SOFIZMATY

SOFIZMAT- rozumowanie na pozór poprawne, w którym popełniono błąd logiczny, trudny nieraz do wykrycia, nadający pozory prawdziwości fałszywemu twierdzeniu.

1. FAŁSZYWE RÓWNOŚCI

- **jedna granica- dwa wyniki**:

Obliczmy granicę:

$$\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+1}) = \lim_{x\to-\infty}[x(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})] = -\infty$$

Ale z drugiej strony ta sama granica przedstawia się następująco:

$$\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+1}) = \lim_{x\to-\infty}[\frac{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})}{(x-\sqrt{x^2+1})}] = \lim_{x\to-\infty}[\frac{x^2-x^2-1}{x-\sqrt{x^2+1}}] = \lim_{x\to-\infty}[\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}] = [\frac{-1}{-\infty}] = 0$$

Tak więc licząc granicę tej samej funkcji dwoma różnymi metodami otrzymaliśmy dwa różne wyniki.

WYJAŚNIENIE

Błędu nie znajdziemy w drugim rozumowaniu, które jest poprawne. Natomiast w pierwszym problem polega na tym, że:

$$\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+1}) = \lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}) = \lim_{x\to-\infty}(x+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}) = \lim_{x\to-\infty}(x-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}) = \lim_{x\to-\infty}[x(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})]$$

więc doprowadziliśmy do symbolu nieoznaczonego i na tym liczenie granicy się nie kończy.

- **1=(-1) z wykorzystaniem liczb zespolonych**

A oto kolejny algebraiczny pseudo-dowód:
Zacznijmy od napisania oczywistej równości:

$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)}$

Teraz korzystając ze znanego twierdzenia, rozbijamy pierwiastek iloczynu na iloczyn pierwiastków

$\sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$

W tym momencie wszyscy znający choć trochę liczby zespolone powiedzą, że:

$\sqrt{-1} = i$ i rzeczywiście jest to prawda.

Jednak liczba i ma taką własność, że podniesiona do kwadratu daje -1. Otrzymaliśmy więc 1 = (-1)

Prześledźmy wszystko od początku:

$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = i\cdot i = (-1)$

WYJAŚNIENIE

Błąd tkwi w pominięciu założeń w twierdzeniu mówiącym, że pierwiastek iloczynu jest iloczynem pierwiastków. Jest ono prawdziwe tylko dla liczb nieujemnych, a w naszym przypadku (-1) jest mniejsze od zera.

- **inny dowód na to, że 1 = (-1)**

Aby udowodnić, że 1 = -1 wykorzystamy pierwiastek kwadratowy z (-1), czyli liczbę zespoloną i . Liczba ta nie jest co prawda liczbą rzeczywistą, wiadomo jednak, że liczby zespolone można dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić zupełnie podobnie jak dobrze znane liczby rzeczywiste.

$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$$

$$\sqrt{\frac{1}{(-1)}} = \sqrt{\frac{-1}{1}}$$

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$$

$$\sqrt{1} \cdot \sqrt{1} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$$

1 = -1

WYJAŚNIENIE

Błędny jest drugi krok „dowodu"; gdy rachujemy na liczbach zespolonych, pierwiastek ilorazu nie musi równać się ilorazowi pierwiastków.

- **0 = 1 – całki**

W obliczeniach używamy całkowanie przez części oraz pochodną funkcji złożonych.

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \int (\ln x)' \frac{dx}{\ln x} = \ln x \cdot \frac{1}{\ln x} - \int \ln x (\frac{1}{\ln x})' dx = 1 - \int \ln x \frac{-1}{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} dx = 1 + \int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$$

Zatem:

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x} = 1 + \int \frac{dx}{x \cdot \ln x} \; / \; \cdot \int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$$

0=1

WYJAŚNIENIE

Błąd jest tutaj dość paradoksalny, ponieważ te dwie całki w ostatnim równaniu nie są sobie równe. Dlatego nie można ich odjąć.

Jest tak dlatego, iż za każdym razem po obliczeniu całki nie otrzymujemy konkretnej funkcji pierwotnej tylko grupę takich funkcji różniących się o pewną stałą (pochodna ze stałej jest równa zero).

- **inny dowód na to, że 0 = 1 (bardzo naiwne)**

0! = 1!

a więc

0 = 1

WYJAŚNIENIE
Ten „dowód" jest tak idiotyczny, że aż śmieszny. Chyba niczego nie trzeba wyjaśniać. (Dla zupełnie niedoinformowanych – wykrzyknik powyżej oznacza działanie silni).

- **2 = 3**

Wydaje się to poprawnym rozumowaniem na pierwszy rzut oka, ale…

$$1 = 1 \ / \ -3$$

$$1-3 = -3+1 \ / \ +\frac{9}{4}$$

$$1-3+\frac{9}{4} = \frac{9}{4}-3+1$$

$$(1-\frac{3}{2})^2 = (\frac{3}{2}-1)^2$$

$$1-\frac{3}{2} = \frac{3}{2}-1 \ / \ +1, +\frac{3}{2}$$

$$2 = 3$$

WYJAŚNIENIE
Błąd polega na obustronnym pierwiastkowaniu równania. Po tej czynności należy uwzględnić moduły, ponieważ $\sqrt{a^2} = |a|$.

- **inny dowód na to, że 2 = 3**

$$12y = 16x$$
$$36y - 24y = 48y - 32x \ / \ +32x - 36y$$
$$32x - 24y = 48x - 36y$$
$$8(4x-3y) = 12(4x-3y) / \div 4$$
$$2(4x-3y) = 3(4x-3y) / \div (4x-3y)$$
$$2 = 3$$

WYJAŚNIENIE
Tym razem błąd jest jeszcze prostszy. Polega na dzieleniu przez 0, ponieważ $4x-3y$ jest równe 0 w tym równaniu (wynika to z pierwszej linijki).

- **1 = 2**

$x^2 = x \cdot x = x + x + x + ... + x (x \text{ razy})$

Zróżniczkujmy lewą i prawą stronę równania:

$(x^2)' = 2x$

$(x + x + ... + x)'(x \text{ razy}) = x' + x' + ... + x'(x \text{ razy}) = 1 + 1 + ... + 1(x \text{ razy}) = x$

Oczywiście różniczkując równe otrzymujemy zawsze równe, zatem:

$2x = x$

Teraz wystarczy podstawić $x = 1$, by otrzymać upragnioną równość

$2 = 1$

WYJAŚNIENIE

Rozpisanie wyrażenia $x \cdot x$, na sumę $x + x + ... + x$ dla x-ów niebędących dodatnimi liczbami całkowitymi wygląda dosyć podejrzanie, nieprawdaż? Poza tym różniczkowanie tej sumy też jest bałamutne – nie można zastosować po prostu wzoru na pochodną sumy, jeśli liczba składników sumy nie jest stała, lecz zależy od zmiennej, względem której różniczkujemy.

- **42 = 43**

Przypomnijmy sobie pewien – być może nie wszystkim znany – sposób skracania ułamków polegający na wykreślaniu tej samej cyfry z licznika i mianownika ułamka, np. $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$. Inne przykłady: $\frac{19}{95} = \frac{1}{5}$, $\frac{26}{65} = \frac{2}{5}$, $\frac{49}{98} = \frac{4}{8}$.

Skróćmy w ten sam sposób ułamek $\frac{14}{43}$.

$\frac{14}{43} = \frac{1}{3}$

Po przemnożeniu obu stron „na krzyż” otrzymujemy:

$14 \cdot 3 = 43 \cdot 1$

$42 = 43$

WYJAŚNIENIE

Powyżej opisana metoda skracania jest oczywiście niedorzeczna. To, że można znaleźć kilka ułamków, dla których takie skracanie przypadkiem „działa”, niewiele zmienia…

2.RÓŻNE CIEKAWE „FAKTY”

- **każda liczba jest równa dowolnej liczbie od niej mniejszej**

Jeżeli liczba a jest większa od liczby b, to istnieje pewna liczba c, taka, że a = b + c. Na przykład dla liczb 5 i 3 mamy: 5 = 3 + 2. Mamy zatem:

$a = b + c$

Mnożymy obie strony równania przez $a - b$

$a(a-b) = (b+c) \cdot (a-b)$

$a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc$

Składnik ac przenosimy na lewą stronę:

$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$

$a(a-b-c) = b(a-b-c)$

Dzielimy obie strony równania przez a-b-c i otrzymujemy:
$a = b$

WYJAŚNIENIE
Stron równania nie można dzielić przez zero – przecież z tego, że $1 \cdot 0 = 2 \cdot 0$, nie wynika, że 1 = 2! W powyższym sofizmacie w ostatnim kroku dzieliliśmy strony równania przez czynnik a - b - c, który jest równy 0 (bo a = b + c).

- **wszystkie liczby naturalne są interesujące**

Załóżmy, że istnieją pewne liczby naturalne, które nie są interesujące, wtedy zbiór nieinteresujących liczb naturalnych jako niepusty podzbiór zbioru liczb naturalnych zawiera element najmniejszy. Przyjrzyjmy się temu najmniejszemu elementowi: jest to najmniejsza z liczb nieinteresujących – ach! jakże to interesujące. Tym samym doszliśmy do sprzeczności, bo najmniejsza liczba nieinteresująca okazała się niezwykle interesującą. W obliczu tej sprzeczności musimy odrzucić nasze początkowe założenia, zatem wszystkie, bez wyjątku, liczby naturalne są interesujące!

WYJAŚNIENIE
W powyższym „dowodzie" ścisłe rozumowanie stosujemy do pojęć pozbawionych matematycznego sensu (interesujący – nieinteresujący).

- **wszyscy ludzie mają ten sam wzrost**

Chcemy udowodnić, że wszyscy ludzie są tego samego wzrostu. Przede wszystkim naszą tezę sformułujmy precyzyjniej: „każdy skończony zbiór ludzi zawiera wyłącznie osoby tego samego wzrostu". W dowodzie wykorzystajmy indukcję po mocy (liczebności) zbioru. Początek indukcji jest oczywisty: faktycznie każdy jednoelementowy zbiór ludzi zawiera wyłącznie osoby (tzn. osobę) jednakowego wzrostu. Tym samym wykazaliśmy tezę indukcyjną dla n = 1 (przez n będziemy oznaczali moc zbioru). Teraz musimy wykonać krok indukcyjny. Nasze założenie indukcyjne ma następującą postać: „każdy n-elementowy zbiór ludzi zawiera osoby o jednakowym wzroście". Korzystając z założenia indukcyjnego trzeba udowodnić, że każdy n+1-elementowy zbiór ludzi zawiera osoby o jednakowym wzroście. Weźmy więc jakikolwiek n+1-elementowy zbiór ludzi $A = \{o_1, o_2, ..., o_{n+1}\}$. Zbiór $\{o_1, o_{2,...,} o_n\}$ jest n-elementowy, zatem – zgodnie z założeniem indukcyjnym – osoby $o_{1,} o_2, ..., o_n$ są tego samego wzrostu, podobnie zbiór $\{o_2, o_3, ..., o_{n+1}\}$ zawiera n elementów, więc osoba o_{n+1} ma ten sam wzrost jak osoby $o_2, o_{3,...,} o_n$, a co za tym idzie – taki sam jak osoba o_1.

WYJAŚNIENIE
W powyższym „dowodzie" nie wykazano poprawnie przejścia od n = 1 do n = 2 – nie ma wówczas „pośredników", dzięki którym można wykazać, że osoba o_1 jest tego samego wzrostu co o_{n+1} .

- **za czasów Mieszka I żyło ponad bilion ludzi**

Każdy z nas ma dwoje rodziców (biologicznych), czworo dziadków, ośmioro pradziadków, 16 prapradziadków itd. – z każdym pokoleniem wstecz liczba przodków podwaja się, tzn. n pokoleń temu mieliśmy 2^n przodków. Ilu spośród twoich przodków żyło za czasów Mieszka I? Było to 1000 lat temu, a zatem – jeśli przyjąć, że jedno pokolenie odpowiada 25 latom – 40 generacji przeminęło od czasów pierwszego polskiego władcy. Zatem odpowiedź to 2^{40} ludzi (dla uproszczenia bierzemy pod uwagę tylko przodków z jednego pokolenia). Nietrudno wyliczyć, że 2^{40} = 1 099 511 627 776, czyli ponad bilion (= 1 000 miliardów). Wniosek jest zdumiewający, tysiąc lat temu żyło wiele miliardów ludzi, a przecież nie wzięliśmy jeszcze pod uwagę ludzi, którzy nie byli twoimi przodkami!

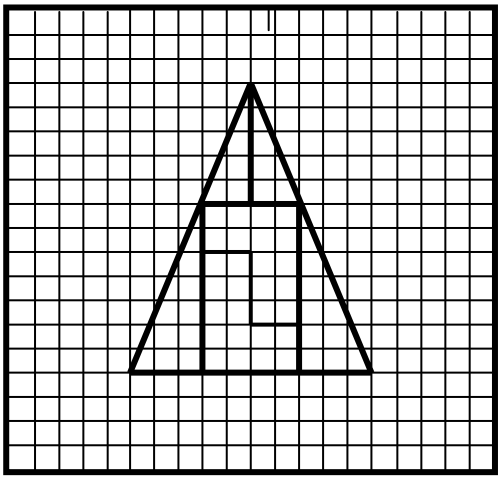
WYJAŚNIENIE

Błąd polega na tym, że te same osoby zliczamy wielokrotnie. Ten sam człowiek może być przecież naszym przodkiem zarówno po kądzieli, jak i po mieczu, może wręcz pojawiać się wielokrotnie w różnych miejscach naszego drzewa genealogicznego – im dalej sięgamy w przeszłość tym jest to bardziej prawdopodobne.

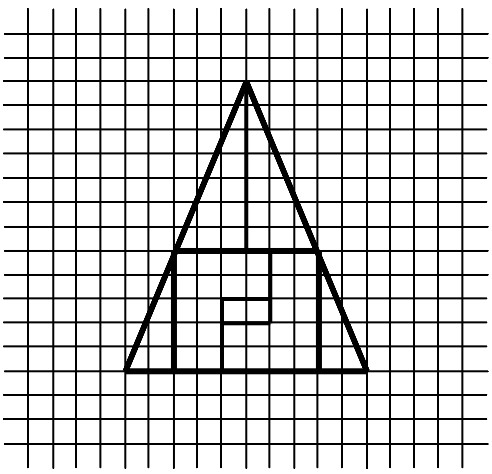
3.SOFIZMATY GEOMETRYCZNE

- **58 = 60 = 59**

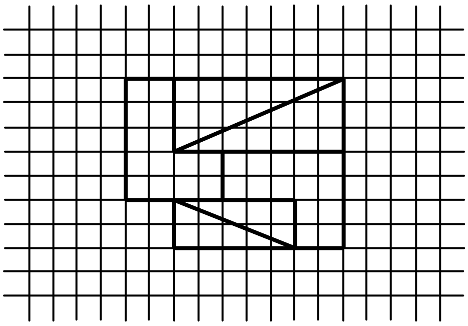
Trójkąt równoramienny o podstawie 10 cm oraz wysokości 12 cm dzielimy na sześć części, tak jak przedstawiono na powyższym rysunku. Pole powierzchni tego trójkąta (a także suma powierzchni sześciu części) wynosi 60 cm^2.



Z tych sześciu części da się złożyć identyczny trójkąt, z tą różnicą, że w jego środku pojawi się… dziura o powierzchni dwóch centymetrów kwadratowych (rysunek poniżej). Ale to oznacza, że suma powierzchni wszystkich sześciu części wynosi 60 – 2 = 58 cm^2



Nie dość na tym – z tych samych sześciu części można ułożyć figurę o powierzchni 59 cm^2.



Zresztą, jeśli Czytelnik nie wierzy, sam może na papierze w kratkę narysować taki trójkąt i pociąć go na te 6 kawałków.

WYJAŚNIENIE
Pierwszy rysunek sugeruje, że trójkąt składa się z dwóch wielokątów w kształcie litery L (o całkowitych długościach wszystkich boków), dwóch większych trójkątów prostokątnych 3×7 oraz dwóch mniejszych trójkątnych prostokątnych 2×5. Tak naprawdę jednak, większe trójkąty prostokątne musiałyby mieć wysokość 7,2 cm, a mniejsze „trójkąty” – być trapezami bardzo małej górnej podstawie (lub należałoby powiększyć nieco figury w kształcie litery L). Analogiczny błąd można popełnić patrząc na drugi rysunek. Jeśli brzegi figur narysuje się grubą linią lub wytnie się je niestarannie, można nie zauważyć niewielkich niedokładności, które jednak razem dają nawet centymetrowe błędy przy wyliczaniu pola powierzchni. Sofizmat wymyślił nowojorski psychiatra L. Vosburgh Lyons.

- **wszystkie okręgi mają ten sam obwód**

Weźmy dwa dowolne różne okręgi. Umieśćmy mniejszy z nich wewnątrz większego w taki sposób, by ich środki pokryły się (patrz rysunek poniżej). Potoczmy większy z okręgów po linii prostej. Po wykonaniu pojedynczego obrotu okrąg przemieści się na odległość równą swojemu obwodowi (czarny odcinek na rysunku). Tymczasem, jak nietrudno zauważyć, mniejszy z okręgów podczas jednego obrotu zatoczy linię o **identycznej** długości (czarny cieńszy odcinek – jak widać jest on równy co do długości odcinkowi, po którym przemieścił się większy okrąg). Zatem mniejszy okrąg ma taki sam obwód jak okrąg o większym promieniu!

WYJAŚNIENIE
Rzeczywiście mniejszy okrąg wykonuje pojedynczy obrót. Jednak okrąg ten równocześnie dodatkowo porusza się („ślizga się”) w prawo. To, że można przetoczyć złotówkę po całym pokoju (równocześnie powoli obracając ją i szybko przesuwając po podłodze) nie znaczy, że moneta ma obwód o długości kilku metrów!

4. ZASKAKUJĄCY RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

- **należy wnosić bomby na pokład samolotu**

Jakie jest prawdopodobieństwo, że w samolocie jest bomba? No cóż, powiedzmy, że mniej więcej $\frac{1}{10000}$. W takim razie, jakie jest prawdopodobieństwo, że w samolocie są dwie bomby?

Odpowiedź brzmi: $\frac{1}{100000000}$. Zatem najlepiej dla dobra pasażerów wnieść na pokład samolotu bombę, ponieważ my swojej własnej nie odpalimy, a prawdopodobieństwo, że jest jeszcze jedna do pary jest astronomicznie małe $(\frac{1}{100000000})$!

WYJAŚNIENIE

Niestety, prawdopodobieństwo, że w samolocie jest jeszcze jedna bomba, pozostaje równe $\frac{1}{10000}$ bez względu na to, ile dynamitu przemycimy do samolotu. Podobnie, choć prawdopodobieństwo wyrzucenia dwóch reszek w dwóch rzutach monetą jest równe $\frac{1}{4}$, to prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki w drugim rzucie, jeśli w pierwszym wyrzucono reszkę, wynosi nie $\frac{1}{4}$, lecz $\frac{1}{2}$!

Po prostu oba rzuty monetą są niezależne.

- **paradoks petersburski**

Załóżmy, że zaproponowano nam udział w następującej grze: rzucamy monetą, jeśli wypadła reszka, wygrywamy złotówkę i gra na tym się kończy, jeśli natomiast wypadł orzeł, rzucamy drugi raz i w przypadku wyrzucenia reszki wygrywamy 2zł, zaś jeśli wypadł orzeł, kontynuujemy grę i z kolei jeśli w trzecim rzucie wypadnie reszka, wygrywamy 4zł itd., gra toczy się aż do wyrzucenia reszki, stawka za każdym rzutem podwaja się. Ile pieniędzy można zapłacić za możliwość uczestniczenia w takiej grze?

ROZWIĄZANIE

Okazuje się, że gra jest tak atrakcyjna, że warto za nią zapłacić dużą sumę pieniędzy!

W grze można wygrać 1zł z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, 2zł z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$, 4zł z prawdopodobieństwem $\frac{1}{8}$, itd., to znaczy, że średnia wygrana wynosi:

$$(1\cdot\frac{1}{2})+(2\cdot\frac{1}{4})+(4\cdot\frac{1}{8})+(8\cdot\frac{1}{16})+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

Lecz powyższa suma jest przecież nieskończona, a więc gra toczy się o nieskończoną stawkę!
Rzecz jasna, jeśli zapłacimy na przykład 10 000zł za możliwość uczestniczenia w grze, to zwykle na tym stracimy, bo najprawdopodobniej szybko wyrzucimy reszkę i wygramy raczej mało. Jednak istnieje pewne małe prawdopodobieństwo wygrania astronomicznej kwoty pieniędzy, pieniędzy takim przypadku z dużą nawiązką zwróciłby nam się zainwestowany kapitał.
W opisywanej grze przyjęto nierealne założenie, że strona wypłacająca ma niewyczerpane zasoby finansowe i jest w stanie wypłacić szczęśliwemu graczowi bardzo szybko rosnące stawki.

- **paradoks urodzinowy**

Ile osób musi się zebrać, aby prawdopodobieństwo tego, że co najmniej dwie spośród nich obchodzą urodziny tego samego dnia, było większe niż $\frac{1}{2}$?

ROZWIĄZANIE

Prawidłowa odpowiedź brzmi 23, co jest wartością zaskakująco niską w stosunku do tego, co może podpowiadać intuicja.

W losowo wybranej grupie składającej się z 23 osób prawdopodobieństwo, że co najmniej dwie z nich świętują swoje urodziny tego samego dnia, wynosi około 0,5073. Aby wyliczyć tę wartość najprościej zacząć od wyznaczenia prawdopodobieństwa tego, że wśród 23 osób żadne dwie nie obchodzą urodzin tego samego dnia. Prawdopodobieństwo tego wynosi:

$$\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\frac{362}{365}\cdot\ldots\cdot\frac{365-23+1}{365}=0{,}4927$$

(Wyobraźmy sobie, że kolejnym 23 osobom przyporządkujemy losowo dni w roku. Prawdopodobieństwo, że pierwsze dwie osoby nie „otrzymają” tego samego dnia wynosi $\frac{364}{365}$ - pierwsza osoba może „otrzymać” jakikolwiek dzień, a druga dowolny spośród pozostałych 364 dni, prawdopodobieństwo, że trzeciej osobie nie zostanie przyporządkowany dzień „zajęty” przez dwie pierwsze osoby wynosi $\frac{363}{365}$, i tak dalej aż dojdziemy do osoby dwudziestej trzeciej, której pozostało 365 – 2 = 343 dni „niezajętych” przez poprzednie dwie osoby. Wszystkie otrzymane ułamki przemnażamy przez siebie, bo wybór dnia dla kolejnej osoby nie zależy od tego, jakie dni przyporządkowano poprzednim osobom).

Teraz, aby wyliczyć prawdopodobieństwo, że przynajmniej dwie spośród 23 osób obchodzą urodziny tego samego dnia, trzeba odjąć od 1 powyżej wyliczoną wartość prawdopodobieństwa, że żadne dwie osoby nie obchodzą urodzin tego samego dnia: 1 – 0,4927 = 0,5073.

- **problem Serbelloni**

Spośród trzech więźniów: Mateusza, Marka i Łukasza, dwóch ma być straconych, a jeden ocalony. Mateusz nie wie jeszcze, którzy z więźniów zostali skazani na śmierć i czy on sam jest jednym z tych dwóch nieszczęśników. Pyta się on strażnika: „ na pewno zginie Marek lub Łukasz , więc jeśli wyjawisz mi teraz, kto z nich zostanie stracony, to niczego mi nie powiesz o moim losie”. Strażnik po krótkim namyśle przychylił się do prośby więźnia i odpowiedział, że umrze Marek. Usłyszawszy to, Mateusz uspokoił się nieco, bowiem prawdopodobieństwo jego ocalenia zwiększyło się z $\frac{1}{3}$ do $\frac{1}{2}$. (Mateusz wie teraz, że zostanie stracony Marek, a drugim nieszczęśnikiem będzie albo on, albo Łukasz).

Czy rzeczywiście Mateusz miał prawo poczuć się spokojniejszym?

ROZWIĄZANIE

Niestety nie. Prawdopodobieństwo ocalenia Mateusza pozostaje równe $\frac{1}{3}$, także po tym, co Mateusz usłyszał z ust strażnika. Zestawmy w tabeli wszystkie możliwe pary więźniów skazanych na śmierć.

	prawdopodobieństwo	skazani na śmierć	ocalony	imię wyjawione przez strażnika
A	$\frac{1}{3}$	Mateusz, Marek	Łukasz	Marek
B	$\frac{1}{3}$	Mateusz, Łukasz	Marek	Łukasz
C	$\frac{1}{3}$	Marek, Łukasz	Mateusz	Marek albo Łukasz

Zauważmy, że w trzecim przypadku strażnik może podać Mateuszowi imię albo Marka, albo Łukasza. Przyjmijmy, że w takiej sytuacji strażnik losowo wybiera skazańca, którego imię oznajmi Mateuszowi. Zamiast trzech mamy zatem do czynienia z czterema możliwościami:

	prawdopodobieństwo	skazani na śmierć	ocalony	imię wyjawione przez strażnika
A	$\frac{1}{3}$	Mateusz, Marek	Łukasz	Marek
B	$\frac{1}{3}$	Mateusz, Łukasz	Marek	Łukasz
C_1	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	Marek, Łukasz	Mateusz	**Marek**
C_2	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	Marek, Łukasz	Mateusz	**Łukasz**

Pod uwagę bierzemy jedynie te przypadki, w których strażnik wyjawia Mateuszowi, że Marek zostanie stracony, czyli:

	prawdopodobieństwo	skazani na śmierć	ocalony	imię wyjawione przez strażnika
A	$\frac{2}{3}$	Mateusz, Marek	Łukasz	Marek
C_1	$\frac{1}{3}$	Marek, Łukasz	Mateusz	**Marek**

(W porównaniu z poprzednią tabelą zmieniły się wartości prawdopodobieństw, bo teraz liczymy je w przestrzeni dwóch przypadków, a nie czterech, tak czy owak przypadek A pozostaje dwa razy bardziej prawdopodobny niż przypadek C_1).

Teraz widać, że prawdopodobieństwo, iż Mateusz umrze, pozostaje równe $\frac{1}{3}$.Odpowiedź byłaby inna, gdyby wiadomo było, że strażnik w przypadku, gdy zostaną straceni Marek i Łukasz, wyjawia imię Marka, a nie losowo wybranego więźnia. Wtedy bowiem prawdopodobieństwo wszystkich przypadków mają się jak następuje:

	prawdopodobieństwo	skazani na śmierć	ocalony	imię wyjawione przez strażnika
A	$\frac{1}{3}$	Mateusz, Marek	Łukasz	Marek
B	$\frac{1}{3}$	Mateusz, Łukasz	Marek	Łukasz

C_1	$\frac{1}{3}$	Marek, Łukasz	Mateusz	Marek
C_2	0	Marek, Łukasz	Mateusz	Łukasz

W sytuacji, gdy strażnik powiedział, że stracony zostanie Marek prawdopodobieństwo ocalenia Mateusza jest równe prawdopodobieństwu ocalenia Łukasza i wynosi $\frac{1}{2}$. Gdyby natomiast strażnik powiedział, że to Łukasz zostanie skazany na śmierć, wówczas Mateusz wiedziałby na pewno, że jest drugim skazańcem.

Problem zyskał swoją nazwę, ponieważ omal nie doprowadził do zerwania odbywającej się w willi Serbelloni w lecie 1966 konferencji, poświęconej biologii teoretycznej.

- **syn czy córka**

Pan Kowalski ma dwoje dzieci. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ma dwóch synów?
Pan Nowaka dwoje dzieci. Jedno z nich jest chłopcem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że drugie dziecko pana Nowaka też jest chłopcem?
Pan Malinowski ma dwoje dzieci. Starsze z nich jest chłopcem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że drugie dziecko też jest chłopcem?
Zakładamy, - zupełnie zgodnie z rzeczywistością – że prawdopodobieństwo urodzenia chłopca i dziewczynki są równe i wynoszą ½?

ROZWIĄZANIE
Jeśli ktoś ma dwoje dzieci, są cztery jednakowo prawdopodobne możliwości: a) dwie dziewczynki (DD), b) starsze dziecko jest chłopcem, a młodsze dziewczynką (CD), c) starsze dziecko jest dziewczynką, młodsze – chłopcem (DC), d) dwóch chłopców (DD). Prawdopodobieństwo każdego z tych przypadków jest równe ¼, policzmy na przykład prawdopodobieństwo układu CD: najpierw rodzi się chłopca, prawdopodobieństwo tego wydarzenia wynosi ½ (założyliśmy, że dzieci „z osobna" rodzą się z określoną płcią z prawdopodobieństwem ½), następnie na świat powinna przyjść dziewczynka, co także zdarza się z prawdopodobieństwem ½. Jeśli założymy, że oba wydarzenia są niezależne – a tak można z pewnym przybliżeniem przyjąć – to prawdopodobieństwo przyjścia na świat najpierw chłopca, a później dziewczynki wynosi $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Innymi słowy, pierwsze dziecko jest chłopcem w połowie przypadków, z czego z kolei w połowie przypadków bocian przyniesie temu chłopcu młodszą siostrzyczkę, a połowa z połowy to jedna czwarta.
Teraz możemy udzielić odpowiedzi na podstawowe pytania. Pan Kowalski ma dwóch synów z prawdopodobieństwem ¼ (jak wyżej wykazaliśmy takie jest prawdopodobieństwo układu CC). W przypadku pana Nowaka w grę wchodzą trzy równie prawdopodobne możliwości: CC, DC, CD (wiemy, że pan Nowak z pewnością nie ma dwóch córek), z czego interesuje nas jedna możliwość: CC – zatem poszukiwane prawdopodobieństwo wynosi 1/3, a niw ½, jak można by na pierwszy rzut oka mniemać).
Co do pana Malinowskiego, mamy dwie możliwości: CC i CD. Prawdopodobieństwo pierwszej z nich wynosi w tym przypadku ½ i takie też jest prawdopodobieństwo, że młodsze z dzieci pana Malinowskiego jest chłopcem.