = \frac{2}{5}$.

Ponieważ dla $q = \frac{2}{5}$ ciąg ten jest zbieżny, więc sumę

$$a_2 + a_4 + a_6 + \ ... = 6$$

możemy zapisać następująco:

$$\frac{a_1 \cdot q}{1 - q^2} = 6$$

i otrzymujemy

$$\frac{a_1 \cdot \frac{2}{5}}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = 6$$

$$a_1 = \frac{63}{5}$$

Wzór ogólny ciągu ma postać: $a_n = \frac{63}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$.

Zadanie 14. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^6 - 2x^4 - x^3 + 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Wykaż, że liczba 5 należy do zbioru wartości tej funkcji.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.

1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.

Wymaganie szczegółowe

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zdający:

2R) stosuje własność Darboux do uzasadniania istnienia miejsca zerowego i znajdowania przybliżonej wartości miejsca zerowego.

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu.

2 pkt – uzasadnienie, że funkcja f jest funkcją ciągłą, wskazanie argumentu, dla którego wartość funkcji jest mniejsza od 5 wraz z obliczeniem wartości funkcji dla tego argumentu i wskazanie argumentu, dla którego wartość funkcji jest większa od 5 wraz z obliczeniem wartości funkcji dla tego argumentu.

1 pkt – uzasadnienie, że funkcja f jest funkcją ciągłą, wskazanie argumentu, dla którego wartość funkcji jest mniejsza od 5 i obliczenie wartości funkcji dla tego argumentu

LUB

uzasadnienie, że funkcja f jest funkcją ciągłą, wskazanie argumentu, dla którego wartość funkcji jest większa od 5 i obliczenie wartości funkcji dla tego argumentu

LUB

wskazanie argumentu, dla którego wartość funkcji jest mniejsza od 5 wraz z obliczeniem wartości funkcji dla tego argumentu i wskazanie argumentu, dla którego wartość funkcji jest większa od 5 wraz z obliczeniem wartości funkcji dla tego argumentu.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Funkcja f jest funkcją ciągłą w zbiorze liczb rzeczywistych, ponieważ jest funkcją wielomianową.
Ponieważ $f(0) = 1$ oraz $f(2) = 64 - 32 - 8 + 1 = 25$ i funkcja jest ciągła na przedziale $(0, 2)$, więc, na mocy twierdzenia Darboux, przyjmuje w przedziale $(0, 2)$ wszystkie wartości pośrednie pomiędzy $f(0)$ a $f(2)$. Wobec tego istnieje taki argument $x \in (0, 2)$, dla którego zachodzi $f(x) = 5$. To oznacza, że liczba 5 należy do zbioru wartości funkcji.

Zadanie 15. (0–4)

Rozwiąż nierówność

$$\boldsymbol{(2 - \cos x)^2 \leq 4\sin^2\frac{x}{2} - 4\cos^2\frac{x}{2} + 4{,}75}$$

w zbiorze $\boldsymbol{(0, \pi)}$.

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

IV. Rozumowanie i argumentacja.
 2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.

Wymaganie szczegółowe

VII. Trygonometria. Zdający:
 6R) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne […].

Zasady oceniania

4 pkt – poprawne rozwiązanie podanej w poleceniu nierówności w zbiorze $(0,\pi)$.

3 pkt – poprawne rozwiązanie jednej z nierówności $\cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ lub $\cos x \ge -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2 pkt – zapisanie nierówności $\cos^2 x \le \frac{3}{4}$ w postaci koniunkcji dwóch nierówności.

1 pkt – przekształcenie nierówności do postaci, w której występuje jedna funkcja trygonometryczna zmiennej x.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy nierówność podaną w treści zadania do prostszej postaci. Skorzystamy ze wzoru na cosinus podwojonego kąta:

$$(2-\cos x)^2 \le 4\sin^2\frac{x}{2} - 4\cos^2\frac{x}{2} + 4\frac{3}{4}$$

$$\cos^2 x - 4\cos x + 4 \le -4\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) + 4\frac{3}{4}$$

$$\cos^2 x - 4\cos x + 4 \le -4\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) + 4\frac{3}{4}$$

$$\cos^2 x \le \frac{3}{4}$$

$$|\cos x| \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{i} \quad \cos x \ge -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Korzystamy z wykresu funkcji cosinus i odczytujemy rozwiązania ostatnich dwóch nierówności w przedziale $(0,\pi)$:

$$x \in \left[\frac{\pi}{6},\pi\right) \quad \text{i} \quad x \in \left(0,\frac{5}{6}\pi\right]$$

Otrzymujemy rozwiązanie: $x \in \left[\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi\right]$.

Zadanie 16. (0–3)

Wykaż, że równanie $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x - 2 = 0$ ma w przedziale $(-2, 2)$ co najmniej dwa różne rozwiązania.

Wymagania ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.
1. Przeprowadzanie rozumowań […];
4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiazywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.

Wymaganie szczegółowe

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zdający:
2R) stosuje własność Darboux do uzasadniania istnienia miejsca zerowego funkcji […].

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu.

2 pkt – podanie dla funkcji $f(x) = x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x - 2$ takich trzech argumentów $x_1 < x_2 < x_3$ leżących w przedziale $(-2, 2)$, dla których $f(x_1) > 0$, $f(x_2) < 0$ i $f(x_3) > 0$.

1 pkt – podanie dla funkcji $f(x) = x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x - 2$ takich dwóch argumentów $x_1 < x_2$ leżących w przedziale $(-2, 2)$, dla których $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(x) = x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x - 2$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Obliczymy wartości funkcji f w kilku punktach przedziału $(-2, 2)$:

$f(-1) = (-1)^4 - 7 \cdot (-1)^3 + 9 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) - 2 = 7$

$f(0) = -2$

$f(1) = 1^4 - 7 \cdot 1^3 + 9 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 2 = 9$

Funkcja f jest ciągła jako funkcja wielomianowa, więc na mocy twierdzenia Darboux funkcja f przyjmuje w przedziale $(-1, 0)$ wszystkie wartości ze zbioru $(-2, 7)$.
Zatem istnieje $x_1 \in (-1, 0)$ takie, że $f(x_1) = 0$.
Podobnie, funkcja f przyjmuje w przedziale $(0, 1)$ wszystkie wartości ze zbioru $(-2, 9)$, więc istnieje $x_2 \in (0, 1)$ takie, że $f(x_2) = 0$.
To oznacza, że w przedziale $(-2, 2)$ równanie podane w treści zadania ma co najmniej dwa różne rozwiązania.

Zadanie 17. (0–3)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem

$$a_n = (n+5)^2 \cdot \left(\frac{p+1}{(n+1)(n+2)} + \frac{2p+2}{(n+2)(n+3)}\right) \quad \text{dla} \quad n \geq 1.$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których granica ciągu jest równa 12.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

VI. Ciągi. Zdający:
1R) oblicza granice ciągów, korzystając z […] twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych […].

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia granicy ciągu (a_n) i prawidłowo wyznaczona wartość p.

2 pkt – wyznaczenie granicy ciągu (a_n) w zależności od p.

1 pkt – obliczenie jednej z granic:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+5)^2}{(n+1)(n+2)} \quad \text{lub} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+5)^2}{(n+2)(n+3)}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy wzór ciągu (a_n) do postaci

$$a_n = (p+1)\cdot\frac{(n+5)^2}{(n+1)(n+2)} + (2p+2)\cdot\frac{(n+5)^2}{(n+2)(n+3)}$$

Obliczamy następujące granice:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+5)^2}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\cdot\left(1+\frac{5}{n}\right)^2}{n^2\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{5}{n}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+5)^2}{(n+2)(n+3)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\cdot\left(1+\frac{5}{n}\right)^2}{n^2\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{5}{n}\right)^2}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)} = 1$$

Zatem

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left[(p+1)\cdot\frac{(n+5)^2}{(n+1)(n+2)} + (2p+2)\cdot\frac{(n+5)^2}{(n+2)(n+3)}\right] =$$

$$= (p+1)\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+5)^2}{(n+1)(n+2)} + (2p+2)\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+5)^2}{(n+2)(n+3)} =$$

$$= (p+1)\cdot 1 + (2p+2)\cdot 1 = 3p+3$$

Z warunków zadania otrzymujemy $12 = 3p+3$, więc $p = 3$.

Zadanie 18.

Rozpatrujemy wszystkie takie prostopadłościany, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 80, pole powierzchni całkowitej jest równe 256 i żadna z krawędzi bryły nie jest krótsza niż 4.

Zadanie 18.1. (0–4)

Wykaż, że układ równań

$$4a + 4b + 4c = 80 \qquad (1)$$

$$2ab + 2bc + 2ca = 256 \qquad (2)$$

z niewiadomymi a oraz b ma rozwiązanie, które jest parą liczb rzeczywistych nie mniejszych od 4 wtedy i tylko wtedy, gdy $c \in \left[4, \frac{28}{3}\right]$.

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych;
   3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.

IV. Rozumowanie i argumentacja.
   3. […] tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania […].

Wymaganie szczegółowe

IIII. Równania i nierówności. Zdający:
   5R) analizuje […] równania i nierówności kwadratowe z parametrami […], podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność […].

Zasady oceniania

4 pkt – powołanie się na odpowiednie własności funkcji f prowadzące do wniosku, że układ (1)–(2) ma rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych nie mniejszych od 4.

3 pkt – przyjęcie założenia $c \in \left[4, \frac{28}{3}\right]$ i zbudowanie funkcji $f(a) = a^2 + (c-20)a + (c^2 - 20c + 128)$ dla podanego zakresu parametru c.

2 pkt – obliczenie wyróżnika równania i podanie argumentacji prowadzącej do wniosku $c \in \left[4, \frac{28}{3}\right]$.

1 pkt – przyjęcie założenia, że układ (1)–(2) ma rozwiązanie i zapisanie prawidłowego równania kwadratowego z niewiadomą a (lub b) i parametrem c.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Załóżmy, że układ równań (1)–(2) ma rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych nie mniejszych od 4. Wtedy

$$\begin{cases} a+b+c=20 \\ ab+bc+ca=128 \end{cases} \tag{3}$$

Przekształcamy układ równań do postaci, w której otrzymamy równanie kwadratowe z niewiadomą a i parametrem c:

$$\begin{cases} b=20-a-c \\ a(20-a-c)+(20-a-c)c+ca=128 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=20-a-c \\ -a^2+(-c+20)a+(-c^2+20c-128)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=20-a-c \\ a^2+(c-20)a+(c^2-20c+128)=0 \end{cases}$$

Równanie $a^2 + (c-20)a + (c^2 - 20c + 128) = 0$ ma z założenia rozwiązanie, więc wyróżnik Δ_a jest nieujemny, co prowadzi do:

$$\Delta_a \geq 0$$

$$(c-20)^2 - 4(c^2 - 20c + 128) \geq 0$$

$$-3c^2 + 40c - 112 \geq 0$$

$$-3(c-4)\left(c - \frac{28}{3}\right) \geq 0$$

$$c \in \left[4, \frac{28}{3}\right]$$

Jeśli $c \in \left[4, \frac{28}{3}\right]$, to funkcja $f(a) = a^2 + (c-20)a + (c^2 - 20c + 128)$ ma co najmniej jedno miejsce zerowe (gdyż $\Delta_a \geq 0$).

Wykresem funkcji f jest parabola, której wierzchołek $W = (p, q)$ ma rzędną niedodatnią $q = -\frac{\Delta}{4}$.

Odcięta $p = -\frac{c-20}{2} \in \left[\frac{16}{3}, 8\right]$, a ponadto $f(4) = c^2 - 16c + 64 = (c-8)^2 \geq 0$.

Zatem f ma miejsce zerowe w zbiorze $[4, +\infty)$.

Podobnie argumentujemy, że funkcja $g(b) = b^2 + (c-20)b + (c^2 - 20c + 128)$ ma miejsce zerowe w przedziale $[4, +\infty)$.

Zatem układ (1)–(2) ma rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych nie mniejszych od 4.

Zadanie 18.2. (0–3)

Objętość każdego z rozpatrywanych prostopadłościanów można wyrazić za pomocą funkcji

$$V(c) = c^3 - 20c^2 + 128c$$

gdzie $c \in \left[4, \frac{28}{3}\right]$ jest długością jednej z krawędzi bryły.

Spośród rozpatrywanych prostopadłościanów oblicz objętość tego prostopadłościanu, którego objętość jest najmniejsza.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
  1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zdający:
  6R) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

3 pkt – obliczenie najmniejszej możliwej objętości prostopadłościanu o podanych własnościach.

2 pkt – obliczenie argumentu, dla którego funkcja V osiąga minimum globalne.

1 pkt – obliczenie pochodnej funkcji V.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

W celu znalezienia prostopadłościanu, którego objętość jest najmniejsza, należy zbadać funkcję $V(c)$.

Obliczamy pochodną funkcji V i obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji V:

$$V'(c) = 3c^2 - 40c + 128$$

$$V'(c) = 0$$

$$3c^2 - 40c + 128 = 0$$

$$\Delta = 64$$

$$c = 8 \text{ lub } c = \frac{16}{3}$$

Zbadamy monotoniczność funkcji V. Ponieważ

$V'(c) > 0$ dla $c \in \left[4, \frac{16}{3}\right) \cup \left(8, \frac{28}{3}\right]$

$V'(c) < 0$ dla $c \in \left(\frac{16}{3}, 8\right)$

więc

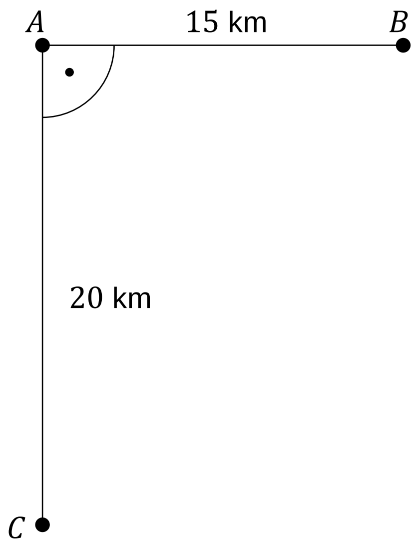
funkcja V jest rosnąca w przedziałach $\left[4, \frac{16}{3}\right]$ oraz $\left[8, \frac{28}{3}\right]$

funkcja V jest malejąca w przedziale $\left[\frac{16}{3}, 8\right]$.

Ponieważ $V(4) = 256$, $V(8) = 256$ oraz $V\left(\frac{28}{3}\right) \approx 265$, więc najmniejsza możliwa objętość prostopadłościanu jest równa 256.

Zadanie 19. (0–4)

Na rysunku obok przedstawiono położenie miejscowości A, B i C oraz zaznaczono odległości między nimi.
O godzinie 9:00 z miejscowości A do C wyruszył zastęp harcerzy „Tropiciele” i przemieszczał się z prędkością 4 km/h. O tej samej godzinie z miejscowości B do A wyruszył zastęp harcerzy „Korsarze” i przemieszczał się z prędkością 2 km/h.



Wyznacz godzinę, o której odległość między tymi zastępami harcerzy będzie najmniejsza.

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

IV. Rozumowanie i argumentacja.
   4) Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań […].

Wymagania szczegółowe

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zdający:
   4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej;
   6R) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

dla rozwiązania sposobem 1.

4 pkt – prawidłowa metoda wyznaczenia chwili, w której odległość między zastępami będzie najmniejsza i prawidłowa odpowiedź.

3 pkt – uzasadnienie, że odległość d jest najmniejsza wtedy, gdy wyrażenie podpierwiastkowe $20t^2 - 60t + 225$ jest możliwie najmniejsze oraz podanie zakresu zmienności t.

2 pkt – wyrażenie odległości d między zastępami za pomocą czasu t, jaki upłynął od momentu wyruszenia zastępów.

1 pkt – wyrażenie odległości poszczególnych zastępów od miejscowości A za pomocą czasu, jaki upłynął od momentu wyruszenia zastępów.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

dla rozwiązania sposobem 2.
4 pkt – uzasadnienie (np. poprzez zbadanie monotoniczności), że dla $t = 1{,}5$ funkcja $d(t)$ osiąga minimum globalne i podanie prawidłowej odpowiedzi.
3 pkt – podanie dziedziny funkcji $d(t)$, obliczenie pochodnej funkcji $d(t)$ i znalezienie punktów krytycznych.
2 pkt – wyrażenie odległości d między zastępami za pomocą czasu t, jaki upłynął od momentu wyruszenia zastępów.
1 pkt – wyrażenie odległości poszczególnych zastępów od miejscowości A za pomocą czasu, jaki upłynął od momentu wyruszenia zastępów.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Niech d_1 będzie odległością (w km) zastępu „Tropiciele” od miejscowości A.

Wyznaczamy zależność d_1 od czasu t (w godzinach), jaki upłynął od chwili wyruszenia zastępu z miejscowości A:

$d_1(t) = 4t$ dla $t \in [0, 5]$.

Niech d_2 będzie odległością (w km) zastępu „Korsarze” od miejscowości A.

Wyznaczamy zależność d_2 od czasu t (w godzinach), jaki upłynął od chwili wyruszenia zastępu z miejscowości B:

$d_2(t) = 15 - 2t$ dla $t \in \left[0, \frac{15}{2}\right]$.

Odległość d między zastępami w chwili t jest równa

$$d(t) = \sqrt{d_1^2(t) + d_2^2(t)} = \sqrt{16t^2 + (15 - 2t)^2} \text{ dla } t \in \left[0, \frac{15}{2}\right].$$

Badamy, dla jakiego argumentu $t \in \left[0, \frac{15}{2}\right]$ funkcja d osiąga wartość najmniejszą.

Ponieważ funkcja $g(x) = \sqrt{x}$ jest funkcją rosnącą w przedziale $[0, +\infty)$, więc funkcja d osiąga wartość najmniejszą wtedy, gdy funkcja

$$f(t) = 16t^2 + (15 - 2t)^2 = 20t^2 - 60t + 225 \text{ określona dla } t \in \left[0, \frac{15}{2}\right]$$

osiąga wartość najmniejszą.

Funkcja f jest funkcją kwadratową, która osiąga wartość najmniejszą dla

$$t = \frac{60}{2 \cdot 20} = 1{,}5 \in \left[0, \frac{15}{2}\right].$$

Zatem funkcja d osiąga wartość najmniejszą dla argumentu $t = 1{,}5$.

Odległość między zastępami harcerzy będzie najmniejsza o godzinie 10:30.

Sposób 2.

Niech d_1 będzie odległością (w km) zastępu „Tropiciele” od miejscowości A.

Wyznaczamy zależność d_1 od czasu t (w godzinach), jaki upłynął od chwili wyruszenia zastępu z miejscowości A:

$d_1(t) = 4t$ dla $t \in [0, 5]$.

Niech d_2 będzie odległością (w km) zastępu „Korsarze” od miejscowości A.

Wyznaczamy zależność d_2 od czasu t (w godzinach), jaki upłynął od chwili wyruszenia zastępu z miejscowości B:

$d_2(t) = 15 - 2t$ dla $t \in \left[0, \frac{15}{2}\right]$.

Odległość d między zastępami w chwili t wynosi

$d(t) = \sqrt{d_1^2(t) + d_2^2(t)} = \sqrt{16t^2 + (15-2t)^2}$ dla $t \in \left[0, \frac{15}{2}\right]$.

Badamy, dla jakiego argumentu $t \in \left[0, \frac{15}{2}\right]$ funkcja d osiąga wartość najmniejszą.

Obliczamy pochodną funkcji d:

$$d'(t) = \left(\sqrt{16t^2 + (15-2t)^2}\right)' \cdot [16t^2 + (15-2t)^2]' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{16t^2 + (15-2t)^2}} \cdot [32t + 2 \cdot (15-2t) \cdot (-2)] = \frac{20t - 30}{\sqrt{16t^2 + (15-2t)^2}}$$

dla $t \in \left[0, \frac{15}{2}\right]$.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji d:

$$\frac{20t - 30}{\sqrt{16t^2 + (15-2t)^2}} = 0$$

$$t = \frac{3}{2} \in \left[0, \frac{15}{2}\right]$$

Sprawdzamy, czy w punkcie $t = \frac{3}{2}$ funkcja d osiąga ekstremum.

Badamy monotoniczność funkcji d. Ponieważ

$d'(t) > 0$ dla $t \in \left(\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right]$

$d'(t) < 0$ dla $t \in \left[0, \frac{3}{2}\right)$

więc

funkcja d jest rosnąca w przedziale $\left[\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right]$

funkcja d jest malejąca w przedziale $\left[0, \frac{3}{2}\right]$,

co oznacza, że w punkcie $t = 1{,}5$ funkcja d osiąga wartość najmniejszą.

Odległość między zastępami harcerzy będzie najmniejsza o godzinie 10:30.

Zadanie 20. (0–4)

Firma X wytwarza pewien produkt D. Badania rynku pokazały, że związek między ilością Q produktu D, jaką firma jest w stanie zbyć na rynku, a ceną P produktu jest następujący:

$$P(Q) = 90 - 0{,}1Q \quad \text{dla } Q \in [0, 900]$$

gdzie P jest ceną za jednostkę produktu w złotych, a Q – ilością produktu w tys. sztuk.

Koszty K wytworzenia produktu D zależą od ilości Q wytwarzanego produktu następująco:

$$K(Q) = 0{,}002Q^3 + Q^2 + 29{,}9985Q + 50$$

gdzie K jest kosztem produkcji w tys. zł.

Oblicz, przy jakiej wielkości produkcji firma X osiąga największy dochód. Wynik podaj zaokrąglony z dokładnością do 100 sztuk.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
   1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście […].

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

IV. Rozumowanie i argumentacja.
   4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.

Wymagania szczegółowe

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zdający:
   4R) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej;
   5R) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji;
   6R) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

4 pkt – prawidłowa metoda wyznaczenia wielkości produkcji gwarantującej maksymalny dochód i prawidłowy wynik zaokrąglony z podaną dokładnością.

3 pkt – znalezienie ekstremów lokalnych funkcji dochodu $Z(Q)$.

2 pkt – zapisanie dochodu w zależności od Q.

1 pkt – zapisanie przychodu w zależności od Q.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Dochód Z firmy to przychód R pomniejszony o koszty K.
Ponieważ przychód wyraża się zależnością $R = Q \cdot P$, więc

$$R(Q) = 90Q - 0{,}1Q^2$$

Wyznaczamy zależność dochodu od wielkości produkcji:

$$Z(Q) = R(Q) - K(Q)$$

$$Z(Q) = -0{,}002Q^3 - 1{,}1Q^2 + 60{,}0015Q - 50$$

W celu znalezienia optymalnej wielkości produkcji, przy której dochód jest możliwie największy, należy zbadać funkcję Z.

Obliczamy pochodną funkcji Z i miejsca zerowe pochodnej:

$Z'(Q) = -0{,}006Q^2 - 2{,}2Q + 60{,}0015$ dla $Q \in [0, 900]$

$$Z'(Q) = 0$$

$$-0{,}006Q^2 - 2{,}2Q + 60{,}0015 = 0 \text{ i } Q \in [0, 900]$$

$$\Delta = (-2{,}2)^2 - 4 \cdot (-0{,}006) \cdot 60{,}0015 = 6{,}280036$$

$$Q_1 = \frac{2{,}2 - \sqrt{6{,}280036}}{2 \cdot (-0{,}006)} = 25{,}5 \quad (Q_2 < 0)$$

Ponieważ:

$Z'(Q) > 0$ dla $Q \in [0, Q_1]$

$Z'(Q) < 0$ dla $Q \in [Q_1, 900]$

więc

funkcja Z jest rosnąca w przedziale $[0, Q_1]$
funkcja Z jest malejąca w przedziale $[Q_1, 900]$

Zatem funkcja Z przyjmuje największą wartość dla argumentu $Q_1 = 25{,}5$.
Dochód firmy jest największy przy wielkości produkcji $25\,500$ sztuk.

PLANIMETRIA, GEOMETRIA ANALITYCZNA, STEREOMETRIA

Zadanie 21. (0–5)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDE$ punkt O jest środkiem symetrii podstawy ostrosłupa. Stosunek obwodu podstawy $ABCD$ do sumy długości wszystkich krawędzi ostrosłupa jest równy $1:5$. Przez przekątną AC podstawy i środek S krawędzi bocznej BE poprowadzono płaszczyznę.

Oblicz stosunek pola otrzymanego przekroju do pola podstawy ostrosłupa oraz miarę kąta BSO (w zaokrągleniu do $1°$).

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

IV. Rozumowanie i argumentacja.

4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiazywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.

Wymaganie szczegółowe

X. Stereometria. Zdający:

2R) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystanie trygonometrii.

Zasady oceniania

dla rozwiązań sposobami 1. oraz 2.

5 pkt – wyznaczenie miary kąta BSO oraz obliczenie stosunku pola przekroju do pola podstawy ostrosłupa.

4 pkt – obliczenie wartości cosinusa kąta BSO oraz stosunku pola przekroju do pola podstawy ostrosłupa

LUB

wyznaczenie miary kąta BSO.

3 pkt – obliczenie stosunku pola przekroju do pola podstawy ostrosłupa
LUB
obliczenie wartości cosinusa kąta BSO.
2 pkt – wyznaczenie długości odcinka OS w zależności od długości krawędzi podstawy.
1 pkt – wyznaczenie długości krawędzi bocznej w zależności od długości krawędzi podstawy.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

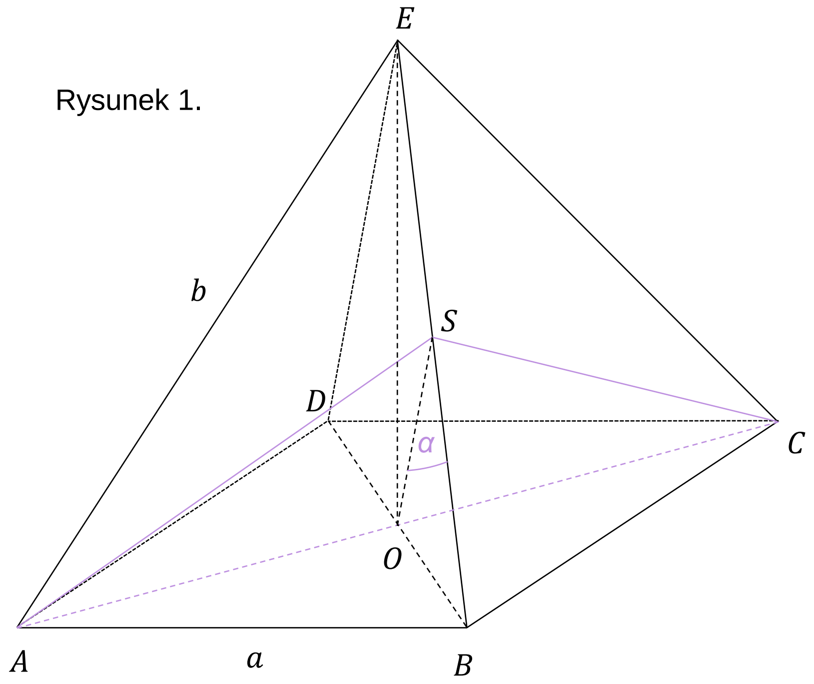
dla rozwiązania sposobem 3.
5 pkt – wyznaczenie miary kąta BSO oraz obliczenie stosunku pola przekroju do pola podstawy ostrosłupa.
4 pkt – obliczenie cosinusa kąta OEB lub FBS.
3 pkt – obliczenie stosunku pola przekroju do pola podstawy ostrosłupa.
2 pkt – wyznaczenie długości odcinków SF i OF.
1 pkt – wyznaczenie długości krawędzi bocznej w zależności od długości krawędzi podstawy.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 1.

Rysunek 1.

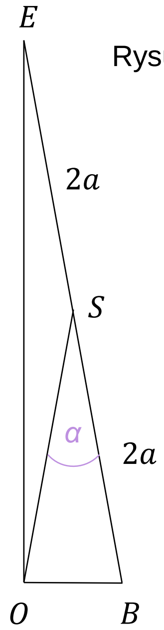


Wyznaczamy zależność b od a.

Z treści zadania mamy $\frac{4a}{4a+4b} = \frac{1}{5}$, co daje $b = 4a$.

Wyznaczamy zależność $|OS|$ od a.

Trójkąt OBE jest prostokątny, punkt S jest środkiem przeciwprostokątnej, więc S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie OBE (patrz rysunek 2.).
Zatem $|OS| = 2a$.



Rysunek 2.

Obliczamy stosunek pola przekroju ACS do pola podstawy ostrosłupa:

$$\frac{P_{ACS}}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot |OS|}{a^2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot 2a}{a^2} = \sqrt{2}$$

Do trójkąta BSO zastosujemy twierdzenie cosinusów w celu obliczenia cosinusa kąta BSO:

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (2a)^2 + (2a)^2 - 2\cdot 2a\cdot 2a\cdot\cos\alpha$$

Z ostatniego równania otrzymujemy $\cos\alpha = \frac{15}{16}$, więc $\alpha \approx 20°$.

Sposób 2.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 1.

Wyznaczamy zależność b od a.

Z treści zadania mamy $\frac{4a}{4a+4b} = \frac{1}{5}$, co daje $b = 4a$.

Dla trójkąta BEC zastosujemy twierdzenie cosinusów w celu obliczenia cosinusa kąta BEC:

$$a^2 = b^2 + b^2 - 2\cdot b\cdot b\cdot\cos|\sphericalangle BEC|$$

$$a^2 = 16a^2 + 16a^2 - 2\cdot 4a\cdot 4a\cdot\cos|\sphericalangle BEC|$$

$$\cos|\sphericalangle BEC| = \frac{31}{32}$$

Korzystamy z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta CSE i wyznaczamy długość odcinka SC:

$$|SC|^2 = b^2 + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}b\cdot b\cdot\cos|\sphericalangle BEC|$$

$$|SC|^2 = 16a^2 + 4a^2 - 16a^2 \cdot \frac{31}{32}$$

$$|SC|^2 = \frac{9}{2}a^2$$

$$|SC| = \frac{3a}{\sqrt{2}}$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta OCS w celu wyznaczenia długości odcinka OS:

$$|OS|^2 = |SC|^2 - \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2$$

$$|OS|^2 = \frac{9}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2$$

$$|OS| = 2a$$

Obliczamy stosunek pola przekroju ACS do pola podstawy ostrosłupa:

$$\frac{P_{ACS}}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot |OS|}{a^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot 2a}{a^2} = \sqrt{2}$$

W celu obliczenia cosinusa kąta BSO zastosujemy do trójkąta BSO (patrz rysunek 2.) twierdzenie cosinusów:

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (2a)^2 + (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 2a \cdot \cos\alpha$$

Z ostatniego równania otrzymujemy $\cos\alpha = \frac{15}{16}$, więc $\alpha \approx 20°$.

Sposób 3.

Wyznaczamy zależność b od a.

Z treści zadania mamy $\frac{4a}{4a+4b} = \frac{1}{5}$, co daje $b = 4a$.

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego BOE i obliczamy długość odcinka OE:

$$|OE|^2 = |BE|^2 - |OB|^2$$

$$|OE|^2 = \frac{62}{4}a^2$$

$$|OE| = \frac{\sqrt{62}}{2}a$$

Oznaczmy przez F rzut prostokątny punktu S na odcinek OB.
Ponieważ $|\sphericalangle OEB| = |\sphericalangle FSB|$, $|\sphericalangle OBE| = |\sphericalangle FBS|$ i trójkąty BOE oraz BFS są prostokątne, więc są podobne (na mocy cechy kkk podobieństwa trójkątów). Trójkąty BOE i BFS są podobne w skali $k = \frac{|BE|}{|BS|} = \frac{4a}{2a} = 2$. Zatem F jest środkiem odcinka OB, więc

$$|OF| = \frac{1}{2}|OB| = \frac{a\sqrt{2}}{4} \quad \text{oraz} \quad |SF| = \frac{1}{2}|OE| = \frac{\sqrt{62}}{4}a$$

Obliczamy długość odcinka OS:

$$|OS|^2 = |OF|^2 + |SF|^2$$

$$|OS|^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{62}}{4}a\right)^2$$

$$|OS| = 2a$$

Obliczamy stosunek pola przekroju ACS do pola podstawy ostrosłupa:

$$\frac{P_{ACS}}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot |OS|}{a^2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot 2a}{a^2} = \sqrt{2}$$

Ponieważ

$$\cos|\sphericalangle FSB| = \frac{|FS|}{|BS|} = \frac{\frac{\sqrt{62}}{4}a}{2a} = \frac{\sqrt{62}}{8}$$

i trójkąt OSB jest równoramienny, więc $\alpha = 2\cdot|\sphericalangle FSB|$. Zatem

$$\cos\alpha = \cos(2\cdot|\sphericalangle FSB|) = 2\cos^2|\sphericalangle FSB| - 1 = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{62}}{8}\right)^2 - 1 = \frac{15}{16}$$

skąd $\alpha \approx 20°$.

Zadanie 22. (0–5)

Proste o równaniach $2x + y - 4m - 4 = 0$ i $x - 3y + 5m + 5 = 0$ przecinają się w punkcie P o współrzędnych (x_P, y_P).

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których współrzędne punktu P spełniają warunki:

$\boldsymbol{x_P > 0,\ y_P > 0,\ y_P \geq x_P^2}$ **oraz** $\boldsymbol{y_P < -\frac{2}{x_P} + 8.}$

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.

4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.

Wymaganie szczegółowe

IV. Układy równań. Zdający:

1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje ich interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych.

Zasady oceniania

5 pkt – uwzględnienie wszystkich warunków zadania oraz poprawny wynik.

4 pkt – rozwiązanie nierówności

$$2(m+1) \geq (m+1)^2 \quad \text{oraz} \quad 2(m+1) < -\frac{2}{m+1} + 8$$

3 pkt – rozwiązanie jednej z nierówności

$$2(m+1) \geq (m+1)^2 \quad \text{lub} \quad 2(m+1) < -\frac{2}{m+1} + 8$$

2 pkt – wyznaczenie wartości m, dla których punkt P leży w I ćwiartce układu współrzędnych.

1 pkt – wyznaczenie współrzędnych punktu P w zależności od m.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Punkt P leży na obu prostych, więc

$$\begin{cases} 2x_P + y_P - 4m - 4 = 0 \\ x_P - 3y_P + 5m + 5 = 0 \end{cases}$$

Z powyższego układu równań wyznaczamy współrzędne punktu P:

$x_P = m + 1$

$y_P = 2(m+1)$

Ponieważ $x_P > 0$ i $y_P > 0$, więc

$$m + 1 > 0 \ \text{ i } \ 2(m+1) > 0$$

co daje $m \in (-1, +\infty)$.

Uwzględniamy warunki zadania $y_P \geq x_P^2$ i $y_P < -\frac{2}{x_P} + 8$:

$$2(m+1) \geq (m+1)^2 \quad \text{i} \quad 2(m+1) < -\frac{2}{m+1} + 8$$

$$-(m+1)(m-1) \geq 0 \quad \text{i} \quad \frac{2(m+1)^2}{m+1} + \frac{2}{m+1} - \frac{8(m+1)}{m+1} < 0$$

$$m \in [-1, 1] \quad \text{i} \quad \frac{2m^2 - 4m - 4}{m+1} < 0$$

$$m \in [-1, 1] \quad \text{i} \quad 2(m^2 - 2m - 2)(m + 1) < 0$$

$$m \in [-1, 1] \quad \text{i} \quad 2\left(m - (1 - \sqrt{3})\right)\left(m - (1 + \sqrt{3})\right)(m + 1) < 0$$

$$m \in [-1, 1] \quad \text{i} \quad m \in (-\infty, -1) \cup \left(1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\right)$$

$$m \in \left(1 - \sqrt{3}, 1\right]$$

Ponieważ $m \in (-1, +\infty)$ i $m \in \left(1 - \sqrt{3}, 1\right]$, więc ostatecznie $m \in \left(1 - \sqrt{3}, 1\right]$.

Zadanie 23. (0–4)

Trapez $ABCD$ jest wpisany w okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 38x + 22y - 96 = 0$. Wierzchołek A trapezu ma obie współrzędne ujemne, a odcinek AB jest dłuższą z podstaw tego trapezu. Przekątna AC trapezu $ABCD$ jest zawarta w prostej o równaniu $y = x$.

Oblicz sinus kąta ABC.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.

4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.

Wymagania szczegółowe

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający:
   1R) stosuje równanie okręgu w postaci ogólnej.

VII. Trygonometria. Zdający:
   5) stosuje twierdzenie sinusów […].

Zasady oceniania

dla rozwiązania sposobem 1.

4 pkt – zastosowanie twierdzenia sinusów do trójkąta ABC i obliczenie sinusa kąta ABC.

3 pkt – obliczenie długości promienia okręgu oraz długości odcinka $|AC|$.

2 pkt – obliczenie długości promienia oraz współrzędnych wierzchołków A i C trapezu

LUB

obliczenie współrzędnych wierzchołków A i C trapezu oraz obliczenie długości odcinka AC.

1 pkt – obliczenie długości promienia okręgu

LUB

obliczenie współrzędnych wierzchołków A i C trapezu.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

dla rozwiązania sposobem 2.

4 pkt – zastosowanie twierdzenia sinusów do trójkąta ABC i obliczenie sinusa kąta ABC.

3 pkt – obliczenie długości odcinka AC.

2 pkt – obliczenie odległości środka okręgu od prostej zawierającej przekątną AC trapezu.

1 pkt – obliczenie długości promienia okręgu.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Obliczamy długość promienia R okręgu z równania ogólnego okręgu:

$$R^2 = \left(\frac{38}{2}\right)^2 + \left(-\frac{22}{2}\right)^2 - (-96) = 578$$

$$R = 17\sqrt{2}$$

Obliczamy współrzędne wierzchołków A i C trapezu:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 38x + 22y - 96 = 0 \\ y = x \end{cases}$$

$2x^2 - 16x - 96 = 0$

$x = -4$ lub $x = 12$

Ponieważ wierzchołek A trapezu ma obie współrzędne ujemne, więc otrzymujemy $A(-4, -4)$ oraz $C(12, 12)$.

Obliczamy długość odcinka AC:

$$|AC| = \sqrt{(12+6)^2 + (12+6)^2} = 16\sqrt{2}$$

Po zastosowaniu twierdzenia sinusów do trójkąta ABC otrzymujemy

$$\frac{|AC|}{\sin|\sphericalangle ABC|} = 2R$$

$$\sin|\sphericalangle ABC| = \frac{|AC|}{2R} = \frac{16\sqrt{2}}{34\sqrt{2}} = \frac{8}{17}$$

Sposób 2.

Obliczamy współrzędne środka S okręgu i długość R promienia okręgu:

$$x^2 + y^2 - 38x + 22y - 96 = 0$$

$$(x-19)^2 - 361 + (y+11)^2 - 121 - 96 = 0$$

$$(x-19)^2 + (y+11)^2 = \left(17\sqrt{2}\right)^2$$

Zatem środek S okręgu ma współrzędne $S = (19, -11)$, a długość R promienia okręgu wynosi $R = 17\sqrt{2}$.

Niech E będzie środkiem odcinka AC. Obliczamy $|SE|$ jako odległość punktu S od prostej AC o równaniu $x - y = 0$:

$$d(S, AC) = |SE| = \frac{|19+11|}{\sqrt{2}} = 15\sqrt{2}$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta CES w celu obliczenia długości odcinka EC (połowa długości przekątnej AC trapezu $ABCD$):

$$|EC|^2 = R^2 - |SE|^2$$

$$|EC|^2 = \left(17\sqrt{2}\right)^2 - \left(15\sqrt{2}\right)^2 = 128$$

Zatem $|AC| = 2 \cdot |EC| = 16\sqrt{2}$.

Po zastosowaniu twierdzenia sinusów do trójkąta ABC otrzymujemy

$$\frac{|AC|}{\sin|\sphericalangle ABC|} = 2R$$

$$\sin|\sphericalangle ABC| = \frac{|AC|}{2R} = \frac{16\sqrt{2}}{34\sqrt{2}} = \frac{8}{17}$$

Zadanie 24. (0–4)

Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem takim, że $\overrightarrow{BD} = [-21, -7]$ i $\overrightarrow{DC} = [15, 8]$.

Oblicz pole tego równoległoboku.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.

4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.

Wymagania szczegółowe

VII. Trygonometria. Zdający:

4) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ […].

VIII. Planimetria. Zdający:

2) […] stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów […].

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający:

3R) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory […].

Zasady oceniania

dla rozwiązania sposobem 1.

4 pkt – poprawna metoda obliczenia pola równoległoboku i prawidłowy wynik.
3 pkt – obliczenie sinusa kąta BDC.
2 pkt – zastosowanie twierdzenia cosinusów do obliczenia cosinusa kąta BDC.
1 pkt – obliczenie długości boków trójkąta BCD.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

dla rozwiązań sposobami 2. oraz 3.

4 pkt – poprawna metoda obliczenia pola równoległoboku i prawidłowy wynik.
3 pkt – obliczenie pola trójkąta BCD.
2 pkt – zastosowanie wzoru do obliczenia pola trójkąta BCD.
1 pkt – wyrażenie współrzędnych punktów B i C za pomocą współrzędnych punktu D
LUB
obliczenie długości boków trójkąta BCD.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Obliczamy długości boków trójkąta BCD:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = [-21, -7] + [15, 8] = [-6, 1]$$

$$|BC| = \sqrt{(-6)^2 + 1^2} = \sqrt{37}$$

$$|CD| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$$

$$|BD| = \sqrt{(-21)^2 + (-7)^2} = \sqrt{490} = 7\sqrt{10}$$

Oznaczmy kąt BDC przez α.

Z twierdzenia cosinusów oraz ze wzoru $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ obliczamy sinus kąta α:

$$|BC|^2 = |BD|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |BD| \cdot |CD| \cdot \cos\alpha$$

$$37 = 490 + 289 - 2 \cdot 7\sqrt{10} \cdot 17 \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{53}{17\sqrt{10}}$$

Kąt α jest kątem ostrym, więc

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{2809}{2890}} = \sqrt{\frac{81}{2890}} = \frac{9}{17\sqrt{10}}$$

Obliczamy pole równoległoboku:

$$P_{ABCD} = |CD|\cdot|BD|\cdot\sin\alpha$$

$$P_{ABCD} = 17\cdot 7\sqrt{10}\cdot\frac{9}{17\sqrt{10}} = 63$$

Pole czworokąta $ABCD$ jest równe 63.

Sposób 2.

Niech x_D , y_D będą współrzędnymi punktu D, tj. $D=(x_D, y_D)$.

Wyrazimy współrzędne punktów B i C za pomocą współrzędnych punktu D.

Ponieważ $\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{BD} = [21, 7]$, więc $B = (21+x_D, 7+y_D)$ i podobnie:
$\overrightarrow{DC} = [15, 8]$, więc $C = (15+x_D, 8+y_D)$.

Korzystamy ze wzoru na pole trójkąta (przy danych wierzchołkach trójkąta) w celu obliczenia pola trójkąta BCD:

$$P_{BCD} = \frac{1}{2}\left|[(15+x_D)-(21+x_D)][y_D-(7+y_D)]-[(8+y_D)-(7+y_D)][x_D-(21+x_D)]\right|$$

$$P_{BCD} = \frac{1}{2}|(-6)\cdot(-7)-1\cdot(-21)| = \frac{63}{2}$$

Obliczamy pole równoległoboku $ABCD$:

$$P_{ABCD} = 2\cdot P_{BCD} = 63$$

Pole równoległoboku $ABCD$ jest równe 63.

Sposób 3.

Oznaczmy: $a=|BD|$, $b=|BC|$, $c=|CD|$, $2p=a+b+c$.

Obliczamy długości boków trójkąta BCD:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC} = [-21,-7]+[15,8] = [-6,1]$$

$$b = |BC| = \sqrt{(-6)^2+1^2} = \sqrt{37}$$

$$c = |CD| = \sqrt{15^2+8^2} = \sqrt{289} = 17$$

$$a = |BD| = \sqrt{(-21)^2 + (-7)^2} = \sqrt{490} = 7\sqrt{10}$$

Skorzystamy ze wzoru Herona w celu obliczenia pola trójkąta BCD.

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7\sqrt{10} + \sqrt{37} + 17}{2}$$

$$p - a = \frac{\sqrt{37} + 17 - 7\sqrt{10}}{2}$$

$$p - b = \frac{7\sqrt{10} + 17 - \sqrt{37}}{2}$$

$$p - c = \frac{\sqrt{37} + 7\sqrt{10} - 17}{2}$$

$$p(p-a) \cdot (p-b)(p-c) = \frac{\left(\sqrt{37} + 17\right)^2 - \left(7\sqrt{10}\right)^2}{4} \cdot \frac{\left(7\sqrt{10}\right)^2 - \left(17 - \sqrt{37}\right)^2}{4}$$

$$p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{34\sqrt{37} - 164}{4} \cdot \frac{34\sqrt{37} + 164}{4}$$

$$p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{15876}{16}$$

$$P_{BCD} = \sqrt{\frac{15876}{16}} = \frac{63}{2}$$

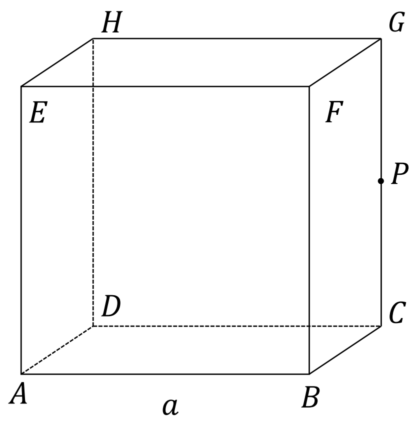
Obliczamy pole równoległoboku $ABCD$:

$$P_{ABCD} = 2 \cdot P_{BCD} = 63$$

Pole równoległoboku $ABCD$ jest równe 63.

Zadanie 25. (0–3)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości a. Punkt P jest środkiem krawędzi CG tego sześcianu (zobacz rysunek poniżej).



$|PG| = |PC|$

Oblicz odległość wierzchołka C od płaszczyzny zawierającej punkty B, D oraz P.

Wymaganie ogólne
IV. Rozumowanie i argumentacja.
4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań […].

Wymaganie szczegółowe
X. Stereometria. Zdający:
2R) wyznacza przekroje sześcianu […].

Zasady oceniania
dla rozwiązań sposobami 1.–4.

3 pkt – poprawna metoda obliczenia odległości wierzchołka C od płaszczyzny zawierającej punkty B, D oraz P i podanie prawidłowego wyniku.

2 pkt – obliczenie pola trójkąta CPS i wyrażenie pola tegoż trójkąta za pomocą h (gdzie h jest szukaną docelowo odległością w zadaniu)
LUB
obliczenie sinusa kąta SPC i wyrażenie sinusa kąta KPC za pomocą h (gdzie h jest szukaną docelowo odległością w zadaniu)
LUB
wyrażenie objętości ostrosłupa $BCDP$ o podstawie BCD za pomocą a i wyrażenie objętości ostrosłupa $BDPC$ o podstawie BDP za pomocą a oraz h (gdzie h jest szukaną docelowo odległością w zadaniu)
LUB
zastosowanie twierdzenia Pitagorasa do trójkątów SKC oraz PKC i zapisanie równania

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 - (|PS| - |KP|)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - |KP|^2$$

1 pkt – obliczenie odległości pomiędzy środkiem S podstawy $ABCD$ sześcianu a punktem P.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania
Sposób 1. (z wykorzystaniem równości pól trójkąta)

Oznaczmy przez S punkt przecięcia się przekątnych podstawy $ABCD$ sześcianu, natomiast przez h – wysokość trójkąta CPS opuszczoną z wierzchołka C na bok PS.

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta CPS celem obliczenia długości boku PS:

$$|PS|^2 = |CS|^2 + |CP|^2$$
$$|PS|^2 = \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$$
$$|PS| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Ponieważ pole trójkąta CPS jest równe

$$P_{CPS} = \frac{1}{2}|CS| \cdot |CP| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}a^2$$

oraz

$$P_{CPS} = \frac{1}{2}|PS| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{3} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4}ah\,,$$

więc

$$\frac{\sqrt{2}}{8}a = \frac{\sqrt{3}}{4}ah\,,$$

co daje $h = \frac{\sqrt{6}}{6}a$.

Szukana odległość jest równa $\frac{\sqrt{6}}{6}a$.

Sposób 2. (z wykorzystaniem równości sinusów kąta)

Oznaczmy:

S – punkt przecięcia się przekątnych podstawy $ABCD$ sześcianu,

h – wysokość trójkąta CPS opuszczoną z wierzchołka C na bok PS,

K – spodek wysokości trójkąta CPS opuszczonej z wierzchołka C na bok PS.

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta CPS celem obliczenia długości boku PS:

$$|PS|^2 = |CS|^2 + |CP|^2$$

$$|PS|^2 = \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$$

$$|PS| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Obliczamy wartość sinusa kąta SPC w trójkącie prostokątnym SCP:

$$\sin|\sphericalangle SPC| = \frac{|CS|}{|PS|} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}{\frac{1}{2}a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Zapisujemy sinus kąta KPC jako stosunek długości odpowiednich boków w trójkącie prostokątnym CKP:

$$\sin|\sphericalangle KPC| = \frac{|CK|}{|CP|} = \frac{h}{\frac{1}{2}a}$$

Ponieważ $|\sphericalangle SPC| = |\sphericalangle KPC|$, więc z ostatnich dwóch równości otrzymujemy

$$\frac{h}{\frac{1}{2}a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$h = \frac{\sqrt{6}}{6}a$$

Szukana odległość jest równa $\frac{\sqrt{6}}{6}a$.

Sposób 3. (z wykorzystaniem równości objętości ostrosłupa)

Oznaczmy:

S – punkt przecięcia się przekątnych podstawy $ABCD$ sześcianu,

h – wysokość trójkąta CPS opuszczoną z wierzchołka C na bok PS,

K – spodek wysokości trójkąta CPS opuszczonej z wierzchołka C na bok PS.

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta CPS celem obliczenia długości boku PS:

$$|PS|^2 = |CS|^2 + |CP|^2$$

$$|PS|^2 = \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$$

$$|PS| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Obliczamy objętość ostrosłupa $BCDP$ o podstawie trójkątnej BCD i wysokości opuszczonej na podstawę BCD z wierzchołka P:

$$V_{BCDP} = \frac{1}{3} \cdot P_{\Delta BCD} \cdot |CP| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{12}a^3$$

Obliczamy objętość ostrosłupa $BDPC$ o podstawie trójkątnej BDP i wysokości opuszczonej na podstawę BDP z wierzchołka C:

$$V_{BDPC} = \frac{1}{3} \cdot P_{\Delta BDP} \cdot |CK| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot h = \frac{\sqrt{6}}{12}a^2h$$

Ponieważ $V_{BCDP} = V_{BDPC}$, więc

$$\frac{1}{12}a^3 = \frac{\sqrt{6}}{12}a^2h$$

$$h = \frac{\sqrt{6}}{6}a$$

Szukana odległość jest równa $\frac{\sqrt{6}}{6}a$.

Sposób 4. (z wykorzystaniem równości boku trójkątów prostokątnych)

Oznaczmy:

S – punkt przecięcia się przekątnych podstawy $ABCD$ sześcianu,

h – wysokość trójkąta CPS opuszczoną z wierzchołka C na bok PS,

K – spodek wysokości trójkąta CPS opuszczonej z wierzchołka C na bok PS,

x – długość odcinka KP.

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta CPS celem obliczenia długości boku PS:

$$|PS|^2 = |CS|^2 + |CP|^2$$

$$|PS|^2 = \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$$

$$|PS| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Trójkąty SKC oraz PKC są prostokątne i mają wspólny bok KC, więc

$$h^2 = |SC|^2 - |SK|^2 \quad \text{i} \quad h^2 = |PC|^2 - |KP|^2$$

$$h^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - (|PS| - x)^2 \quad \text{i} \quad h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - x^2$$

$$h^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - x\right)^2 \quad \text{i} \quad h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - x^2$$

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - x^2$$

skąd otrzymujemy $x = \frac{\sqrt{3}}{6}a$.

Podstawiamy $x = \frac{\sqrt{3}}{6}a$ do równania $h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - x^2$ i otrzymujemy

$$h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2$$

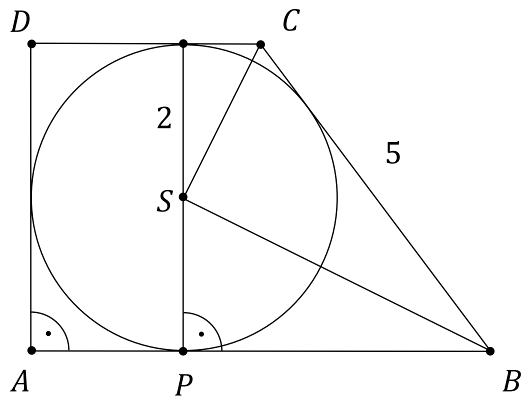
$$h = \frac{\sqrt{6}}{6}a$$

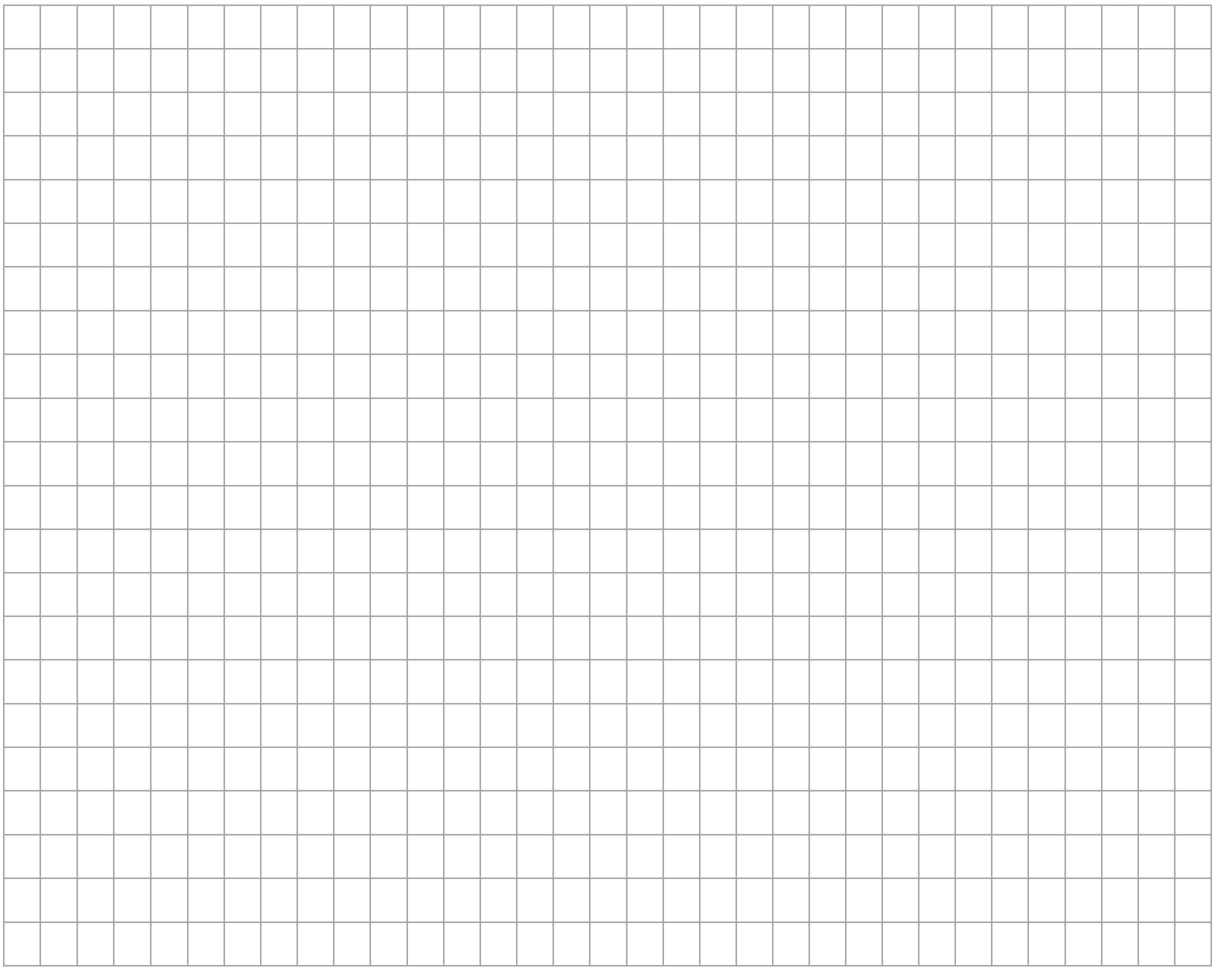
Szukana odległość jest równa $\frac{\sqrt{6}}{6}a$.

Zadanie 26. (0–5)

Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o kątach prostych przy wierzchołkach A i D. Ramię BC trapezu ma długość 5. W ten trapez wpisano okrąg o środku w punkcie S i promieniu 2. Punkt P jest punktem styczności okręgu i dłuższej podstawy AB tego trapezu (zobacz rysunek).

Wykaż, że trójkąty BPS i BSC są trójkątami podobnymi, oraz oblicz skalę tego podobieństwa.





Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.

1) Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania […].

Wymagania szczegółowe

VIII. Planimetria. Zdający:

12) przeprowadza dowody geometryczne;

R) stosuje własności czworokątów […] opisanych na okręgu.

Zasady oceniania

dla rozwiązań sposobami 1.–3.

5 pkt – obliczenie skali podobieństwa trójkątów PBS oraz SBC.

4 pkt – obliczenie długości odcinka stycznej (zawierającej odcinek BC) od punktu B do punktu styczności z okręgiem
LUB
stwierdzenie, że każdy z obliczonych stosunków odpowiednich boków trójkątów BPS i BSC jest skalą podobieństwa.

3 pkt – uzasadnienie, że trójkąty BPS i BSC są podobne.

2 pkt – uzasadnienie, że kąt BSC jest kątem prostym
LUB
obliczenie długości boków trójkątów BSC oraz BPS
LUB
obliczenie długości boków trójkąta BPS i uzasadnienie równości miar kątów PBS oraz SBC (lub BCS oraz SCD).

1 pkt – uzasadnienie równości miar kątów PBS oraz SBC (lub BCS oraz SCD)
LUB
obliczenie długości boków trójkąta BPS.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

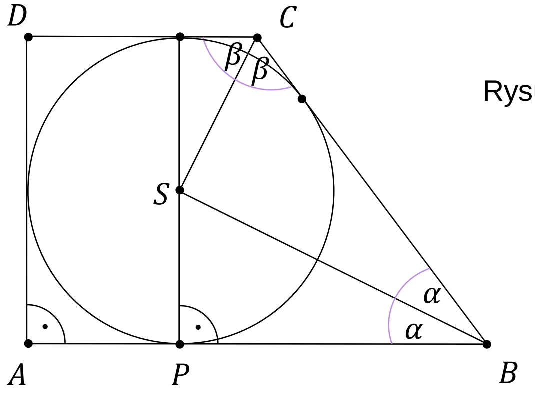
Sposób 1.

Wykażemy, że trójkąty BPS i BSC są podobne.

Punkt S jest równooddalony od boków AB i BC trapezu jako środek okręgu wpisanego w trapez, więc leży na dwusiecznej kąta ABC. Zatem $|\sphericalangle PBS| = |\sphericalangle SBC|$.

Podobna argumentacja prowadzi do stwierdzenia, że $|\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle SCD|$.

Oznaczmy miary kątów PBS oraz BCS jako – odpowiednio – α oraz β (rysunek 1.).



Rysunek 1.

Ponieważ suma miar kątów przy ramieniu trapezu wynosi $180°$, więc $2\alpha + 2\beta = 180°$, skąd dalej $\alpha + \beta = 90°$. Dlatego:

$$|\sphericalangle BSC| = 180° - (\alpha + \beta) = 90°$$

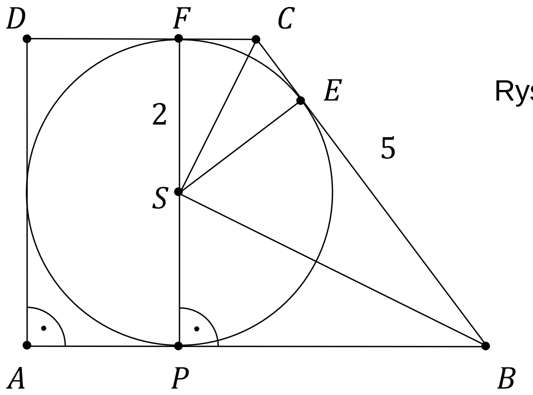
oraz

$$|\sphericalangle PSB| = 180° - (90° + \alpha) = \beta.$$

To oznacza, że $\Delta BPS \sim \Delta BSC$ (na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów).

Obliczymy skalę podobieństwa trójkątów BPS oraz BSC.

Niech E i F oznaczają punkty styczności okręgu i odcinków – odpowiednio – BC oraz CD (rysunek 2.).



Rysunek 2.

Ponieważ $|\sphericalangle SBE| = |\sphericalangle CSE|$ oraz $|\sphericalangle ESB| = |\sphericalangle ECS|$, więc trójkąty prostokątne SBE i CSE są podobne. Zatem

$$\frac{|SE|}{|BE|} = \frac{|CE|}{|SE|}$$

i dalej

$$|SE|^2 = |BE| \cdot |CE|$$

$$4 = (5 - |CE|) \cdot |CE|$$

$$|CE|^2 - 5|CE| + 4 = 0$$

$$|CE| = 1 \text{ lub } |CE| = 4$$

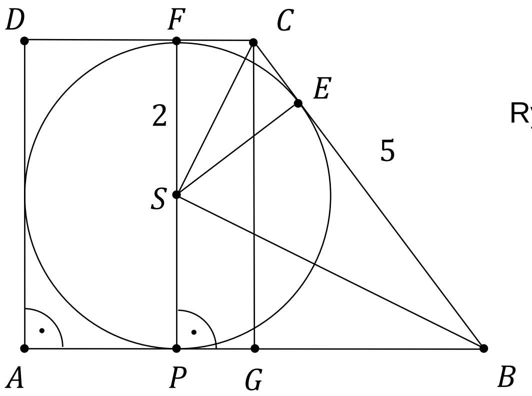
Z twierdzenia o odcinkach stycznych mamy $|PB| = |BE|$ oraz $|CE| = |CF|$.
Ponieważ $|AB| < |CD|$, więc $|CE| < |EB|$ i w konsekwencji $|CE| = 1$ oraz $|BE| = 4$.
Po zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa do trójkąta BSE otrzymujemy $|BS| = 2\sqrt{5}$.

Obliczamy skalę podobieństwa trójkątów BSC i BPS:

$$k = \frac{|BC|}{|BS|} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Sposób 2.

Wykażemy, że trójkąty BPS i BSC są podobne.
Niech E i F oznaczają punkty styczności okręgu i odcinków – odpowiednio – BC oraz CD.
Oznaczmy przez G rzut prostokątny wierzchołka C na podstawę AB trapezu (rysunek 3.).



Rysunek 3.

Punkt S jest równooddalony od boków AB i BC trapezu jako środek okręgu wpisanego w trapez, więc wysokość trapezu jest równa 4.

Do trójkąta BGC stosujemy twierdzenie Pitagorasa i obliczamy długość odcinka BG:

$$|BG|^2 + |GC|^2 = |BC|^2$$

$$|BG|^2 + 4^2 = 5^2$$

$$|BG| = 3$$

Ponieważ G jest rzutem prostokątnym wierzchołka C na podstawę AB, więc

$$|GP| = |FC|$$

Korzystamy z twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i otrzymujemy

$$|AD| + |BC| = |AB| + |CD|$$

$$4 + 5 = |AP| + |FC| + |BG| + |FC| + |DF|$$

$$9 = 2|AP| + 2|FC| + 3$$

$$6 = 2|SP| + 2|FC|$$

$$|FC| = 1$$

Zatem $|PB| = |PG| + |GB| = 4$.

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta BPS celem obliczenia $|BS|$:

$$|BP|^2 + |PS|^2 = |BS|^2$$

$$4^2 + 2^2 = |BS|^2$$

$$|BS| = 2\sqrt{5}$$

Zatem trójkąt BPS ma boki o długościach: $|BP| = 4$, $|PS| = 2$ i $|BS| = 2\sqrt{5}$.
Z twierdzenia o odcinkach stycznych $|CE| = |FC|$, więc $|CE| = 1$.

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta SEC celem obliczenia $|CS|$:

$$2^2 + 1^2 = |CS|^2$$

$$|CS| = \sqrt{5}$$

Zatem trójkąt BSC ma boki o długościach: $|BS| = 2\sqrt{5}$, $|CS| = \sqrt{5}$, $|BC| = 5$.
Ponieważ

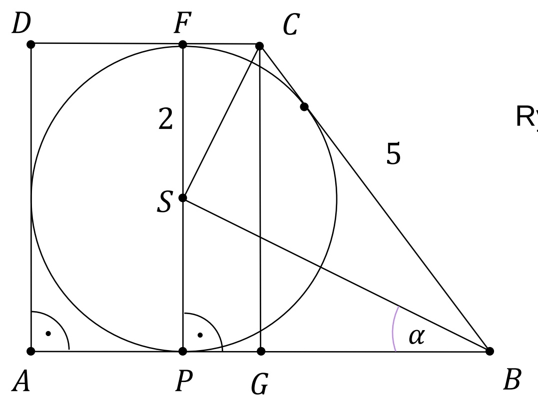
$$\frac{|BC|}{|BS|} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{oraz} \quad \frac{|CS|}{|PS|} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{oraz} \quad \frac{|BS|}{|BP|} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

więc trójkąty BPS oraz BSC są podobne (na podstawie cechy *kkk* podobieństwa trójkątów). To kończy dowód.
Każdy z obliczonych powyżej stosunków długości odpowiednich boków trójkątów BPS oraz BSC jest równy skali podobieństwa tychże trójkątów.

Skala podobieństwa trójkątów BPS oraz BSC jest równa $k = \frac{|BC|}{|BS|} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Sposób 3.

Wykażemy, że trójkąty BPS i BSC są podobne.
Oznaczmy przez α miarę kąta PBS, przez G – rzut prostokątny punktu C na podstawę AB trapezu, przez F – punkt styczności okręgu z odcinkiem CD (rysunek 4.).



Rysunek 4.

Punkt S jest równoodległy od boków AB i BC trapezu jako środek okręgu wpisanego w trapez, więc wysokość trapezu jest równa 4.

Do trójkąta BGC stosujemy twierdzenie Pitagorasa, aby obliczyć długość odcinka BG:

$$|BG|^2 + |GC|^2 = |BC|^2$$

$$|BG|^2 + 4^2 = 5^2$$

$$|BG| = 3$$

Ponieważ G jest rzutem prostokątnym wierzchołka C na podstawę AB, więc

$$|GP| = |FC|$$

Korzystamy z twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i otrzymujemy

$$|AD| + |BC| = |AB| + |CD|$$

$$4 + 5 = |AP| + |FC| + |BG| + |FC| + |DF|$$

$$9 = 2|AP| + 2|FC| + 3$$

$$6 = 2|SP| + 2|FC|$$

$$|FC| = 1$$

Zatem $|PB| = |PG| + |GB| = 4$.

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta BPS celem obliczenia $|BS|$:

$$|BP|^2 + |PS|^2 = |BS|^2$$

$$4^2 + 2^2 = |BS|^2$$

$$|BS| = 2\sqrt{5}$$

Zatem trójkąt BPS ma boki o długościach: $|BP| = 4$, $|PS| = 2$ i $|BS| = 2\sqrt{5}$.
Punkt S jest równooddalony od boków AB i BC trapezu jako środek okręgu wpisanego w trapez, więc leży na dwusiecznej kąta ABC. Zatem $|\measuredangle PBS| = |\measuredangle SBC| = \alpha$.

Obliczamy stosunki długości odpowiednich boków trójkątów BPS oraz BSC leżących przy kątach – odpowiednio – PBS oraz SBC:

$$\frac{|BS|}{|BP|} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \frac{|BC|}{|BS|} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ponieważ stosunki długości odpowiednich boków trójkątów BPS oraz BSC są równe i równe są miary kątów przyległych do tych boków, więc trójkąty BPS i BSC są podobne (na podstawie cechy *bkb* podobieństwa trójkątów).
To kończy dowód.
Każdy z obliczonych powyżej stosunków długości odpowiednich boków trójkątów BPS oraz BSC jest równy skali podobieństwa tychże trójkątów.

Skala podobieństwa trójkątów BPS oraz BSC jest równa $k = \frac{|BC|}{|BS|} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Zadanie 27. (0–4)

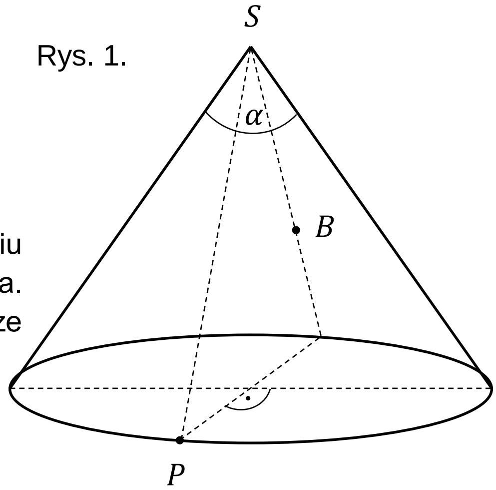
Tomek i Marek chcą wejść docelowo na szczyt S pewnej góry. W chwili początkowej znajdują się w punkcie P położonym na stoku góry dokładnie na północ od szczytu na wysokości H_0 metrów n.p.m. Tomek i Marek chcą dotrzeć do bazy B znajdującej się dokładnie na południe od szczytu na przeciwległym południowym stoku góry na wysokości H_1 metrów n.p.m., a następnie z bazy wejść na szczyt leżący na wysokości H_2 metrów n.p.m. (patrz rysunek 1.).

Oblicz długość najkrótszej drogi, jaką muszą pokonać, aby dotrzeć do bazy.

Przyjmij, że góra jest stożkiem o kącie rozwarcia α.

Wskazówka: Powierzchnia boczna stożka po rozcięciu wzdłuż tworzącej i rozłożeniu jest wycinkiem koła. Najkrótsza droga do bazy odpowiada najkrótszej drodze z punktu P do B na wycinku koła.

Rys. 1.



Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiazywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

IV. Rozumowanie i argumentacja.

4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiazywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.

Wymagania szczegółowe

VII. Trygonometria. Zdający:

1R) stosuje miarę łukową […].

VIII. Planimetria. Zdający:

2) […] stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów;

6) stosuje wzory na pole wycinka koła i długość łuku okręgu.

Zasady oceniania

4 pkt – prawidłowa metoda obliczenia długości odcinka PB na siatce stożka i prawidłowy wynik.

3 pkt – obliczenie miary łukowej kąta BSP na siatce stożka i obliczenie długości odcinków BS oraz PS.

2 pkt – obliczenie miary łukowej kąta BSP na siatce stożka
LUB
obliczenie długości odcinków BS oraz PS.

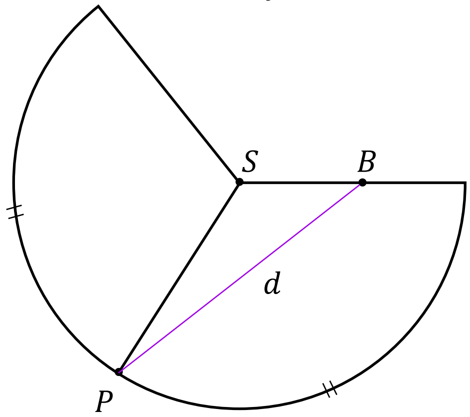
1 pkt – zapisanie, że najkrótsza droga jest równa długości odcinka PB na siatce stożka.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech l będzie długością tworzącej stożka, a R – długością promienia podstawy.
Rozwiniemy powierzchnię boczną stożka, na której zaznaczymy kluczowe punkty P, B i S. Długość odcinka PB oznaczymy jako d. Jest to długość najkrótszej trasy z punktu P do bazy (zobacz rys. 1.).

Rysunek 1.



Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest wycinkiem koła o promieniu długości l. Wyznaczymy miarę β kąta środkowego tego wycinka.

Ze wzorów na pole powierzchni bocznej stożka oraz pole wycinka koła otrzymujemy

$$\pi \cdot R \cdot l = \frac{\beta}{2\pi} \cdot \pi \cdot l^2$$

$$\beta = 2\pi \cdot \frac{R}{l}$$

Zatem

$$|\measuredangle BSP| = \frac{1}{2}\beta = \pi \cdot \frac{R}{l}$$

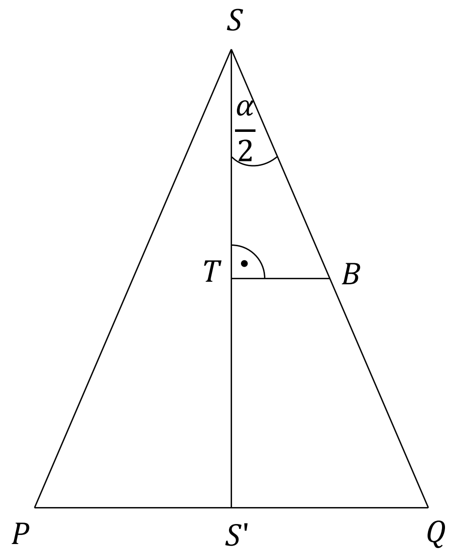
Kąt rozwarcia stożka jest równy α, więc $\frac{R}{l} = \sin\frac{\alpha}{2}$, co prowadzi do

$$|\measuredangle BSP| = \pi \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

Wyrazimy długości odcinków BS oraz PS w zależności od danych podanych w treści zadania.

Rozważmy przekrój osiowy stożka zawierający punkty B, P oraz S (zobacz rys. 2.). Punkt S' na rysunku 2. jest rzutem prostokątnym punktu S na podstawę stożka, natomiast punkt Q – punktem przecięcia tworzącej SB z podstawą stożka.

Rys. 2.



Z trójkątów $SS'Q$ oraz STB otrzymujemy

$$|BS| = \frac{|ST|}{\cos\frac{\alpha}{2}} \quad \text{oraz} \quad |SQ| = \frac{|SS'|}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Z treści zadania $|ST| = H_2 - H_1$ oraz $|SS'| = H_2 - H_0$, więc

$$|BS| = \frac{H_2 - H_1}{\cos\frac{\alpha}{2}} \quad \text{oraz} \quad |PS| = |SQ| = \frac{H_2 - H_0}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta BSP: i obliczamy $|PB|$:

$$|PB|^2 = |PS|^2 + |BS|^2 - 2 \cdot |PS| \cdot |BS| \cdot \cos|\sphericalangle BSP|$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{H_2 - H_0}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2 + \left(\frac{H_2 - H_1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2 - \frac{2(H_2 - H_0)(H_2 - H_1)}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2} \cdot \cos\left(\pi \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$d = \frac{\sqrt{(H_2 - H_0)^2 + (H_2 - H_1)^2 - 2(H_2 - H_0)(H_2 - H_1)\cos\left(\pi \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\right)}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

KOMBINATORYKA, RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I STATYSTYKA

Zadanie 28. (0–4)

Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną dodatnią. Ze zbioru $\mathbb{M} = \{1; 2; 3; \dots; 3n+1\}$ losujemy jednocześnie trzy liczby. Zdarzenie A odpowiada jednoczesnemu wylosowaniu ze zbioru $\mathbb{M}$ trzech liczb, takich że suma tych liczb przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiazywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

Wymagania szczegółowe

XI. Kombinatoryka. Zdający:

1R) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;

2R) stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) i jego własności przy rozwiązywaniu problemów kombinatorycznych.

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zdający:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody wyznaczenia szukanego prawdopodobieństwa oraz prawidłowy wynik.

3 pkt – rozpatrzenie wszystkich możliwych przypadków, kiedy suma trzech liczb naturalnych daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1, tj. zapisanie, że moc zbioru A wynosi

$$\binom{n}{2}\cdot\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}\cdot\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\cdot\binom{n}{1}$$

2 pkt – rozpatrzenie tylko dwóch z wszystkich możliwych przypadków, kiedy suma trzech liczb naturalnych daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1 – tj. zapisanie, że moc zbioru A wynosi

$$\binom{n}{2}\cdot\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}\cdot\binom{n}{1}$$

LUB

$$\binom{n}{2}\cdot\binom{n+1}{1}+\binom{n}{2}\cdot\binom{n}{1}$$

LUB

$$\binom{n+1}{2}\cdot\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\cdot\binom{n}{1}$$

1 pkt – wyznaczenie liczby wszystkich trójelementowych podzbiorów zbioru $\mathbb{M}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy liczbę wszystkich trójelementowych podzbiorów zbioru $\mathbb{M}$:

$$\binom{3n+1}{3}=\frac{(3n+1)\cdot 3n\cdot(3n-1)}{6}=\frac{(3n+1)n(3n-1)}{2}$$

Wyznaczamy moc zbioru A.

Zauważmy, że suma trzech liczb naturalnych daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1, gdy:

1) dwie z tych liczb są podzielne przez 3, a jedna z tych liczb daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1

LUB

2) dwie z tych liczb dają przy dzieleniu przez 3 resztę 1, a jedna z tych liczb daje przy dzieleniu przez 3 resztę 2

LUB

3) dwie z tych liczb dają przy dzieleniu przez 3 resztę 2, a jedna z tych liczb jest podzielna przez 3.

Ponieważ w zbiorze $\mathbb{M}$ mamy:

n liczb podzielnych przez 3,
$n+1$ liczb, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1,
n liczb, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 2,

więc

$$|A|=\binom{n}{2}\cdot\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}\cdot\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\cdot\binom{n}{1}=$$

$$= \frac{n(n-1)(n+1)}{2} + \frac{(n+1)\cdot n\cdot n}{2} + \frac{n(n-1)n}{2} =$$

$$= \frac{n\left(n^2-1+n^2+n+n^2-n\right)}{2} = \frac{n(3n^2-1)}{2}$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{\frac{n(3n^2-1)}{2}}{\frac{(3n+1)n(3n-1)}{2}} = \frac{(3n^2-1)}{(3n+1)(3n-1)}$$

Zadanie 29. (0–4)

Pan Nowak często gra z synem w szachy. Obliczył, że 60% rozegranych partii wygrywa jego syn.

Oblicz, ile partii szachów musi rozegrać z synem pan Nowak, aby prawdopodobieństwo wygrania przez ojca przynajmniej jednej partii w całej rozgrywce było większe od $0{,}95$.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

Wymaganie szczegółowe

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zdający:
   2R) stosuje schemat Bernoulliego.

Zasady oceniania

4 pkt – rozwiązanie nierówności: $1-(0{,}6)^n > 0{,}95$ i podanie odpowiedzi.
3 pkt – zastosowanie wzoru na prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów w n próbach i zapisanie nierówności: $1-(0{,}6)^n > 0{,}95$.
2 pkt – zapisanie nierówności: $1-P(S_n^0) > 0{,}95$.
1 pkt – obliczenie prawdopodobieństwa sukcesu i porażki.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Próbą Bernoullego jest rozegranie pojedynczej partii szachów z synem. Sukcesem w tej próbie jest wygrana pana Nowaka z synem w pojedynczej partii.

Prawdopodobieństwo sukcesu jest równe $p = 0{,}4$, natomiast prawdopodobieństwo porażki jest równe $q = 0{,}6$.
Niech n oznacza szukaną liczbę partii oraz niech
S_n^0 – oznacza niewygranie przez ojca żadnej partii szachów,
S_n^1 – oznacza wygranie przez ojca jednej partii szachów,
S_n^2 – oznacza wygranie przez ojca dwóch partii szachów,
⋮
S_n^n – oznacza wygranie przez ojca n partii szachów.

Korzystamy ze schematu Bernoullego. Prawdopodobieństwo wygrania przez pana Nowaka co najmniej jednej partii szachów jest równe

$$P(S_n^1 \cup S_n^2 \cup S_n^3 \cup \ldots \cup S_n^n) = 1 - P(S_n^0)$$

Zatem

$$1 - P(S_n^0) > 0{,}95$$

$$1 - \binom{n}{0} \cdot (0{,}4)^0 \cdot (0{,}6)^n > 0{,}95$$

$$1 - (0{,}6)^n > 0{,}95$$

$$(0{,}6)^n < 0{,}05$$

$$n \geq 6$$

Pan Nowak musi rozegrać z synem co najmniej sześć partii.

Zadanie 30. (0–3)

Pewna choroba dotyka $0{,}2\%$ całej populacji i w początkowym stadium nie daje widocznych objawów chorobowych. W ramach profilaktyki stosuje się pewien test przesiewowy, który daje wynik pozytywny lub negatywny. Prawdopodobieństwo tego, że test wykonany na osobie chorej da wynik pozytywny (oznaczający chorobę) jest równe $0{,}99$. Ponadto wiadomo, że prawdopodobieństwo tego, że test wykonany na osobie zdrowej da wynik negatywny, jest równe $0{,}98$.
Pan X poddał się testowi, który dał wynik pozytywny. Pozytywny wynik oznacza podejrzenie choroby.

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że Pan X jest rzeczywiście chory.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi […].

Wymaganie szczegółowe

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zdający:
   1R) […] stosuje wzór Bayesa […].

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia szukanego prawdopodobieństwa i prawidłowy wynik.
2 pkt – zastosowanie wzoru Bayesa.
1 pkt – obliczenie prawdopodobieństw warunkowych $P(-|C)$ oraz $P(+|Z)$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

„+" – zdarzenie polegające na tym, że wylosowana osoba z populacji poddana testowi otrzyma wynik pozytywny,

„–" – zdarzenie polegające na tym, że wylosowana osoba z populacji poddana testowi otrzyma wynik negatywny,

Z – zdarzenie polegające na tym, że wylosowana osoba z populacji jest zdrowa,

C – zdarzenie polegające na tym, że wylosowana osoba z populacji jest chora.

Należy obliczyć $P(C|+)$.

Zgodnie z treścią zadania:

$P(C) = 0{,}002$, więc $P(Z) = 0{,}998$

$P(+|C) = 0{,}99$, więc $P(-|C) = 0{,}01$

$P(-|Z) = 0{,}98$, więc $P(+|Z) = 0{,}02$.

Stosujemy twierdzenie Bayesa i obliczamy szukane prawdopodobieństwo:

$$P(C|+) = P(+|C) \cdot \frac{P(C)}{P(+|Z) \cdot P(Z) + P(+|C) \cdot P(C)}$$

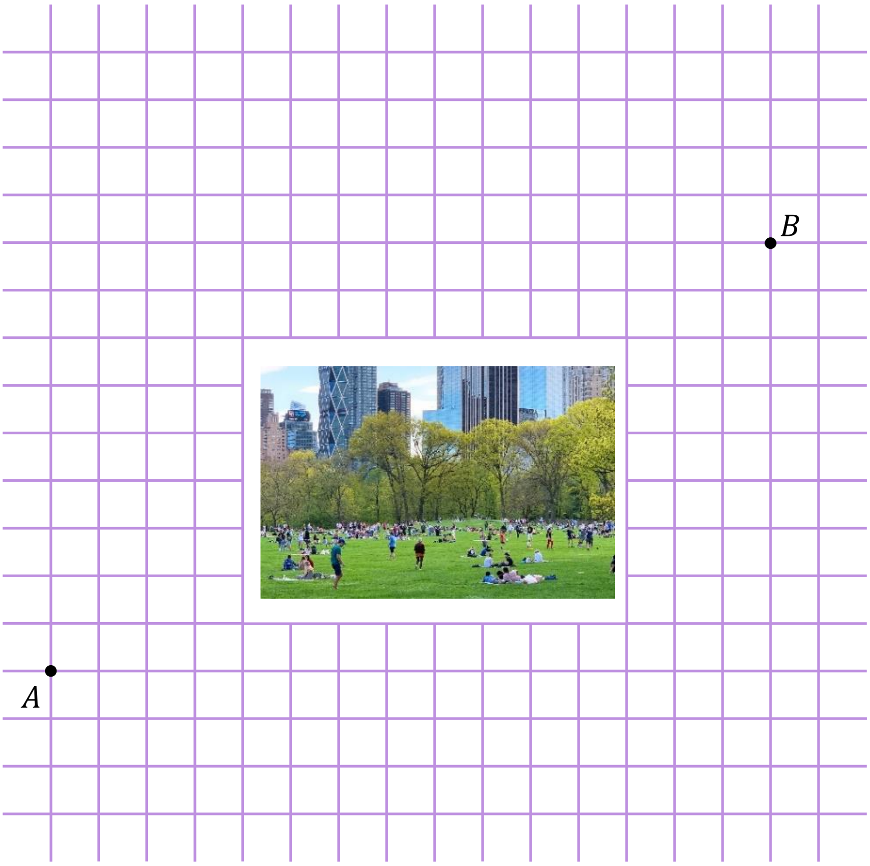
$$P(C|+) = 0{,}99 \cdot \frac{0{,}002}{0{,}02 \cdot 0{,}998 + 0{,}99 \cdot 0{,}002} \approx 0{,}09$$

Zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi ok. $0{,}09$.

Zadanie 31. (0–4)

W pewnym mieście jest prostopadły układ ulic, a ruch na każdej z nich jest dwukierunkowy. W centrum miasta znajduje się park, gdzie obowiązuje całkowity zakaz ruchu pojazdów. Schemat ulic w tym mieście wraz z położeniem parku przedstawiono poniżej na rysunku. Tomek znajduje się w punkcie A miasta i chce dojechać najkrótszą drogą do punktu B.

Oblicz, ile jest najkrótszych dróg z A do B.



Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
  2. […] operowanie informacjami przedstawionymi w tekście […] w formie wykresów, diagramów […].

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
  2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

IV. Rozumowanie i argumentacja.
  4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiazywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.

Wymagania szczegółowe

XI. Kombinatoryka. Zdający:
  1R) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę […] kombinacji […];
  2R) stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) i jego własności przy rozwiązywaniu problemów kombinatorycznych.

Zasady oceniania

4 pkt – prawidłowa metoda wyznaczenia wszystkich najkrótszych dróg z A do B i prawidłowy wynik.

3 pkt – obliczenie liczby wszystkich najkrótszych dróg z A do K (gdzie $K \in \{C, D, E, F, G\}$).

2 pkt – zapisanie, że liczba wszystkich najkrótszych dróg z A do B przechodzących przez punkt K (gdzie $K \in \{C, D, E, F, G\}$) jest iloczynem liczby wszystkich najkrótszych dróg z A do K i liczby wszystkich najkrótszych dróg z K do B.

1 pkt – zapisanie, że każda najkrótsza droga z A do B musi przechodzić przez jeden z punktów $C – G$.

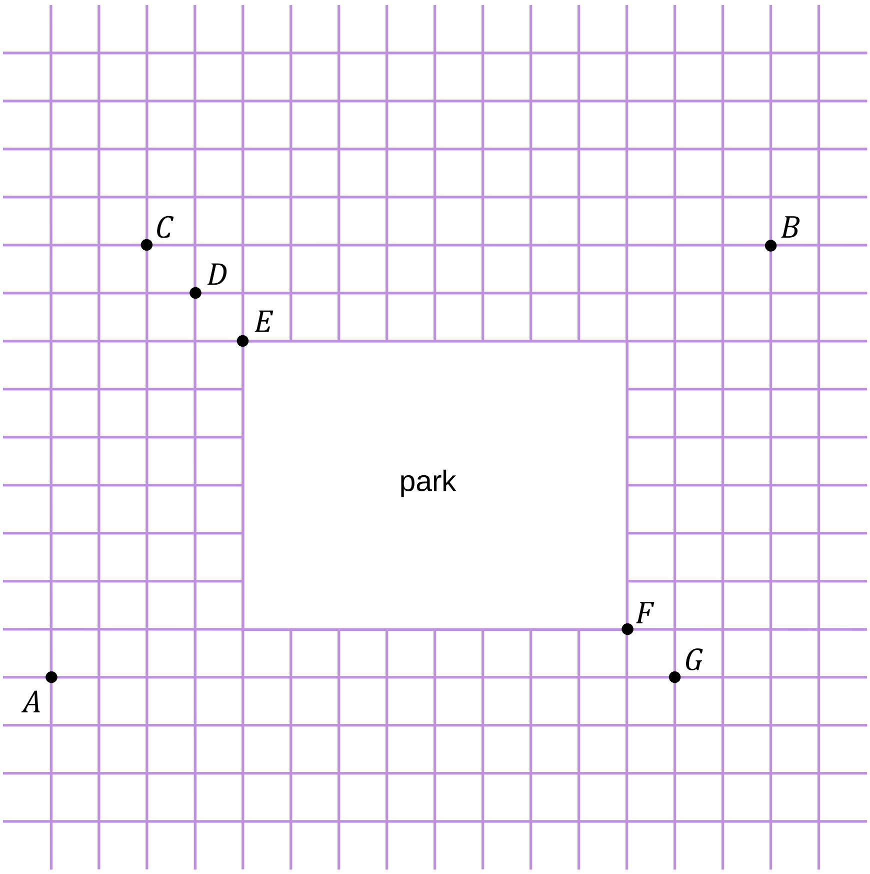
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

W poniższym rozwiązaniu przez $n(K, L)$ rozumieć będziemy liczbę wszystkich najkrótszych dróg z punktu K do punktu L.

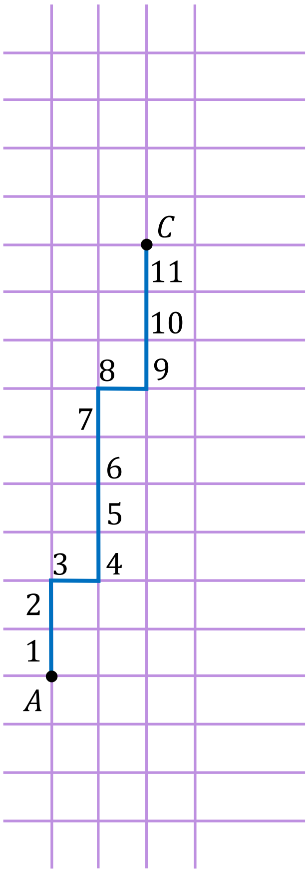
Zaznaczmy na schemacie ulic punkty C, D, E, F, G (patrz rysunek 1.).

Rysunek 1.

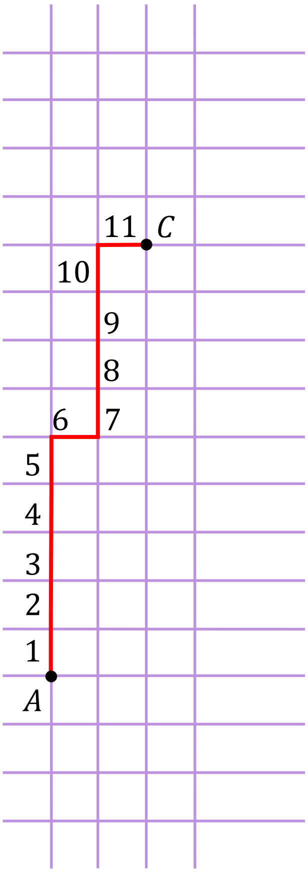


Zauważmy, że każda najkrótsza droga z A do B musi przechodzić przez któryś z punktów C, D, E, F lub G. Ponadto, liczba wszystkich najkrótszych dróg z A do B przechodzących przez C jest równa $n(A, C) \cdot n(C, B)$. Analogicznie, liczba wszystkich najkrótszych dróg z A do B przechodzących przez D jest równa $n(A, D) \cdot n(D, B)$ itd.
Obliczymy $n(A, C)$, czyli liczbę wszystkich najkrótszych dróg z A do C. Kierunek wyznaczony na rysunku 1. przez prostą AG nazwiemy *poziomym*, a kierunek prostopadły do *poziomego* – *pionowym*. Każda najkrótsza droga z A do C składa się z dokładnie 11 odcinków: 2 *poziomych* i 9 *pionowych*. Wskazanie 2 odcinków (spośród 11), które mają być *poziome*, określa nam jednoznacznie najkrótszą drogę z A do C. Stąd najkrótszych dróg z A do C jest $\binom{11}{2}$.
Na rysunku 2. przedstawiono najkrótszą drogę z A do C, gdzie odcinki trzeci i ósmy są *poziome*, a pozostałe – *pionowe*.
Na rysunku 3. przedstawiono najkrótszą drogę z A do C, która odpowiada wyborowi odcinków szóstego i jedenastego jako odcinków *poziomych*.

Rysunek 2.



Rysunek 3.



Podobnie rozumując, otrzymujemy

$$n(A,C)\cdot n(C,B)=\binom{11}{2}\cdot\binom{13}{0}=55\cdot 1=55$$

$$n(A,D)\cdot n(D,B)=\binom{11}{3}\cdot\binom{13}{1}=165\cdot 13=2145$$

$$n(A,E)\cdot n(E,B)=\binom{11}{4}\cdot\binom{13}{2}=330\cdot 78=25740$$

$$n(A,F)\cdot n(F,B)=\binom{13}{1}\cdot\binom{11}{3}=13\cdot 165=2145$$

$$n(A,G)\cdot n(G,B)=\binom{13}{0}\cdot\binom{11}{2}=1\cdot 55=55$$

więc $n(A,B)=55+2145+25740+2145+55=30140.$

3. Informacja o egzaminie maturalnym z matematyki dla absolwentów niesłyszących

Informacje o egzaminie maturalnym z matematyki przedstawione w rozdziale 1. Opis egzaminu maturalnego z matematyki dotyczą również egzaminu dla absolwentów niesłyszących. Ponadto zdający niesłyszący przystępują do egzaminu maturalnego w warunkach i formie dostosowanych do potrzeb wynikających z ich niepełnosprawności.

Dostosowanie warunków przeprowadzenia egzaminu maturalnego dla absolwentów niesłyszących obejmuje m.in. czas trwania egzaminu. Dostosowanie formy egzaminu maturalnego z matematyki dla absolwentów niesłyszących polega na przygotowaniu odpowiednich arkuszy, w których uwzględnia się zmianę sposobu formułowania treści niektórych zadań i poleceń. Zmiany te dotyczą zamiany pojedynczych słów, zwrotów lub całych zdań – jeśli mogłyby one być niezrozumiałe lub błędnie zrozumiane przez osoby niesłyszące. Zadania mogą być dodatkowo uzupełnione szkicem, tabelą lub inną formą graficzną ilustrującą ich treść. Jednak takie zmiany nie mogą wpływać na merytoryczną treść zadania oraz nie mogą dotyczyć terminów typowych dla danej dziedziny wiedzy.

Szczegółowe informacje z tym związane określone są w *Komunikacie dyrektora Centralnej Komisji Egzaminacyjnej w sprawie szczegółowych sposobów dostosowania warunków i form przeprowadzania egzaminu maturalnego* w danym roku szkolnym.

W dalszej części tego rozdziału zostały przedstawione przykładowe zadania, które ilustrują sposób dostosowania niektórych zadań wybranych z rozdziału 2. Przykładowe zadania z rozwiązaniami. Zachowano tę samą numerację zadań.

Zadanie 6. (0–4)

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = px^2 + (p-1)x + 1 - 2p$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe x_1 i x_2, których różnica równa się 1.

Zasady oceniania

4 pkt – zapisanie zbioru tych wszystkich wartości parametru p, dla których funkcja ma dwa dokładnie dwa miejsca zerowe różniące się o 1 .

3 pkt – zapisanie nierówności $\Delta > 0$ w zależności od parametru p i jej rozwiązanie oraz zapisanie warunku $|x_1 - x_2| = 1$ w zależności od parametru p i jego rozwiązanie.

2 pkt – zapisanie nierówności $\Delta > 0$ w zależności od parametru p i jej rozwiązanie
LUB
zapisanie warunku $|x_1 - x_2| = 1$ w zależności od parametru p i jego rozwiązanie.

1 pkt – wyznaczenie warunków koniecznych i dostatecznych na to, aby funkcja f miała dokładnie dwa miejsca zerowe różniące się o 1.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy warunki konieczne i dostateczne na to, aby funkcja f miała dokładnie dwa miejsca zerowe, których różnica wynosi jeden:

W1. $p \neq 0$ (z treści zadania f jest funkcją kwadratową)
W2. $\Delta > 0$ (aby funkcja f miała dokładnie dwa miejsca zerowe)
W3. $|x_1 - x_2| = 1$ (aby miejsca zerowe funkcji f różniły się o 1).

Rozwiązujemy warunek W2:

$$\Delta > 0$$

$$(p-1)^2 - 4p(1-2p) > 0$$

$$9p^2 - 6p + 1 > 0$$

$$(3p-1)^2 > 0$$

$$p \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

Rozwiązujemy warunek W3. Skorzystamy tutaj ze wzorów Viète'a.

$$|x_1 - x_2| = 1$$

$$(x_1 - x_2)^2 = 1$$

$${x_1}^2 - 2x_1 \cdot x_2 + {x_2}^2 = 1$$

$${x_1}^2 - 2x_1 \cdot x_2 + {x_2}^2 + 2x_1 \cdot x_2 - 2x_1 \cdot x_2 = 1$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = 1$$

Gdy $p \neq 0$ mamy

$$\left(-\frac{p-1}{p}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1-2p}{p} = 1$$

$$(p-1)^2 - 4p(1-2p) = p^2$$

$$8p^2 - 6p + 1 = 0$$

$$p = \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad p = \frac{1}{4}$$

Po uwzględnieniu wszystkich warunków otrzymujemy: $p = \frac{1}{2}$ lub $p = \frac{1}{4}$.

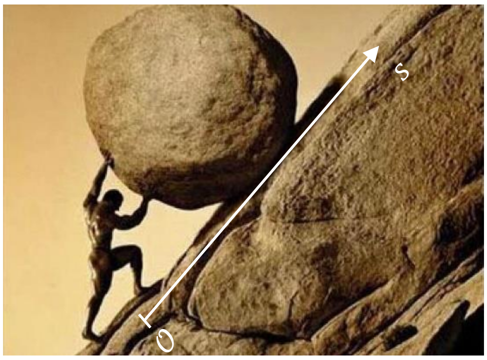
Zadanie 9. (0–4)

Syzyf codziennie próbuje wtoczyć ciężką kamienną kulę na szczyt pewnej góry. Niestety, nie udaje mu się osiągnąć celu.

Pracę zaczyna w chwili $t = 0$ od punktu $\mathcal{O}$ oddalonego od szczytu o 4 km. Położenie s Syzyfa wtaczającego kulę jest opisane równaniem

$$s(t) = -t^3 + 16{,}5t^2 + 180t \text{ dla } t \in [0, 24]$$

gdzie s jest wyrażone w metrach, a czas t – w godzinach.



Oś $\mathcal{O}s$ jest skierowana do wierzchołka góry i jest styczna w każdym punkcie do zbocza góry.

Oblicz najmniejszą odległość, na jaką Syzyf zbliży się do wierzchołka góry, oraz maksymalną prędkość, z jaką wtacza kamień pod górę.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda wyznaczenia najmniejszej odległości, na jaką Syzyf zbliży się do wierzchołka góry, i poprawna metoda wyznaczenia największej wartości prędkości, z jaką wtaczany jest kamień, wraz z prawidłowymi wynikami liczbowymi.

3 pkt – zapisanie, że prędkość jest pochodną funkcji położenia i znalezienie ekstremów funkcji s'.

2 pkt – zbadanie monotoniczności funkcji s i znalezienie ekstremów funkcji s.

1 pkt – obliczenie pochodnej funkcji s.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Najpierw wyznaczymy najmniejszą odległość, na jaką Syzyf zbliży się do wierzchołka góry.

Obliczamy pochodną funkcji s:

$$s'(t) = -3t^2 + 33t + 180 \quad \text{dla} \quad t \in [0, 24]$$

i obliczamy jej miejsca zerowe:

$$s'(t) = 0$$

$$-3t^2 + 33t + 180 = 0$$

$$t^2 - 11t - 60 = 0$$

$$\Delta = 361$$

$$t_1 = 15 \qquad t_2 < 0$$

Ponieważ:

$s'(t) > 0$ dla $t \in [0,15)$

$s'(t) < 0$ dla $t \in (15, 24]$
więc

funkcja s jest rosnąca w przedziale $[0, 15]$
funkcja s jest malejąca w przedziale $[15, 24]$

Zatem dla $t = 15$ funkcja s osiąga maksimum, $s_{max} = s(15) = 3037{,}5$. Syzyf po 15 godzinach pokonał $3037{,}5$ m, a więc zbliżył się do wierzchołka góry na odległość $4000 - 3037{,}5 = 962{,}5$ m.

Obliczamy maksymalną wartość prędkości, z jaką Syzyf wtacza kulę.

Niech v oznacza prędkość Syzyfa wtaczającego kulę.
Ponieważ $v = s'$, więc

$v(t) = s'(t) = -3t^2 + 33t + 180$ dla $t \in [0, 24]$

Korzystamy z własności funkcji kwadratowej i obliczamy największą wartość prędkości, z jaką Syzyf wtacza kulę:

Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli $y = -3t^2 + 33t + 180$ ma wartość:

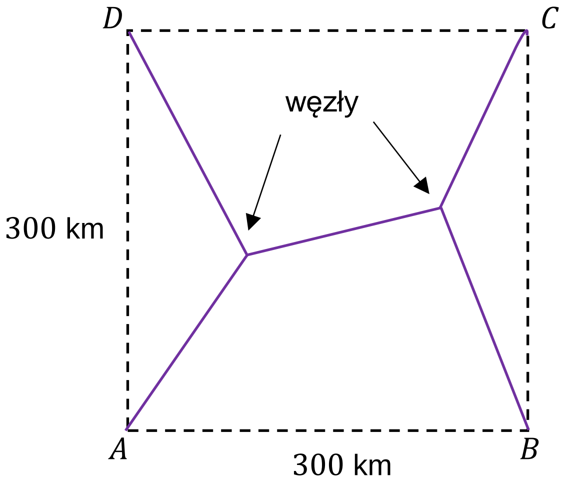
$$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{33}{2 \cdot (-3)} = \frac{11}{2} \in [0, 24]$$

Więc, $v\left(\frac{11}{2}\right) = -3\left(\frac{11}{2}\right)^2 + 33\left(\frac{11}{2}\right) + 180 = 270{,}75 > 0$

Zatem największa wartość prędkości, z jaką Syzyf wtacza kulę pod górę jest równa $270{,}75$ m/h.

Zadanie 10. (0–6)

Na rysunku poniżej przedstawiono położenie czterech miast A, B, C i D oraz przykładową sieć dróg między nimi. Sieć trzeba tak zaprojektować, aby łączyła każde dwa z tych miast, miała dwa węzły, a łączna długość jej dróg była możliwie najmniejsza. Punkty A, B, C i D to wierzchołki kwadratu o boku 300 km.



Oblicz, jaka musi być długość najkrótszej takiej sieci dróg i gdzie muszą być zlokalizowane węzły tej sieci.

Zasady oceniania

6 pkt – obliczenie długości najkrótszej sieci z dwoma węzłami i podanie lokalizacji węzłów względem miast.

5 pkt – obliczenie długości najkrótszej sieci z dwoma węzłami.

4 pkt – obliczenie wartości najmniejszej funkcji f.

3 pkt – obliczenie pochodnej funkcji f.

2 pkt – wyrażenie długości sieci za pomocą odległości węzłów od prostych odpowiednio AD i BC.

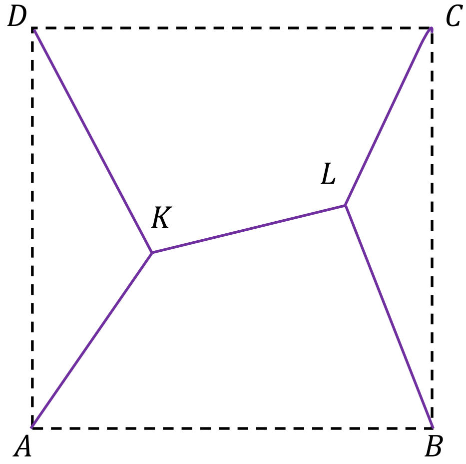
1 pkt – uzasadnienie, że węzły muszą się znajdować na symetralnej odcinka AD.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

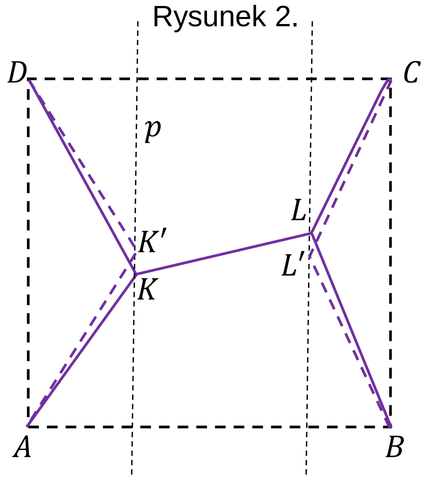
Rozpatrzmy sieć dróg złożoną z odcinków AK, KL, LC, BL i DK (zobacz rysunek 1.)

Rysunek 1.



Prowadzimy prostą p równoległą do AD i przechodzącą przez K i zaznaczamy na niej punkt K' taki, że $|AK'| = |DK'|$.
Prowadzimy prostą równoległą do BC i przechodzącą przez L i zaznaczamy na niej punkt L' taki, że $|BL'| = |CL'|$ (patrz rysunek 2.).

Rysunek 2.

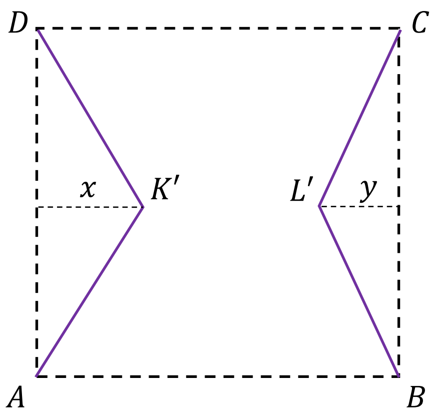


Pokażemy, że sieć dróg z węzłami K i L można zastąpić siecią krótszą – z węzłami K' i L'. Niech D' będzie punktem symetrycznym do punktu D względem prostej p. Wówczas punkty D', K' oraz A są współliniowe, więc

$$|DK| + |KA| = |D'K| + |KA| \geq |D'A| = |DK'| + |K'A|.$$

Podobnie pokazujemy, że $|BL| + |LC| \geq |BL'| + |L'C|$. Ponadto odcinek $K'L'$ jest równoległy do prostej AB, więc $|K'L'| \leq |KL|$. Zatem sieć dróg z węzłami K' i L' jest krótsza niż z węzłami K i L.
Oznaczmy odległość punktu K' od prostej AD przez x, natomiast punktu L' od prostej BC przez y (zobacz rysunek 3).

Rysunek 3.



Długość d sieci z węzłami K' i L' jest równa

$$d = 2\sqrt{150^2 + x^2} + 2\sqrt{150^2 + y^2} + 300 - x - y$$

gdzie $x \in [0,300]$ i $0 \leq x + y < 300$.

Zauważmy, że funkcje $f(x)=2\sqrt{150^2+x^2}-x$ i $g(y)=2\sqrt{150^2+y^2}-y$ mają taką samą postać, w związku z tym zbadamy tylko funkcję $f(x)=2\sqrt{150^2+x^2}-x$ określoną dla $x\in[0,300]$.

$$f'(x)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{150^2+x^2}}\cdot 2x-1=\frac{2x}{\sqrt{150^2+x^2}}-1$$

$$f'(x)=0$$

$$\frac{2x}{\sqrt{(150^2+x^2)}}=1$$

$$4x^2=x^2+150^2$$
$$x=50\sqrt{3}$$

$$f'(x)>0 \iff x\in(50\sqrt{3},300]$$

$$f'(x)<0 \iff x\in\left[0,50\sqrt{3}\right)$$

Funkcja f jest malejąca w przedziale $\left[0,50\sqrt{3}\right]$ i rosnąca w przedziale $[50\sqrt{3},300]$. Najmniejszą wartość funkcja przyjmuje w punkcie $x=50\sqrt{3}$ i wartość ta jest równa $f\left(50\sqrt{3}\right)=150\sqrt{3}$.
Zatem

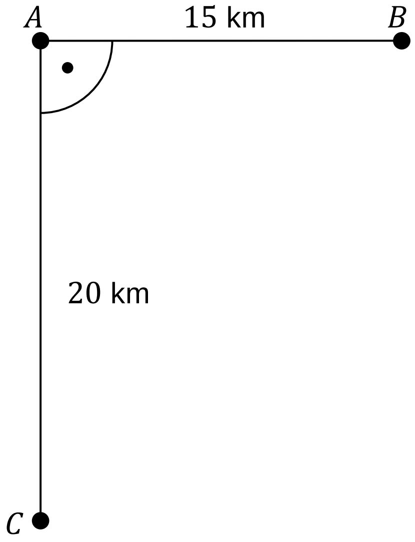
$$d=f(x)+f(y)+300\geq 300\left(1+\sqrt{3}\right)$$

przy czym równość zachodzi tylko wtedy, gdy $x=y=50\sqrt{3}$. Najkrótsza sieć dróg ma zatem długość $300\left(1+\sqrt{3}\right)$ km i składa się z 5 odcinków: AK', $K'L'$, $L'C$, BL' i DK'.
Węzeł K' jest równo oddalony (w odległości $100\sqrt{3}$ km) od miast A i D, natomiast węzeł L' jest równo oddalony (w odległości $100\sqrt{3}$ km) od miast B i C (patrz rysunek 3.).

Zauważmy jeszcze, że w przypadku sieci dróg z jednym węzłem, najkrótsza taka sieć będzie miała długość równą $600\sqrt{2}$ km (i węzeł w środku kwadratu $ABCD$). Będzie więc dłuższa niż sieć z dwoma węzłami.

Zadanie 19. (0–4)

Na rysunku obok przedstawiono położenie miejscowości A, B i C oraz zaznaczono odległości między nimi.
O godzinie 9:00 z miejscowości A do C wyruszyli harcerze z zastępu „Tropiciele” i maszerowali z prędkością 4 km/h. O tej samej godzinie z miejscowości B do A wyruszyli harcerze z zastępu „Korsarze” i maszerowali z prędkością 2 km/h.



Wyznacz godzinę, o której odległość między tymi zastępami harcerzy będzie najmniejsza.

Zasady oceniania

dla rozwiązania sposobem 1.

4 pkt – prawidłowa metoda wyznaczenia chwili, w której odległość między zastępami będzie najmniejsza i prawidłowa odpowiedź.

3 pkt – uzasadnienie, że odległość d jest najmniejsza wtedy, gdy wyrażenie podpierwiastkowe $20t^2 - 60t + 225$ jest możliwie najmniejsze oraz podanie zakresu zmienności t.

2 pkt – wyrażenie odległości d między zastępami za pomocą czasu t, jaki upłynął od momentu wyruszenia zastępów.

1 pkt – wyrażenie odległości poszczególnych zastępów od miejscowości A za pomocą czasu, jaki upłynął od momentu wyruszenia zastępów.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

dla rozwiązania sposobem 2.

4 pkt – uzasadnienie (np. poprzez zbadanie monotoniczności), że dla $t = 1{,}5$ funkcja $d(t)$ osiąga minimum globalne i podanie prawidłowej odpowiedzi.

3 pkt – podanie dziedziny funkcji $d(t)$, obliczenie pochodnej funkcji $d(t)$ i znalezienie punktów krytycznych.

2 pkt – wyrażenie odległości d między zastępami za pomocą czasu t, jaki upłynął od momentu wyruszenia zastępów.

1 pkt – wyrażenie odległości poszczególnych zastępów od miejscowości A za pomocą czasu, jaki upłynął od momentu wyruszenia zastępów.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Niech d_1 będzie odległością (w km) zastępu „Tropiciele” od miejscowości A.

Wyznaczamy zależność d_1 od czasu t (w godzinach), jaki upłynął od chwili wyruszenia zastępu z miejscowości A:

$$d_1(t) = 4t \quad \text{dla } t \in [0, 5],$$

gdzie 4 to prędkość (w km/h) marszu „Tropicieli”.

Niech d_2 będzie odległością (w km) zastępu „Korsarze” od miejscowości A.

Wyznaczamy zależność d_2 od czasu t (w godzinach), jaki upłynął od chwili wyruszenia zastępu z miejscowości B:

$$d_2(t) = 15 - 2t \text{ dla } t \in \left[0, \frac{15}{2}\right],$$

gdzie 2 to prędkość (w km/h) marszu „Korsarzy”.

Odległość d między zastępami w chwili t jest równa

$$d(t) = \sqrt{d_1^2(t) + d_2^2(t)} = \sqrt{16t^2 + (15 - 2t)^2} \text{ dla } t \in \left[0, \frac{15}{2}\right].$$

Badamy, dla jakiego argumentu $t \in \left[0, \frac{15}{2}\right]$ funkcja d osiąga wartość najmniejszą.

Ponieważ funkcja $g(x) = \sqrt{x}$ jest funkcją rosnącą w przedziale $[0, +\infty)$, więc funkcja d osiąga wartość najmniejszą wtedy, gdy funkcja

$f(t) = 16t^2 + (15 - 2t)^2 = 20t^2 - 60t + 225$ określona dla $t \in \left[0, \frac{15}{2}\right]$

osiąga wartość najmniejszą.

Funkcja $f(t) = 20t^2 - 60t + 225$ jest funkcją kwadratową, osiąga więc wartość najmniejszą dla argumentu t równego

$t = -\frac{-60}{2 \cdot 20} = 1{,}5 \in \left[0, \frac{15}{2}\right]$.

Zatem funkcja d osiąga wartość najmniejszą dla argumentu $t = 1{,}5$.

Odległość między zastępami harcerzy będzie najmniejsza po upływie półtorej godziny, czyli o godzinie 10:30.

Sposób 2.

Niech d_1 będzie odległością (w km) zastępu „Tropiciele” od miejscowości A.

Wyznaczamy zależność d_1 od czasu t (w godzinach), jaki upłynął od chwili wyruszenia zastępu z miejscowości A:

$d_1(t) = 4t$ dla $t \in [0, 5]$, gdzie 4 to prędkość (w km/h) marszu „Tropicieli”.
Niech d_2 będzie odległością (w km) zastępu „Korsarze” od miejscowości A.

Wyznaczamy zależność d_2 od czasu t (w godzinach), jaki upłynął od chwili wyruszenia zastępu z miejscowości B:

$d_2(t) = 15 - 2t$ dla $t \in \left[0, \frac{15}{2}\right]$, gdzie 2 to prędkość (w km/h) marszu „Korsarzy”.

Odległość d między zastępami w chwili t wynosi

$d(t) = \sqrt{d_1^2(t) + d_2^2(t)} = \sqrt{16t^2 + (15 - 2t)^2}$ dla $t \in \left[0, \frac{15}{2}\right]$.

Badamy, dla jakiego argumentu $t \in \left[0, \frac{15}{2}\right]$ funkcja d osiąga wartość najmniejszą.

Obliczamy pochodną funkcji d:

$$d'(t) = \left(\sqrt{16t^2 + (15 - 2t)^2}\right)' \cdot [16t^2 + (15 - 2t)^2]' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{16t^2 + (15 - 2t)^2}} \cdot [32t + 2 \cdot (15 - 2t) \cdot (-2)] = \frac{20t - 30}{\sqrt{16t^2 + (15 - 2t)^2}}$$

dla $t \in \left[0, \frac{15}{2}\right]$.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji d:

$$\frac{20t-30}{\sqrt{16t^2+(15-2t)^2}}=0$$

$$20t-30=0$$

$$t=\frac{3}{2} \in \left[0, \frac{15}{2}\right]$$

Sprawdzamy, czy w punkcie $t=\frac{3}{2}$ funkcja d osiąga ekstremum.

Badamy monotoniczność funkcji d. Ponieważ

$d'(t) > 0$ dla $t \in \left(\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right]$

$d'(t) < 0$ dla $t \in \left[0, \frac{3}{2}\right)$

więc

funkcja d jest rosnąca w przedziale $\left[\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right]$

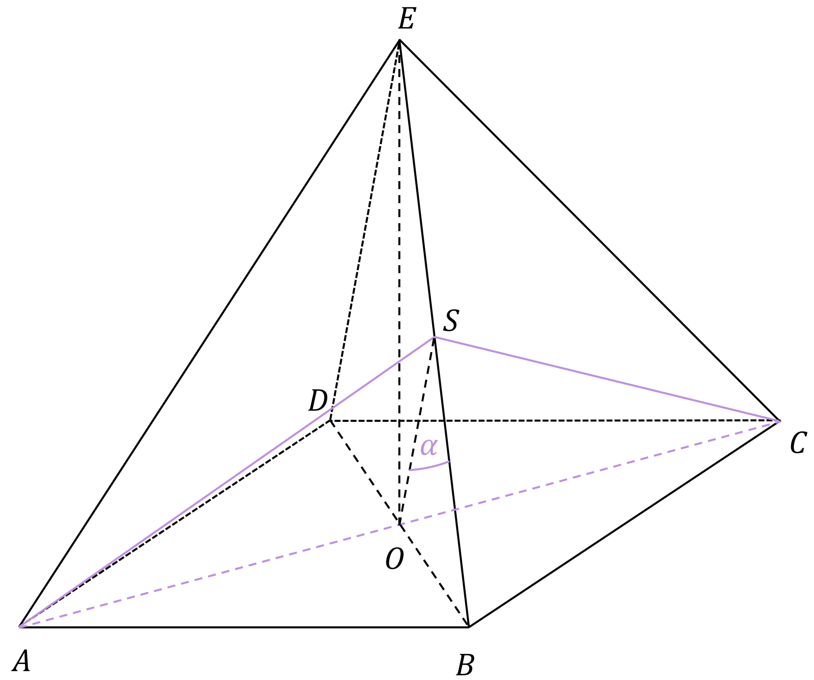
funkcja d jest malejąca w przedziale $\left[0, \frac{3}{2}\right]$,

co oznacza, że w punkcie $t=1{,}5$ funkcja d osiąga wartość najmniejszą.

Odległość między zastępami harcerzy będzie najmniejsza po upływie półtorej godziny, czyli o godzinie 10:30.

Zadanie 21. (0–5)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDE$ punkt O jest środkiem symetrii podstawy ostrosłupa. Stosunek obwodu podstawy $ABCD$ do sumy długości wszystkich krawędzi ostrosłupa jest równy $1:5$. Przez przekątną AC podstawy i środek S krawędzi bocznej BE poprowadzono płaszczyznę (patrz rysunek).



Oblicz stosunek pola otrzymanego przekroju do pola podstawy ostrosłupa oraz miarę kąta BSO (w zaokrągleniu do $1°$).

Zasady oceniania

dla rozwiązań sposobami 1. oraz 2.

5 pkt – wyznaczenie miary kąta BSO oraz obliczenie stosunku pola przekroju do pola podstawy ostrosłupa.

4 pkt – obliczenie wartości cosinusa kąta BSO oraz stosunku pola przekroju do pola podstawy ostrosłupa

LUB

wyznaczenie miary kąta BSO.

3 pkt – obliczenie stosunku pola przekroju do pola podstawy ostrosłupa

LUB

obliczenie wartości cosinusa kąta BSO.

2 pkt – wyznaczenie długości odcinka OS w zależności od długości krawędzi podstawy.

1 pkt – wyznaczenie długości krawędzi bocznej w zależności od długości krawędzi podstawy.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

dla rozwiązania sposobem 3.

5 pkt – wyznaczenie miary kąta BSO oraz obliczenie stosunku pola przekroju do pola podstawy ostrosłupa.

4 pkt – obliczenie cosinusa kąta OEB lub FBS.

3 pkt – obliczenie stosunku pola przekroju do pola podstawy ostrosłupa.
2 pkt – wyznaczenie długości odcinków SF i OF.
1 pkt – wyznaczenie długości krawędzi bocznej w zależności od długości krawędzi podstawy.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

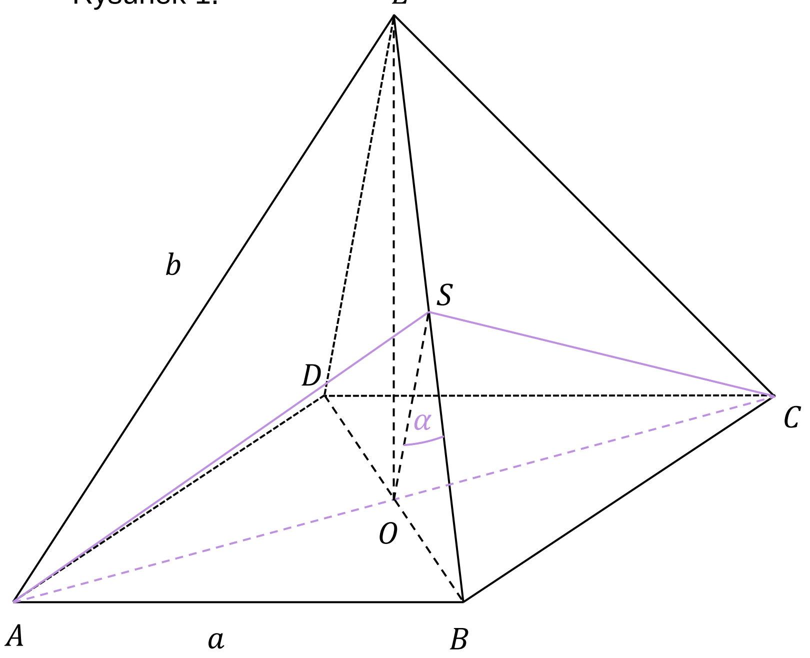
Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 1.

Wyznaczamy zależność b od a.

Rysunek 1.



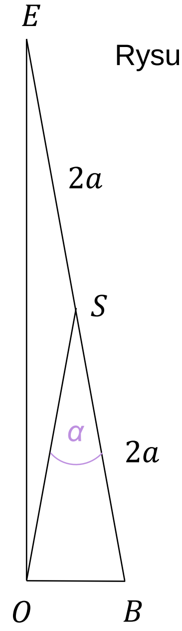
Z treści zadania wiemy, że stosunek obwodu podstawy do sumy długości wszystkich krawędzi ostrosłupa jest równy $1:5$, więc

$\frac{4a}{4a+4b} = \frac{1}{5}$, co daje $b = 4a$.

Wyznaczamy zależność $|OS|$ od a.

Trójkąt OBE jest prostokątny, punkt S jest środkiem przeciwprostokątnej, więc S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie OBE (patrz rysunek 2.).
Zatem $|OS| = 2a$.

Rysunek 2.



Obliczamy stosunek pola przekroju ACS do pola podstawy ostrosłupa:

$$\frac{P_{ACS}}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot |OS|}{a^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot 2a}{a^2} = \sqrt{2}$$

Do trójkąta BSO zastosujemy twierdzenie cosinusów w celu obliczenia cosinusa kąta BSO:

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (2a)^2 + (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 2a \cdot \cos\alpha$$

Z ostatniego równania otrzymujemy $\cos\alpha = \frac{15}{16}$, więc $\alpha \approx 20°$.

Sposób 2.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 1.

Wyznaczamy zależność b od a.

Z treści zadania wiemy, że stosunek obwodu podstawy do sumy długości wszystkich krawędzi ostrosłupa jest równy $1:5$, więc
$\frac{4a}{4a+4b} = \frac{1}{5}$, co daje $b = 4a$.

Dla trójkąta BEC zastosujemy twierdzenie cosinusów w celu obliczenia cosinusa kąta BEC:

$$a^2 = b^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot b \cdot \cos|\sphericalangle BEC|$$

$$a^2 = 16a^2 + 16a^2 - 2 \cdot 4a \cdot 4a \cdot \cos|\sphericalangle BEC|$$

$$\cos|\sphericalangle BEC| = \frac{31}{32}$$

Korzystamy z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta CSE i wyznaczamy długość odcinka SC:

$$|SC|^2 = b^2 + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}b \cdot b \cdot \cos|\sphericalangle BEC|$$

$$|SC|^2 = 16a^2 + 4a^2 - 16a^2 \cdot \frac{31}{32}$$

$$|SC|^2 = \frac{9}{2}a^2$$

$$|SC| = \frac{3a}{\sqrt{2}}$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta OCS w celu wyznaczenia długości odcinka OS:

$$|OS|^2 = |SC|^2 - \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2$$

$$|OS|^2 = \frac{9}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2$$

$$|OS| = 2a$$

Obliczamy stosunek pola przekroju ACS do pola podstawy ostrosłupa:

$$\frac{P_{ACS}}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot |OS|}{a^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot 2a}{a^2} = \sqrt{2}$$

W celu obliczenia cosinusa kąta BSO zastosujemy do trójkąta BSO (patrz rysunek 2.) twierdzenie cosinusów:

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (2a)^2 + (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 2a \cdot \cos\alpha$$

Z ostatniego równania otrzymujemy $\cos\alpha = \frac{15}{16}$, więc $\alpha \approx 20°$.

Sposób 3.

Wyznaczamy zależność b od a.

Z treści zadania wiemy, że stosunek obwodu podstawy do sumy długości wszystkich krawędzi ostrosłupa jest równy $1:5$, więc
$\frac{4a}{4a+4b} = \frac{1}{5}$, co daje $b = 4a$.

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego BOE i obliczamy długość odcinka OE:

$$|OE|^2 = |BE|^2 - |OB|^2$$

$$|OE|^2 = (4a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$|OE|^2 = \frac{62}{4}a^2$$

$$|OE| = \frac{\sqrt{62}}{2}a$$

Oznaczmy przez F rzut prostokątny punktu S na odcinek OB.
Ponieważ $|\measuredangle OEB| = |\measuredangle FSB|$, $|\measuredangle OBE| = |\measuredangle FBS|$ i trójkąty BOE oraz BFS są prostokątne, więc są podobne (na mocy cechy kkk podobieństwa trójkątów). Trójkąty BOE i BFS są podobne w skali $k = \frac{|BE|}{|BS|} = \frac{4a}{2a} = 2$. Zatem F jest środkiem odcinka OB, więc

$$|OF| = \frac{1}{2}|OB| = \frac{a\sqrt{2}}{4} \quad \text{oraz} \quad |SF| = \frac{1}{2}|OE| = \frac{\sqrt{62}}{4}a$$

Obliczamy długość odcinka OS:

$$|OS|^2 = |OF|^2 + |SF|^2$$

$$|OS|^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{62}}{4}a\right)^2$$

$$|OS| = 2a$$

Obliczamy stosunek pola przekroju ACS do pola podstawy ostrosłupa:

$$\frac{P_{ACS}}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot |OS|}{a^2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot 2a}{a^2} = \sqrt{2}$$

Ponieważ

$$\cos|\measuredangle FSB| = \frac{|FS|}{|BS|} = \frac{\frac{\sqrt{62}}{4}a}{2a} = \frac{\sqrt{62}}{8}$$

i trójkąt OSB jest równoramienny, więc $\alpha = 2\cdot|\measuredangle FSB|$. Zatem

$$\cos\alpha = \cos(2\cdot|\measuredangle FSB|) = 2\cos^2|\measuredangle FSB| - 1 = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{62}}{8}\right)^2 - 1 = \frac{15}{16}$$

skąd $\alpha \approx 20°$.

Zadanie 23. (0–4)

Trapez $ABCD$ jest wpisany w okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 38x + 22y - 96 = 0$. Odcinek AB jest dłuższą podstawą tego trapezu. Jego przekątna AC jest zawarta w prostej o równaniu $y = x$. Wierzchołek A trapezu ma obie współrzędne ujemne.

Oblicz sinus kąta ABC.

Zasady oceniania

dla rozwiązania sposobem 1.

4 pkt – zastosowanie twierdzenia sinusów do trójkąta ABC i obliczenie sinusa kąta ABC.

3 pkt – obliczenie długości promienia okręgu oraz długości odcinka $|AC|$.

2 pkt – obliczenie długości promienia oraz współrzędnych wierzchołków A i C trapezu
LUB
obliczenie współrzędnych wierzchołków A i C trapezu oraz obliczenie długości odcinka AC.

1 pkt – obliczenie długości promienia okręgu
LUB
obliczenie współrzędnych wierzchołków A i C trapezu.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

dla rozwiązania sposobem 2.

4 pkt – zastosowanie twierdzenia sinusów do trójkąta ABC i obliczenie sinusa kąta ABC.

3 pkt – obliczenie długości odcinka AC.

2 pkt – obliczenie odległości środka okręgu od prostej zawierającej przekątną AC trapezu.

1 pkt – obliczenie długości promienia okręgu.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Obliczamy długość promienia R okręgu z równania ogólnego okręgu.

Gdy $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, to $R^2=a^2+b^2-c$.

$$R^2=\left(\frac{38}{2}\right)^2+\left(-\frac{22}{2}\right)^2-(-96)=578$$

$$R=17\sqrt{2}$$

Obliczamy współrzędne wierzchołków A i C trapezu, czyli punkty przecięcia okręgu i prostej:

$$\begin{cases} x^2+y^2-38x+22y-96=0 \\ y=x \end{cases}$$

$$x^2+x^2-38x+22x-96=0$$

$$2x^2-16x-96=0$$

Po rozwiązaniu równania otrzymujemy: $x=-4$ lub $x=12$.
Gdy $x=-4$, to $y=-4$. Gdy $x=12$, to $y=12$.

Ponieważ wierzchołek A trapezu ma obie współrzędne ujemne, więc otrzymujemy $A=(-4,-4)$ oraz $C=(12,12)$.

Obliczamy długość odcinka AC:

$$|AC|=\sqrt{(12+4)^2+(12+4)^2}=16\sqrt{2}$$

Po zastosowaniu twierdzenia sinusów do trójkąta ABC otrzymujemy

$$\frac{|AC|}{\sin|\sphericalangle ABC|}=2R$$

$$\sin|\sphericalangle ABC|=\frac{|AC|}{2R}=\frac{16\sqrt{2}}{34\sqrt{2}}=\frac{8}{17}$$

Sposób 2.

Obliczamy współrzędne środka S okręgu i długość R promienia okręgu:

$$x^2+y^2-38x+22y-96=0$$

$$(x-19)^2-361+(y+11)^2-121-96=0$$

$$(x-19)^2+(y+11)^2=\left(17\sqrt{2}\right)^2$$

Zatem środek S okręgu ma współrzędne $S=(19,-11)$, a promień okręgu ma długość $R=17\sqrt{2}$.

Niech E będzie środkiem odcinka AC. Obliczamy $|SE|$ jako odległość punktu S od prostej AC o równaniu $x - y = 0$:

$$d(S, AC) = |SE| = \frac{|19 + 11|}{\sqrt{2}} = 15\sqrt{2}$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta CES w celu obliczenia długości odcinka EC (połowa długości przekątnej AC trapezu $ABCD$):

$$|EC|^2 = R^2 - |SE|^2$$

$$|EC|^2 = \left(17\sqrt{2}\right)^2 - \left(15\sqrt{2}\right)^2 = 128$$

Zatem $|AC| = 2 \cdot |EC| = 16\sqrt{2}$.

Po zastosowaniu twierdzenia sinusów do trójkąta ABC otrzymujemy

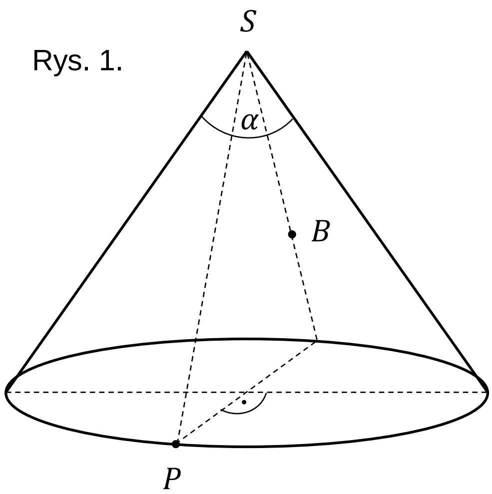
$$\frac{|AC|}{\sin|\sphericalangle ABC|} = 2R$$

$$\sin|\sphericalangle ABC| = \frac{|AC|}{2R} = \frac{16\sqrt{2}}{34\sqrt{2}} = \frac{8}{17}$$

Zadanie 27. (0–4)

Celem wyprawy Tomka i Marka jest zdobycie szczytu S pewnej góry. Wyprawę panowie rozpoczynają w punkcie P położonym na północnym stoku góry, dokładnie na północ od szczytu, na wysokości H_0 metrów n.p.m. Tomek i Marek chcą najpierw dojść do bazy B, znajdującej się dokładnie na południe od szczytu, na przeciwległym południowym stoku góry na wysokości H_1 metrów n.p.m. Następnie z bazy chcą wejść na szczyt leżący na wysokości H_2 metrów n.p.m. (patrz rysunek 1.).

Rys. 1.



Oblicz długość najkrótszej drogi, jaką muszą pokonać, aby dojść do bazy B.

Przyjmij, że góra jest stożkiem o kącie rozwarcia α.

Wskazówka: Powierzchnia boczna stożka po rozcięciu wzdłuż tworzącej i rozłożeniu jest wycinkiem koła. Najkrótsza droga do bazy jest równa najkrótszej drodze z punktu P do B na wycinku koła.

Zasady oceniania

4 pkt – prawidłowa metoda obliczenia długości odcinka PB na siatce stożka i prawidłowy wynik.

3 pkt – obliczenie miary łukowej kąta BSP na siatce stożka i obliczenie długości odcinków $|BS|$ oraz $|PS|$.

2 pkt – obliczenie miary łukowej kąta BSP na siatce stożka
LUB
obliczenie długości odcinków $|BS|$ oraz $|PS|$.

1 pkt – zapisanie, że najkrótsza droga jest równa długości odcinka PB na siatce stożka.

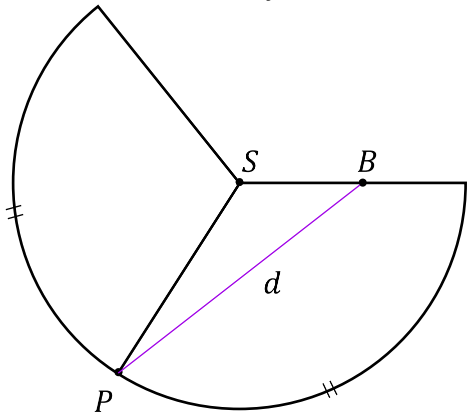
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech l będzie długością tworzącej stożka, a r – długością promienia podstawy.

Rozwiniemy powierzchnię boczną stożka, na której zaznaczymy punkty P, B i S, oznaczające: P– miejsce rozpoczęcia wyprawy, B–miejsce położenia bazy i S–szczyt góry. Długość odcinka PB oznaczymy jako d. Jest to długość najkrótszej drogi z punktu P do bazy (zobacz rys. 1.).

Rysunek 1.



Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest wycinkiem koła o promieniu długości l. Wyznaczymy miarę β kąta środkowego tego wycinka.

Ze wzorów na pole powierzchni bocznej stożka oraz pole wycinka koła otrzymujemy

$$\pi \cdot r \cdot l = \frac{\beta}{2\pi} \cdot \pi \cdot l^2$$

$$\beta = 2\pi \cdot \frac{r}{l}$$

Zatem

$$|\measuredangle BSP| = \frac{1}{2}\beta = \pi \cdot \frac{r}{l}$$

Kąt rozwarcia stożka jest równy α, więc $\frac{r}{l} = \sin\frac{\alpha}{2}$ (patrz rysunek 2.), co po podstawieniu do poprzedniego równania daje

$$|\measuredangle BSP| = \pi \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

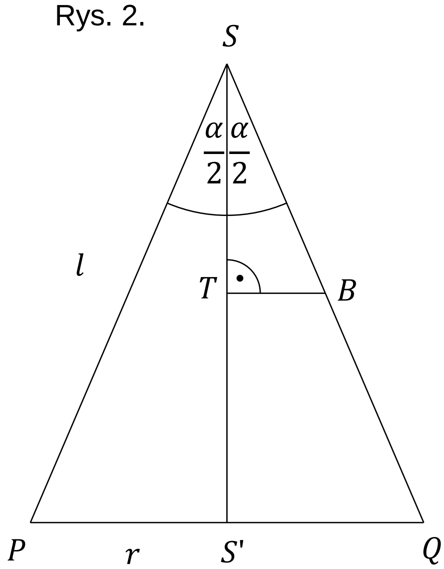
Wyrazimy długości odcinków BS oraz PS w zależności od danych podanych w treści zadania.

Rozważmy przekrój osiowy stożka zawierający punkty B, P oraz S (zobacz rys. 2.). Punkt S' na rysunku 2. jest rzutem prostokątnym punktu S na podstawę stożka, natomiast punkt Q – punktem przecięcia tworzącej SB z podstawą stożka.

Z trójkątów $SS'Q$ oraz STB otrzymujemy

$$|BS| = \frac{|ST|}{\cos\frac{\alpha}{2}} \quad \text{oraz} \quad |SQ| = \frac{|SS'|}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Rys. 2.



Z treści zadania $|ST| = H_2 - H_1$ oraz $|SS'| = H_2 - H_0$, więc

$$|BS| = \frac{H_2 - H_1}{\cos\frac{\alpha}{2}} \quad \text{oraz} \quad |PS| = |SQ| = \frac{H_2 - H_0}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta BSP: i obliczamy $|PB|$:

$$|PB|^2 = |PS|^2 + |BS|^2 - 2 \cdot |PS| \cdot |BS| \cdot \cos|\measuredangle BSP|$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{H_2 - H_0}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2 + \left(\frac{H_2 - H_1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2 - \frac{2(H_2 - H_0)(H_2 - H_1)}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2} \cdot \cos\left(\pi \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$d = \frac{\sqrt{(H_2 - H_0)^2 + (H_2 - H_1)^2 - 2(H_2 - H_0)(H_2 - H_1)\cos\left(\pi \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\right)}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Zadanie 29. (0–4)

Pan Nowak często gra z synem w szachy. Syn częściej wygrywa niż ojciec. Pan Nowak obliczył, że syn wygrywa 60% rozegranych partii.

Oblicz, ile partii szachów z synem musi rozegrać pan Nowak, aby prawdopodobieństwo wygrania przez ojca przynajmniej jednej partii w całej rozgrywce było większe od $0,95$.

Zasady oceniania

4 pkt – rozwiązanie nierówności: $1-(0{,}6)^n > 0{,}95$ i podanie odpowiedzi.

3 pkt – zastosowanie wzoru na prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów w n próbach i zapisanie nierówności: $1-(0{,}6)^n > 0{,}95$.

2 pkt – zapisanie nierówności: $1-P(S_n^0) > 0{,}95$.

1 pkt – obliczenie prawdopodobieństwa sukcesu i porażki.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Próbą Bernoullego jest rozegranie jednej partii szachów ojca z synem. Sukcesem w tej próbie jest wygrana ojca.

Z treści zadania wynika, że 60% rozegranych partii wygrywa syn, czyli ojciec wygrywa 40% rozegranych partii. W związku z tym prawdopodobieństwo sukcesu ojca w tej próbie jest równe $p=0{,}4$, natomiast prawdopodobieństwo porażki jest równe $q=0{,}6$.

Niech n oznacza szukaną liczbę partii oraz niech

S_n^0 – oznacza niewygranie przez ojca żadnej partii szachów,

S_n^1 – oznacza wygranie przez ojca jednej partii szachów,

S_n^2 – oznacza wygranie przez ojca dwóch partii szachów,

$\vdots$

S_n^n – oznacza wygranie przez ojca n partii szachów.

Korzystamy ze schematu Bernoullego. Prawdopodobieństwo wygrania przez pana Nowaka co najmniej jednej partii szachów jest równe

$$P(S_n^1 \cup S_n^2 \cup S_n^3 \cup \ldots \cup S_n^n) = 1 - P(S_n^0)$$

Zatem

$$1-P(S_n^0) > 0{,}95$$

$$1-\binom{n}{0}\cdot(0{,}4)^0\cdot(0{,}6)^n > 0{,}95$$

$$1-(0{,}6)^n > 0{,}95$$

$$(0{,}6)^n < 0{,}05$$

$$n \geq 6$$

Pan Nowak musi rozegrać z synem co najmniej sześć partii.

Zadanie 30. (0–3)

Pewna choroba atakuje $0{,}2\%$ całej populacji. W początkowym stadium nie daje widocznych objawów chorobowych. W ramach profilaktyki, aby wcześniej wykryć chorobę, stosuje się pewien test przesiewowy. Test ten może dać wynik pozytywny, oznaczający podejrzenie choroby lub negatywny, gdy brak podejrzenia choroby.
Test ten czasami daje fałszywy wynik. Prawdopodobieństwo tego, że test wykonany na osobie chorej da wynik pozytywny, jest równe $0{,}99$. Prawdopodobieństwo tego, że test wykonany na osobie zdrowej da wynik negatywny, jest równe $0{,}98$.
Pan X poddał się testowi, który dał wynik pozytywny.

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że Pan X jest naprawdę chory.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia szukanego prawdopodobieństwa i prawidłowy wynik.
2 pkt – zastosowanie wzoru Bayesa.
1 pkt – obliczenie prawdopodobieństw warunkowych $P(-|C)$ oraz $P(+|Z)$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy następujące oznaczenia:
„$+$” – zdarzenie polegające na tym, że wylosowana osoba z populacji poddana testowi otrzyma wynik pozytywny,
„$-$” – zdarzenie polegające na tym, że wylosowana osoba z populacji poddana testowi otrzyma wynik negatywny,
C – zdarzenie polegające na tym, że wylosowana osoba z populacji jest chora.
Z – zdarzenie polegające na tym, że wylosowana osoba z populacji jest zdrowa.

Należy obliczyć $P(C|+)$, czyli prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że pan X jest chory pod warunkiem otrzymania pozytywnego wyniku testu.

Ponieważ $0{,}2\%$ populacji choruje na tę chorobę, to $99{,}8\%$ populacji to ludzie zdrowi, stąd:

$P(C) = 0{,}002$ i $P(Z) = 0{,}998$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że chora osoba ma pozytywny wynik testu wynosi $0{,}99$, więc prawdopodobieństwo, że ta osoba ma wynik negatywny, wynosi $1 - 0{,}99 = 0{,}01$. Stąd

$P(+|C) = 0{,}99$ i $P(-|C) = 0{,}01$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że zdrowa osoba ma negatywny wynik testu wynosi $0{,}98$, więc prawdopodobieństwo, że ta osoba ma wynik pozytywny, wynosi $1 - 0{,}98 = 0{,}02$. Stąd

$P(-|Z) = 0{,}98$ i $P(+|Z) = 0{,}02$.

Stosujemy twierdzenie Bayesa i obliczamy szukane prawdopodobieństwo:

$$P(C|+) = P(+|C) \cdot \frac{P(C)}{P(+|Z) \cdot P(Z) + P(+|C) \cdot P(C)}$$

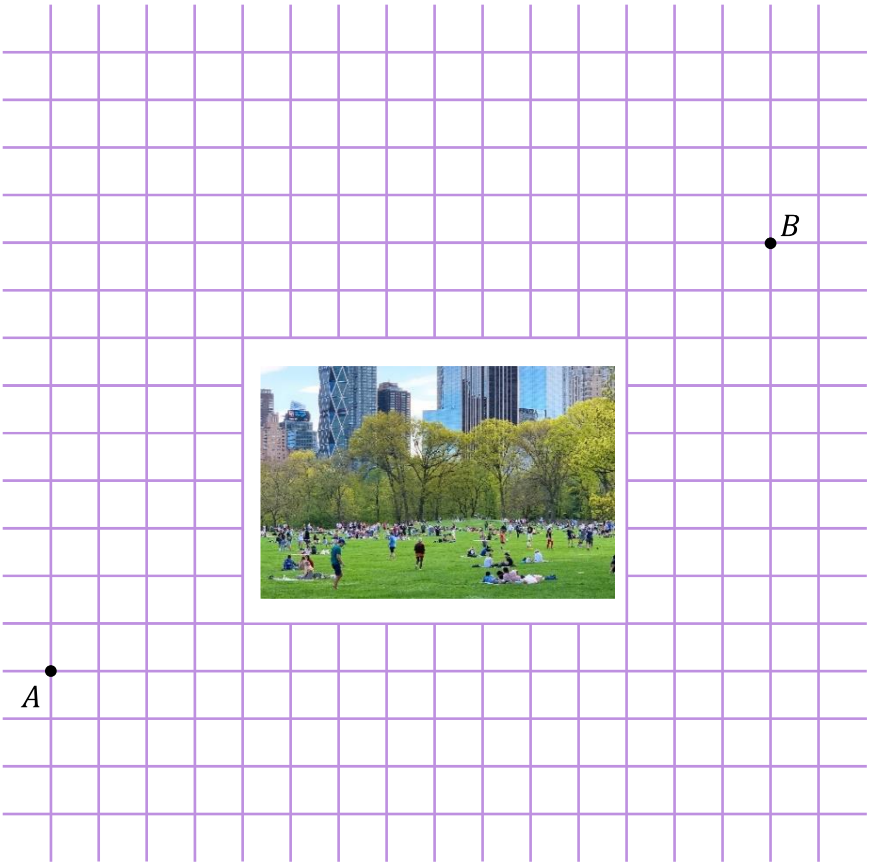
$$P(C|+) = 0{,}99 \cdot \frac{0{,}002}{0{,}02 \cdot 0{,}998 + 0{,}99 \cdot 0{,}002} \approx 0{,}09$$

Zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi około $0{,}09$.

Zadanie 31. (0–4)

W pewnym mieście jest prostopadły układ ulic, to znaczy, że ulice przecinają się pod kątem prostym. Ruch na każdej z nich jest dwukierunkowy. W centrum miasta znajduje się park, w którym obowiązuje całkowity zakaz ruchu pojazdów. Schemat ulic w tym mieście wraz z położeniem parku przedstawiono na rysunku poniżej. Tomek samochodem chce dojechać najkrótszą drogą z punktu A miasta do punktu B.

Oblicz, ile jest możliwości wyboru najkrótszej drogi z A do B.



Zasady oceniania

4 pkt – prawidłowa metoda wyznaczenia wszystkich najkrótszych dróg z A do B i prawidłowy wynik.

3 pkt – obliczenie liczby wszystkich najkrótszych dróg z A do K (gdzie $K \in \{C, D, E, F, G\}$).

2 pkt – zapisanie, że liczba wszystkich najkrótszych dróg z A do B przechodzących przez punkt K (gdzie $K \in \{C, D, E, F, G\}$) jest iloczynem liczby wszystkich najkrótszych dróg z A do K i liczby wszystkich najkrótszych dróg z K do B.

1 pkt – zapisanie, że każda najkrótsza droga z A do B musi przechodzić przez jeden z punktów $C – G$.

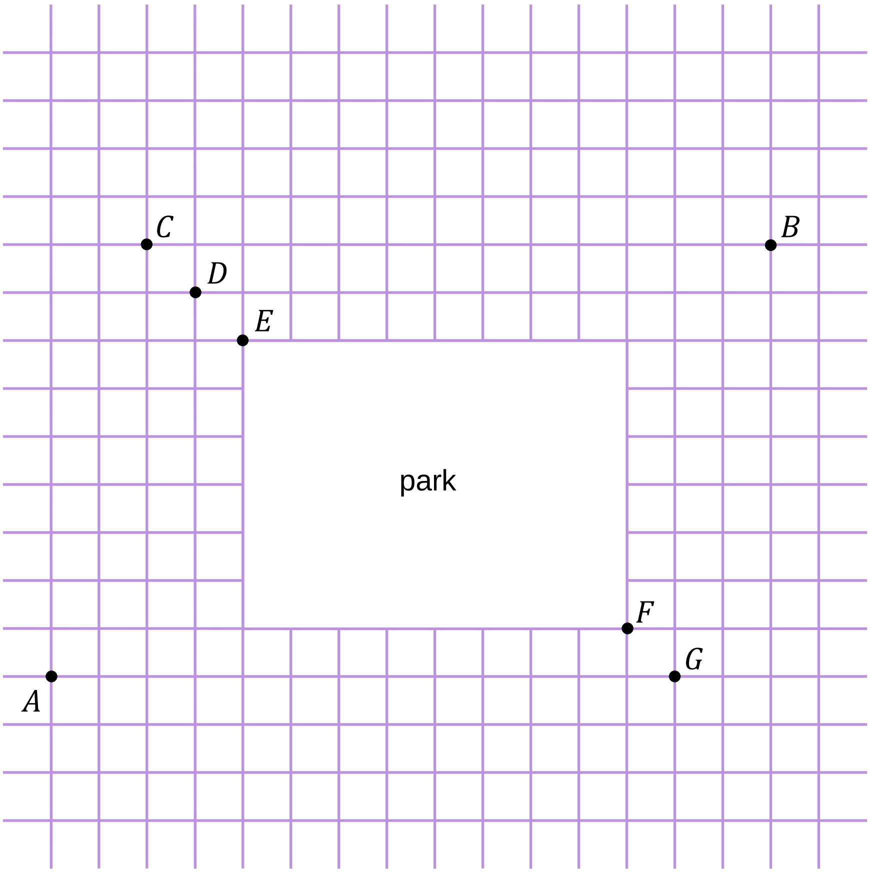
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

W poniższym rozwiązaniu przez $n(K, L)$ rozumieć będziemy liczbę wszystkich najkrótszych dróg z punktu K do punktu L.

Zaznaczmy na schemacie ulic punkty C, D, E, F, G (patrz rysunek 1.).

Rysunek 1.



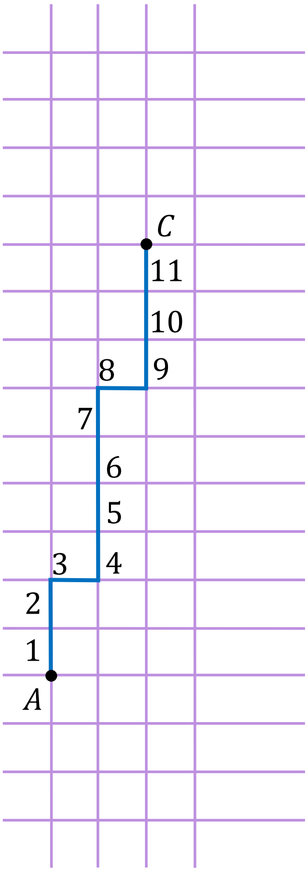
Zauważmy, że każda najkrótsza droga z A do B musi przechodzić przez któryś z punktów C, D, E, F lub G. Ponadto, liczba wszystkich najkrótszych dróg z A do B przechodzących przez C jest równa $n(A,C) \cdot n(C,B)$. Analogicznie, liczba wszystkich najkrótszych dróg z A do B przechodzących przez D jest równa $n(A,D) \cdot n(D,B)$ itd.

Obliczymy $n(A,C)$, czyli liczbę wszystkich najkrótszych dróg z A do C. Kierunek wyznaczony na rysunku 1. przez prostą AG nazwiemy *poziomym*, a kierunek prostopadły do *poziomego* – *pionowym*. Każda najkrótsza droga z A do C składa się z dokładnie 11 odcinków: 2 *poziomych* i 9 *pionowych*. Wskazanie 2 odcinków (spośród 11), które mają być *poziome*, określa nam jednoznacznie najkrótszą drogę z A do C. Stąd najkrótszych dróg z A do C jest $\binom{11}{2}$.

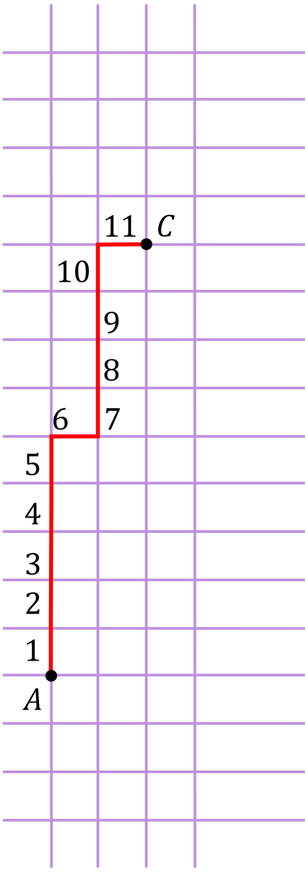
Na rysunku 2. przedstawiono najkrótszą drogę z A do C, gdzie odcinki trzeci i ósmy są *poziome*, a pozostałe – *pionowe*.

Na rysunku 3. przedstawiono najkrótszą drogę z A do C, która odpowiada wyborowi odcinków szóstego i jedenastego jako odcinków *poziomych*.

Rysunek 2.



Rysunek 3.



Podobnie rozumując, otrzymujemy

$$n(A,C)\cdot n(C,B)=\binom{11}{2}\cdot\binom{13}{0}=55\cdot 1=55$$

$$n(A,D)\cdot n(D,B)=\binom{11}{3}\cdot\binom{13}{1}=165\cdot 13=2145$$

$$n(A,E)\cdot n(E,B)=\binom{11}{4}\cdot\binom{13}{2}=330\cdot 78=25740$$

$$n(A,F)\cdot n(F,B)=\binom{13}{1}\cdot\binom{11}{3}=13\cdot 165=2145$$

$$n(A,G)\cdot n(G,B)=\binom{13}{0}\cdot\binom{11}{2}=1\cdot 55=55$$

więc $n(A,B)=55+2145+25740+2145+55=30140$.

Uchwała Rady Głównej Nauki i Szkolnictwa Wyższego oraz Konferencji Rektorów Akademickich Szkół Polskich o informatorach maturalnych od 2023 roku

Rada Główna Nauki i Szkolnictwa Wyższego

KONFERENCJA REKTORÓW KRASP AKADEMICKICH SZKÓŁ POLSKICH

Uchwała
Rady Głównej Nauki i Szkolnictwa Wyższego
oraz
Konferencji Rektorów Akademickich Szkół Polskich
z dnia 19 listopada 2020 r.
w sprawie informatorów o egzaminie maturalnym od roku 2022/2023

Rada Główna Nauki i Szkolnictwa Wyższego oraz Konferencja Rektorów Akademickich Szkół Polskich systematycznie i z uwagą obserwują egzamin maturalny, który stanowi podstawowe źródło informacji o poziomie przygotowania kandydatów na studia w polskich uczelniach. W zgodnej opinii obu instytucji przedstawicielskich środowiska akademickiego polski system egzaminacyjny dostarcza w tym zakresie w pełni wiarygodnych i opracowanych na czas danych. Zaufanie do tego systemu przekonująco potwierdziła KRASP wiosną tego roku, deklarując wolę odłożenia rekrutacji do szkół wyższych do czasu, gdy będzie możliwe bezpieczne przeprowadzenie egzaminu maturalnego w roku pandemii.

Drugim, bardzo istotnym zadaniem, które konsekwentne realizuje polski system egzaminacyjny jest wskazywanie za pomocą publikowanych materiałów kierunku rozwoju kształcenia w poszczególnych przedmiotach w stronę umiejętności złożonych, niezbędnych zarówno na studiach, jak i – w coraz większym stopniu – w życiu codziennym.

Ważną rolę w tym procesie odgrywają informatory o egzaminie maturalnym. Z jednej strony wydobywają oraz ilustrują za pomocą zadań najważniejsze wymagania podstawy programowej kształcenia ogólnego. Z drugiej strony, wiarygodnie informują kolejne pokolenia maturzystów o strukturze egzaminu maturalnego oraz o sposobie oceniania ich prac. W naszej opinii, przedłożone do zaopiniowania informatory dobrze realizują te cele.

Środowisko akademickie docenia starania systemu egzaminacyjnego o to, by systematycznie doskonalić swoją pracę i deklaruje dalsze wsparcie merytoryczne tych działań.

prof. dr hab. Zbigniew Marciniak
Przewodniczący Rady Głównej
Nauki i Szkolnictwa Wyższego

prof. dr hab. Inż. Arkadiusz Mężyk
Przewodniczący Konferencji Rektorów
Akademickich Szkół Polskich

EGZAMIN MATURALNY

Matematyka

Z opinii Recenzentów:

Zadania przedstawione w *Informatorze* na poziomie rozszerzonym pogrupowano według szeroko rozumianych działów […].
Na poziomie rozszerzonym zrezygnowano z zadań zamkniętych […] zabieg ten może lepiej sprawdzać umiejętności matematyczne ucznia.
Na szczególną uwagę zasługuje np. zadanie 4. Wprowadzone tam zostaje pojęcie punktu kratowego. Zadanie sprawdza, czy uczeń rozumie pojęcia zbudowane na bazie znanych sobie pojęć; jest to ważna umiejętność w rozwoju matematycznym […]. Bardzo interesujące i niestandardowe jest zadanie 31 […].
Koncepcja egzaminu maturalnego, która wybija się z *Informatora*, jest ewolucją obecnego egzaminu maturalnego w kierunku jeszcze lepszego sprawdzania umiejętności rozumowania, a nie mechanicznego rozwiązywania zadań […].

dr hab. Maciej Borodzik

Uważam, że bardzo trafną propozycją jest to, że wśród zadań znajdują się zadania z kontekstem realistycznym/praktycznym. W celu rozwiązania takich zadań należy stworzyć odpowiedni model matematyczny, a następnie wykonać w jego ramach odpowiednie obliczenia. Przykładem takich zadań w Informatorze są zadania 10., 20., 27., 30., 31. […].
Zachęcam nauczycieli i uczniów do szczegółowego zapoznania się z *Informatorem*, stanowiącym ważną wskazówkę dydaktyczną w przygotowaniu do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym.

Ewa Dolaczyńska

Ogromną zaletą zaproponowanych zadań jest to, że niezależnie od rozbudowania problemu i liczby punktów do zdobycia, proponowane problemy, sprawdzają elementarne umiejętności niezbędne do realizacji zagadnienia na poziomie rozszerzonym. Zarazem jednak zaproponowano także zadania wymagające nietypowych, twórczych rozwiązań opartych na odpowiednich twierdzeniach matematycznych. […] Autorzy zaproponowanych zadań w bardzo ciekawy sposób wplatają treści i problemy umiejscowione w kontekście realistycznym do zadań maturalnych. Zmuszają w ten sposób zdających do dogłębnej analizy problemu, odnalezienia właściwego modelu matematycznego, ewentualnie wymyślenia własnej strategii rozwiązania. […] Zadania te będą stanowić wyzwanie zarówno dla przyszłych maturzystów, jak i ich nauczycieli, których zadaniem na najbliższe lata będzie wykształcić w uczniach umiejętność twórczego, a nie odtwórczego podejścia do problemu.

Agata Górniak

ISBN 978-83-66725-06-5
9 788366 725065