

PROPOZYCJA PLANU WYNIKOWEGO REALIZACJI PROGRAMU NAUCZANIA

„Matematyka przyjemna i pożyteczna”

W TRZECIEJ KLASIE SZKOŁY PONADGIMNAZJALNEJ W ZAKRESIE ROZSZERZONYM

KOMBINATORYKA

PERMUTACJE (1 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • podaje regułę mnożenia; • wyjaśnia pojęcie silni; • wyjaśnia pojęcie permutacji; • zapisuje za pomocą symbolu silni iloczyny (np. $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, $16! \cdot 17 \cdot 18$); • wypisuje wszystkie permutacje elementów danego zbioru. 	<ul style="list-style-type: none"> • oblicza wartość wyrażenia typu: $5! \cdot 4!$, $\frac{15!}{13!}$; • oblicza liczbę permutacji elementów zbioru; • szacuje liczbę permutacji elementów licznego zbioru; • ustala liczbę elementów zbioru, znając liczbę ich permutacji.
PONADPODSTAWOWE		<ul style="list-style-type: none"> • skracza wyrażenia algebraiczne, zawierające silnię $\left(\text{np. } \frac{(n+1)!}{(n-1)!} \right);$ • rozwiązuje zadania, obliczając permutacje i stosując regułę mnożenia lub regułę dodawania; • oblicza liczbę permutacji elementów zbioru, które spełniają dodatkowe warunki (np. nierozróżnialność, występowanie obok siebie wskazanych elementów, ustawianie w kole).

WARIACJE – ZASTOSOWANIE REGUŁY MNOŻENIA (2 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • wyjaśnia pojęcia: <ul style="list-style-type: none"> – wariacje bez powtórzeń, – wariacje z powtórzeniami. 	<ul style="list-style-type: none"> • wyznacza liczbę wariacji bez powtórzeń i wariacji z powtórzeniami konkretnej liczby elementów; • określa liczbę dzielników liczby postaci $a^n \cdot b^m$.
PONADPODSTAWOWE		<ul style="list-style-type: none"> • wyznacza liczbę wariacji bez powtórzeń i wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego; • wyznacza liczbę wariacji bez powtórzeń i wariacji z powtórzeniami elementów, które spełniają dodatkowo określone warunki.

KOMBINACJE. DWUMIAN NEWTONA (4 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • wyjaśnia pojęcia: <ul style="list-style-type: none"> – kombinacja, – symbol Newtona; • podaje własności symbolu Newtona; • wypisuje kombinacje elementów danego zbioru. 	<ul style="list-style-type: none"> • oblicza wartość współczynników newtonowskich; • wyznacza liczbę kombinacji; • rozwiązuje zadania o podziale; • rozwiązuje zadania, obliczając kombinacje oraz stosując regułę mnożenia lub regułę dodawania.
PONADPODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • podaje wzór Newtona; • buduje trójkąt Pascala. 	<ul style="list-style-type: none"> • rozwiązuje problemy geometryczne, korzystając z kombinacji (np. liczba przekątnych n-kąta, liczba prostych przechodzących przez dane punkty); • wyznacza liczbę kombinacji przynajmniej k-elementowych; • dowodzi tożsamości kombinatoryczne; • dowodzi własności symbolu Newtona $\left(\text{np. } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \right);$ • zapisuje wzory typu $(a + b)^n$, korzystając ze wzoru Newtona lub trójkąta Pascala; • wyznacza wskazany współczynnik w rozwinięciu dwumianu Newtona.

PRAWDOPODOBIENSTWO

PRAWDOPODOBIENSTWO I JEGO WŁASNOŚCI (2 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • wyjaśnia pojęcia: <ul style="list-style-type: none"> – zdarzenie losowe, – częstość, – prawdopodobieństwo zdarzenia losowego, – zdarzenie pewne, – zdarzenie niemożliwe, – zdarzenia elementarne, – przestrzeń zdarzeń elementarnych, – zdarzenie przeciwne, – zdarzenia wykluczające się, – iloczyn zdarzeń, – suma zdarzeń; • podaje: <ul style="list-style-type: none"> – klasyczną definicję prawdopodobieństwa, – własności prawdopodobieństwa, – wzór na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń; • zapisuje przestrzeń zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego; • wymienia wyniki sprzyjające zdarzeniu losowemu. 	<ul style="list-style-type: none"> • oblicza prawdopodobieństwo zdarzeń, korzystając z klasycznej definicji prawdopodobieństwa; • ustala zdarzenie przeciwne do danego; • rozpoznaje zdarzenia wykluczające się; • określa sumę, iloczyn i różnicę zdarzeń; • oblicza prawdopodobieństwo zdarzeń, korzystając z własności prawdopodobieństwa; • oblicza prawdopodobieństwo zdarzeń, korzystając ze wzorów na liczbę permutacji lub kombinacji.

PONADPODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> opisuje zdarzenia np. $A' \cup B$ dla danych zdarzeń A i B. 	<ul style="list-style-type: none"> rozwiązuje problemy wymagające zastosowania własności prawdopodobieństwa i wzorów na liczbę permutacji lub kombinacji; oblicza prawdopodobieństwo zdarzeń, wykorzystując wiadomości z innych działów (np. podzielność liczb).
-----------------	--	--

DOŚWIADCZENIA WIELOETAPOWE. METODA DRZEW (3 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> wyjaśnia pojęcie doświadczenia wieloetapowego; zapisuje zbiór zdarzeń elementarnych doświadczenia wieloetapowego; wyjaśnia metodę drzew; opisuje doświadczenie w postaci drzewa. 	<ul style="list-style-type: none"> oblicza prawdopodobieństwo zdarzeń wieloetapowych; stosuje metodę drzew do obliczania prawdopodobieństwa zdarzeń (ze zwracaniem i bez zwracania).
PONADPODSTAWOWE		<ul style="list-style-type: none"> oblicza prawdopodobieństwo zdarzeń, które można zapisać jako sumę zdarzeń wykluczających się (np. w dwukrotnym rzucie kostką otrzymanie w sumie co najwyżej 3 oczek); wyznacza prawdopodobieństwo zdarzeń wieloetapowych, wykorzystując własności prawdopodobieństwa (np. prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego).

ZADANIE O LOTERII, O DUŻYM LOTKU, O LICZENIU RYB I O KILKU INNYCH KWESTIACH (2 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	wyjaśnia pojęcie częstości.	<ul style="list-style-type: none"> oblicza prawdopodobieństwo zdarzeń polegających na losowaniu podzbioru elementów spełniających określone warunki; określa liczbę elementów zbioru, porównując częstość i prawdopodobieństwo zdarzeń.
PONADPODSTAWOWE		<ul style="list-style-type: none"> rozwiązuje problemy typu loteria, wymagające zastosowania własności prawdopodobieństwa; szacuje liczbę elementów zbioru, wykorzystując wzory na liczbę kombinacji

PRAWDOPODOBIENSTWO WARUNKOWE I PRAWDOPODOBIENSTWO CAŁKOWITE (3 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • wyjaśnia pojęcie prawdopodobieństwa warunkowego; • podaje wzór na: <ul style="list-style-type: none"> – prawdopodobieństwo iloczynu, – prawdopodobieństwo całkowite; • ilustruje za pomocą drzewa rozwiązanie zadania dotyczącego prawdopodobieństwa całkowitego. 	<ul style="list-style-type: none"> • oblicza prawdopodobieństwo warunkowe; • oblicza prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń. oblicza prawdopodobieństwo całkowite.
PONADPODSTAWOWE		<ul style="list-style-type: none"> • rozwiązuje zadania, obliczając prawdopodobieństwo warunkowe; • dowodzi wzory na prawdopodobieństwo całkowite np. dla trzech zdarzeń; • uogólnia wzór na prawdopodobieństwo iloczynu n zdarzeń.

NIEZALEŻNOŚĆ ZDARZEŃ (2 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • podaje definicję niezależności dwóch zdarzeń; • wyjaśnia pojęcie niezależności trzech zdarzeń. 	<ul style="list-style-type: none"> • sprawdza, korzystając z definicji, niezależność dwóch zdarzeń; • oblicza prawdopodobieństwo zdarzeń, które można opisać jako iloczyn niezależnych zdarzeń lub niezależnych dopełnień; • oblicza prawdopodobieństwo sumy zdarzeń niezależnych; • rozwiązuje zadania praktyczne (oporniki, systemy alarmowe), korzystając z definicji niezależności.
PONADPODSTAWOWE		<ul style="list-style-type: none"> • bada niezależność trzech zdarzeń; • uzasadnia własności zdarzeń niezależnych (np. jeśli zdarzenia A, B, C są niezależne, to $A \cup B$ oraz C też są zdarzeniami niezależnymi).

SCHEMAT BERNOULLIEGO (2 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • wyjaśnia pojęcia: <ul style="list-style-type: none"> – sukces, – porażka; • podaje wzór opisujący prawdopodobieństwo k sukcesów w serii n powtórzeń. 	<ul style="list-style-type: none"> • stosuje schemat Bernoulliego do obliczenia prawdopodobieństwa zdarzeń; • rozwiązuje zadania, korzystając ze schematu Bernoulliego i własności prawdopodobieństwa.
PONADPODSTAWOWE		<ul style="list-style-type: none"> • wyznacza najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów w serii n prób Bernoulliego.

ELEMENTY STATYSTYKI OPISOWEJ

TABELE, DIAGRAMY I ŚREDNIE (1 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • wyjaśnia pojęcia: <ul style="list-style-type: none"> – szereg pozycyjny, – diagram słupkowy, – diagram kołowy, – średnia arytmetyczna wyników; • odczytuje dane zapisane w postaci tabel i diagramów; • przedstawia dane w postaci tabeli, szeregu pozycyjnego i diagramu słupkowego. 	<ul style="list-style-type: none"> • przedstawia dane w postaci diagramu procentowego; • oblicza średnią arytmetyczną na podstawie tabel i diagramów; • szacuje przybliżoną wartość średniej pogrupowanych danych.
PONADPODSTAWOWE		<ul style="list-style-type: none"> • interpretuje dane i średnie.

ŚREDNIA WAŻONA. MEDIANA I MODA (2 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • wyjaśnia pojęcia: <ul style="list-style-type: none"> – średnia ważona, – mediana, – moda (dominanta); • podaje medianę i modę zestawu danych przedstawionych w postaci szeregu pozycyjnego. 	<ul style="list-style-type: none"> • oblicza średnią ważoną zestawu danych; • rozwiązuje zadania, obliczając średnią ważoną; • wyznacza medianę i modę zestawu danych przedstawionego w postaci tabeli lub diagramu; • podaje przykłady zestawu danych, dla których średnia i mediana spełniają określone warunki.
PONADPODSTAWOWE		<ul style="list-style-type: none"> • uzupełnia listę danych, znając pewne parametry statystyczne, tak aby cały zestaw spełniał określone warunki; • analizuje zmianę średniej ważonej w zależności od wyboru współczynników wagowych.

WARIANCJA I ODCHYLENIE STANDARDOWE. ROZKŁAD NORMALNY* (3 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • wyjaśnia pojęcia: <ul style="list-style-type: none"> – odchylenie bezwzględne, – wariancja, – odchylenie standardowe. 	<ul style="list-style-type: none"> • oblicza wariancję i odchylenie standardowe zestawu danych; • rozwiązuje zadania, obliczając odchylenie standardowe.
PONADPODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • podaje zestawy np. dwóch liczb o wskazanej średniej i odchyleniu standardowym; • interpretuje wartości wariancji i odchylenia standardowego; • wyjaśnia pojęcia: <ul style="list-style-type: none"> – rozkład normalny, – krzywa Gaussa. 	<ul style="list-style-type: none"> • określa zmiany parametrów statystycznych w zależności od zmian wartości danych; • oblicza prawdopodobieństwo wyniku z danego zakresu na podstawie średniej i odchylenia standardowego; • określa przedziały zawierające określony procent wyników.

ŚREDNIA I WARIANCJA W SCHEMACIE BERNOULLIEGO* (1 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE		
PONADPODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • wyjaśnia pojęcia: <ul style="list-style-type: none"> – wartość oczekiwana, – teoretyczna wariancja. 	<ul style="list-style-type: none"> • oblicza teoretyczną średnią i teoretyczną wariancję • wyprowadza wzory na teoretyczną średnią i teoretyczną wariancję dla dowolnego p w schemacie Bernoulliego.

POCHODNA, GRANICA I CIĄGŁOŚĆ

GRANICA FUNKCJI W PUNKCIE (2 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • wyjaśnia pojęcia: <ul style="list-style-type: none"> – granica funkcji w punkcie, – granice jednostronne funkcji w punkcie, – granica niewłaściwa funkcji w punkcie; • określa granice funkcji w punkcie na podstawie jej wykresu. 	<ul style="list-style-type: none"> • oblicza granicę funkcji w punkcie należącym do dziedziny funkcji; • oblicza granicę funkcji w punkcie, wykonując odpowiednie przekształcenia (np. stosując wzory skróconego mnożenia); • wyznacza wartość granicy funkcji w punkcie w zależności od parametru.
PONADPODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • wskazuje punkty, w których funkcja dana wykresem ma granicę niewłaściwą lub granice jednostronne. 	<ul style="list-style-type: none"> • oblicza granice funkcji w punkcie, przekształcając wyrażenia niewymierne; • wyznacza granice jednostronne w punktach nieciągłości funkcji danej wzorem; • szkicuje wykres funkcji, mając daną dziedzinę, monotoniczność i granice; • rozwiązuje zadania, obliczając granicę funkcji w punkcie (np. wyznacza graniczne wartości objętości bryły w zależności od wysokości, oblicza przybliżone wartości pierwiastków kwadratowych podanych liczb).

CIĄGŁOŚĆ (2 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • wyjaśnia pojęcia: <ul style="list-style-type: none"> – ciągłość funkcji w punkcie, – funkcja ciągła na przedziale, – punkt nieciągłości funkcji; • odczytuje z wykresu punkty nieciągłości funkcji. 	<ul style="list-style-type: none"> • bada ciągłość funkcji danej wzorem, szkicując jej wykres; • bada ciągłość funkcji danej wzorem na podstawie definicji; • określa przedziały ciągłości funkcji, która nie jest ciągła w całej dziedzinie.
PONADPODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • podaje twierdzenie o wartościach pośrednich; • szkicuje wykres funkcji o określonych własnościach i podanych punktach nieciągłości. 	<ul style="list-style-type: none"> • dobiera wartość parametru, tak aby dana funkcja była ciągła; • buduje funkcje nieciągłe w określonych punktach, przekształcając znane funkcje nieciągłe (np. $y = \text{sgn } x$, $y = [x]$); • znajduje punkty nieciągłości funkcji, która opisuje określone zależności praktyczne (np. podatek w zależności od dochodu); • sprawdza, czy funkcja w określonym przedziale posiada miejsce zerowe; • uzasadnia rachunkiem istnienie pierwiastka równania i wskazuje go z określoną dokładnością.

PRĘDKOŚĆ ZMIANY I POCHODNA FUNKCJI W PUNKCIE (2 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • wyjaśnia pojęcia: <ul style="list-style-type: none"> – iloraz różnicowy, – prędkość zmiany wartości funkcji w punkcie; • podaje definicję pochodnej funkcji w punkcie. 	<ul style="list-style-type: none"> • wyznacza iloraz różnicowy funkcji danej wzorem na wskazanym przedziale; • oblicza z definicji pochodną funkcji typu $f(x) = ax$, $f(x) = ax^2$ w danym punkcie.
PONADPODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • odczytuje z wykresu funkcji średnią prędkość zmiany wartości funkcji na wskazanym przedziale. 	<ul style="list-style-type: none"> • oblicza z definicji pochodną funkcji wielomianowej w danym punkcie.

POCHODNA JAKO FUNKCJA. RÓŻNICZKOWANIE. POCHODNA FUNKCJI POTĘGOWEJ (3 h)

	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • wyjaśnia pojęcie pochodnej funkcji; • podaje wzór na pochodną funkcji $y = x^n$; • podaje wzór na pochodną funkcji typu: $y = x^{12}$, $y = x^{-5}$. 	<ul style="list-style-type: none"> • wyznacza, korzystając z definicji, wzór na pochodną funkcji liniowej oraz funkcji typu $y = ax^2$; • określa własności pochodnej funkcji $y = x^n$.
PONADPODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • podaje wzór na pochodną funkcji typu: $y = \frac{1}{x^7}$, $y = \sqrt[4]{x}$. 	<ul style="list-style-type: none"> • wyznacza, korzystając z definicji, wzór na pochodną funkcji kwadratowej oraz funkcji homograficznej; • przeprowadza analogiczne rozumowanie w celu wyznaczenia wzoru na pochodną funkcji trygonometrycznych lub funkcji wykładniczych; • dowodzi wzór na pochodną funkcji $y = x^n$, korzystając ze wzoru Newtona.

REGUŁY RÓŻNICZKOWANIA (3 h)

	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • podaje prawa działań na pochodnych: <ul style="list-style-type: none"> – pochodna sumy funkcji, – pochodna różnicy funkcji, – pochodna iloczynu funkcji i stałej, – pochodna sumy funkcji i stałej, – pochodna iloczynu, – pochodna ilorazu. 	<ul style="list-style-type: none"> • wyznacza pochodną funkcji, korzystając z reguł różniczkowania; • wyznacza pochodną funkcji, korzystając z tabeli pochodnych (np. wiedząc, że $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ wyznacza pochodną funkcji $y = 4x^2 \ln x$).
PONADPODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • wymienia przykłady funkcji o tej samej danej pochodnej (np. $y' = x$, $y' = 2x + 5$). 	<ul style="list-style-type: none"> • oblicza pochodną funkcji, która jest wzorem geometrycznym lub fizycznym, a argumentem wskazana zmienna; • wyprowadza reguły różniczkowania; • dowodzi tożsamości związane z funkcją i jej pochodną; • wyznacza funkcję pierwotną dla funkcji wielomianowej, homograficznej lub niewymiernej.

RÓWNANIE STYCZNEJ (2 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • wyjaśnia pojęcie stycznej; • wyjaśnia związek między pochodną funkcji w punkcie i współczynnikiem kierunkowym stycznej do wykresu funkcji w tym punkcie; • rozpoznaje na rysunku styczną do wykresu funkcji. 	<ul style="list-style-type: none"> • wyznacza równanie stycznej do wykresu funkcji w danym punkcie; • wyznacza równanie stycznej do wykresu funkcji, równoległej lub prostopadłej do danej prostej.
PONADPODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • analizuje kąt nachylenia stycznej do wykresu funkcji w danym punkcie, aby podać wartość pochodnej w tym punkcie. 	<ul style="list-style-type: none"> • bada istnienie i równanie stycznej do wykresu funkcji, która powstała przez przekształcenie znanej funkcji lub posiada określone własności.

POCHODNA A CIĄGŁOŚĆ (1 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • wyjaśnia związek pochodnej z ciągłością; • podaje przykłady funkcji ciągłych, które nie mają pochodnej w pewnym punkcie; • rozpoznaje wykres funkcji ciągłej, która nie posiada pochodnej w pewnym punkcie. 	<ul style="list-style-type: none"> • wyznacza punkty, w których funkcja dana wzorem nie posiada pochodnej; • przekształca wykres danej funkcji (np. $y = x$), tak aby otrzymana funkcja nie posiadała pochodnej we wskazanych punktach.
PONADPODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • szkicuje wykres funkcji ciągłej, która nie posiada pochodnej w określonym punkcie. 	<ul style="list-style-type: none"> • zapisuje wzorem pochodną funkcji z modułami; • dowodzi braku istnienia pochodnej funkcji w danym punkcie, badając jednostronne granice ilorazu różnicowego; • bada różniczkowalność funkcji z parametrem.

POCHODNA: SPOJRZENIE FIZYKA (1 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • podaje interpretację fizyczną pierwszej i drugiej pochodnej funkcji. 	<ul style="list-style-type: none"> • wyznacza prędkość i przyspieszenie, korzystając z funkcji opisującej drogę; • rozwiązuje zadania tekstowe dotyczące prędkości i przyspieszenia, korzystając z pochodnej.

PONADPODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> wyznacza prędkość i przyspieszenie, korzystając z funkcji z parametrem; opisuje wzorem sytuację fizyczną oraz bada i interpretuje jej własności.
-----------------	---

MONOTONICZNOŚĆ I PROBLEMY OPTYMALIZACJI

MONOTONICZNOŚĆ (1 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> podaje twierdzenie dotyczące związku znaku pochodnej funkcji z monotonicznością tej funkcji; odczytuje przedziały monotoniczności funkcji danej w postaci wykresu. 	<ul style="list-style-type: none"> określa przedziały monotoniczności funkcji, badając znak jej pochodnej; sprawdza monotoniczność w całej dziedzinie funkcji wielomianowej.
PONADPODSTAWOWE		<ul style="list-style-type: none"> wyznacza wartości parametru, dla których dana funkcja jest monotoniczna; uzasadnia istnienie i liczbę miejsc zerowych funkcji w danym przedziale, badając monotoniczność tej funkcji.

MINIMA I MAKSIMA. PUNKTY KRYTYCZNE. ZADANIA NA OPTYMALIZACJĘ (4 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> wyjaśnia pojęcia: <ul style="list-style-type: none"> – otoczenie punktu, – punkt krytyczny; podaje definicje pojęć: <ul style="list-style-type: none"> – minimum funkcji, – maksimum funkcji, – wartość najmniejsza funkcji, – wartość największa funkcji; podaje warunek konieczny i warunek wystarczający istnienia ekstremum; wskazuje ekstrema funkcji na jej wykresie. 	<ul style="list-style-type: none"> wyznacza punkty, w których funkcja posiada ekstrema; oblicza najmniejszą i największą wartość funkcji w danym przedziale; wyznacza wartość parametru, dla której funkcja posiada ekstremum w danym punkcie; rozwiązuje zadania tekstowe, obliczając najmniejszą i największą wartość funkcji wielomianowej.

PONADPODSTAWOWE		<ul style="list-style-type: none"> • szkicuje przykładowe wykresy funkcji, której ekstrema spełniają podane warunki; • bada liczbę rozwiązań równania z parametrem typu $f(x) = m$ i wyznacza wartości ekstremalne; • rozwiązuje zadania, obliczając najmniejszą i największą wartość funkcji wymiernej i niewymiernej.
-----------------	--	---

WYKRESY WIELOMIANÓW I FUNKCJI WYMIERNYCH (1 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • dobiera w pary wykresy funkcji i jej pochodnej. 	<ul style="list-style-type: none"> • szkicuje wykresy funkcji wielomianowych i wymiernych, wykorzystując granice i pochodną; • określa zbiór wartości funkcji.
PONADPODSTAWOWE		<ul style="list-style-type: none"> • bada przebieg zmienności funkcji, aby rozwiązać graficznie równanie wyższego stopnia lub równanie wymierne, lub równanie z parametrem.

FUNKCJE TRYGNOMETRYCZNE PO RAZ TRZECI

FUNKCJE TRYGNOMETRYCZNE SUMY I RÓŻNICY KĄTÓW (3 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • podaje wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów; • podaje wzory na sinus i cosinus kąta podwojonego. 	<ul style="list-style-type: none"> • wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych kątów 15°, 75°, 105° itp; • upraszcza wyrażenia zawierające funkcje trygonometryczne; • wyznacza kąt nachylenia prostej do osi Ox; • uzasadnia wzory redukcyjne; • wyprowadza inne wzory trygonometryczne na podstawie znanych związków między funkcjami trygonometrycznymi.

PONADPODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • podaje wzór na obliczanie kąta między prostymi. 	<ul style="list-style-type: none"> • stosuje wzory na sinus i cosinus sumy kątów do wyprowadzenia wzorów na sinus i cosinus kąta potrojonego oraz połówkowego; • rozwiązuje równania trygonometryczne typu $A \sin x + B \cos x = C$; • wyznacza kąt między krzywymi.
-----------------	---	--

ZAMIANA SUMY NA ILOCZYN (1 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • podaje wzory na sumę i różnicę sinusów oraz cosinusów kątów. 	<ul style="list-style-type: none"> • przekształca wyrażenia zawierające sumę lub różnicę funkcji trygonometrycznych do postaci iloczynowej; • rozwiązuje równania trygonometryczne wymagające doprowadzenia do postaci iloczynowej.
PONADPODSTAWOWE		<ul style="list-style-type: none"> • rozwiązuje zadania, wykorzystując podstawowe tożsamości trygonometryczne.

POCHODNE FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH* (1 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE		
PONADPODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • podaje wartość granicy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$; • podaje wzory na pochodne funkcji sinus i cosinus. 	<ul style="list-style-type: none"> • wyprowadza wzory na pochodne funkcji tangens i cotangens, stosując reguły różniczkowania.

RÓWNOLEGŁOŚĆ I PROSTOPADŁOŚĆ (1 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • wyjaśnia pojęcia: <ul style="list-style-type: none"> – płaszczyzny równoległe, – płaszczyzny prostopadłe, – proste równoległe, – proste przecinające się, – proste skośne, – prosta równoległa do płaszczyzny, – prosta prostopadła do płaszczyzny; • wskazuje w otoczeniu (np. w sali lekcyjnej) proste i płaszczyzny spełniające podane warunki. 	<ul style="list-style-type: none"> • wyznacza liczbę par krawędzi danego graniastosłupa, które są: <ul style="list-style-type: none"> – równoległe, – prostopadłe, – skośne; • uzasadnia związki między krawędziami i ścianami wielościanów.
PONADPODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • podaje liczbę krawędzi równoległych lub skośnych w nietypowych wielościanach; • ocenia prawdziwość zdań opisujących własności prostych i płaszczyzn w przestrzeni, np. <i>dwie proste równoległe do tej samej płaszczyzny są równoległe</i>. 	<ul style="list-style-type: none"> • rozpoznaje krawędzie równoległe, prostopadłe lub skośne w wielościanach narysowanych w rzucie, perspektywie lub danych za pomocą siatki; • wskazuje w danej bryle płaszczyzny prostopadłe do odcinka, który nie jest krawędzią.

RODZAJE WIEŁOŚCIANÓW (2 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • wyjaśnia pojęcia: <ul style="list-style-type: none"> – wielościan, – wielościan wypukły, – graniastosłup prosty, – graniastosłup pochyły, – ostrosłup, – podstawa, ściana boczna, wierzchołek, krawędź, – graniastosłup prawidłowy, – ostrosłup prawidłowy, – czworościan, – czworościan foremny, – wysokość graniastosłupa, wysokość ostrosłupa, spodek wysokości. 	<ul style="list-style-type: none"> • szkicuje siatki wielościanów spełniających podane warunki; • wyznacza liczbę przekątnych danego graniastosłupa; • wyprowadza wzór na długość przekątnej sześcianu oraz prostopadłościanu, liczbę ścian, krawędzi i wierzchołków graniastosłupa oraz ostrosłupa o podstawie n-kąta.
PONADPODSTAWOWE		<ul style="list-style-type: none"> • podaje liczbę krawędzi, ścian i wierzchołków wielościanów ściętych; • sprawdza istnienie wielościanów spełniających podane warunki.

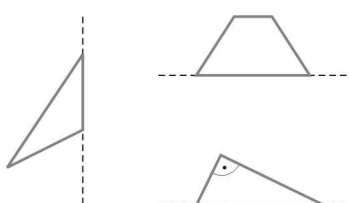
PRZEKROJE (2 h)

	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • wyjaśnia pojęcie przekroju; • podaje wzór na przekątną prostopadłościanu; • wskazuje na modelach wielościanów odpowiednie przekroje; • rozpoznaje wielokąt będące przekrojem wielościanu. 	<ul style="list-style-type: none"> • zaznacza przekroje na rysunkach wielościanów; • oblicza pola i obwody przekrojów.
PONADPODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • wymienia wszystkie figury, które mogą być przekrojem danego wielościanu. 	<ul style="list-style-type: none"> • wyznacza wymiary wielościanu na podstawie informacji o przekrojach.

POLE POWIERZCHNI I OBJĘTOŚĆ WIELOŚCIANU (2 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • podaje wzory na obliczenie: <ul style="list-style-type: none"> – pola powierzchni graniastosłupa, – objętości graniastosłupa, – pola powierzchni ostrosłupa, – objętości ostrosłupa; • podaje wzory na obliczanie pól figur płaskich; • wyznacza pole powierzchni i objętość wielościanu o danych długościach krawędzi podstawy i wysokości. 	<ul style="list-style-type: none"> • oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupów oraz ostrosłupów o podanych własnościach; • wyprowadza wzory na obliczanie objętości np. czworoscianu foremnego o danej krawędzi a.
PONADPODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • przekształca wzory na obliczanie pola powierzchni i objętości wielościanów; • podaje reguły obliczania pola powierzchni i objętości graniastosłupów oraz ostrosłupów ściętych. 	<ul style="list-style-type: none"> • porównuje pola powierzchni wielościanów o tej samej objętości (lub odwrotnie); • wyznacza pole powierzchni i objętość wielościanu, wykorzystując twierdzenie Pitagorasa; • oblicza pole powierzchni i objętość wielościanów powstałych przez ścięcie naroży danego graniastosłupa lub ostrosłupa.

BRYŁY OBROTOWE

WALEC, INTERLUDIUM: DŁUGOŚĆ ŁUKU I POLE WYCINKA KOŁA (2 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> wyjaśnia pojęcia: <ul style="list-style-type: none"> walec, podstawa walca, promień podstawy walca, oś obrotu, przekrój poprzeczny walca, przekrój osiowy walca; podaje wzory na obliczanie pola powierzchni i objętości walca; opisuje wymiary walca, który powstaje przez obrót danego prostokąta wokół wskazanej osi; wyjaśnia pojęcia: łuk, wycinek koła; podaje wzory na długość łuku i pole wycinka koła. 	<ul style="list-style-type: none"> rysuje rzut i siatkę walca; oblicza pole powierzchni i objętość walca o danych wymiarach; rozwiązuje zadania praktyczne, obliczając pole powierzchni i objętość walca; oblicza pole wycinka koła i długość łuku opartego na danym kącie.
PONADPODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> określa, jak zmienia się objętość walca w zależności od zmiany długości promienia podstawy lub wysokości walca; wyprowadza związek między polem wycinka koła a długością łuku ograniczającego ten wycinek. 	<ul style="list-style-type: none"> oblicza pole powierzchni i objętość walca, wykorzystując informacje o jego siatce lub przekroju; oblicza pole powierzchni i objętość brył wpisanych w walec, opisanych na walcu lub związanych z półwalcem; rozwiązuje zadania wymagające zastosowania wzoru na obliczanie pola wycinka i długość łuku.

STOŻEK (1 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> wyjaśnia pojęcia: <ul style="list-style-type: none"> stożek, podstawa, promień podstawy, tworząca, pobocznica, wysokość, spodek wysokości stożka, oś obrotu, przekrój osiowy, przekrój poprzeczny stożka, kąt rozwarcia stożka; podaje wzory na obliczanie pola powierzchni i objętości stożka; opisuje wymiary stożka, który powstaje przez obrót danego trójkąta prostokątnego lub równoramiennego wokół wskazanej osi. 	<ul style="list-style-type: none"> rysuje rzut i siatkę stożka; oblicza pole powierzchni i objętość stożka o danych wymiarach; rozwiązuje zadania praktyczne, obliczając pole powierzchni i objętość stożka; porównuje objętości stożków w zależności od spełnianych warunków np. od różnicy wymiarów lub pól przekrojów.
PONADPODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> opisuje bryły obrotowe powstałe przez obrót figur: <div style="text-align: center;">  </div> 	<ul style="list-style-type: none"> oblicza pole powierzchni i objętość stożka, korzystając z funkcji trygonometrycznych i twierdzenia Pitagorasa; oblicza pole powierzchni i objętość stożka ściętego; oblicza pole powierzchni i objętość brył, które powstały przez obrót różnych figur (np. trapezu równoramiennego wokół krótszej podstawy).

KULA (2 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • wyjaśnia pojęcia: <ul style="list-style-type: none"> – kula, sfera, – środek, promień, średnica kuli, – koło wielkie; • podaje wzory na obliczanie pola powierzchni i objętości kuli; • określa wpływ zmiany długości promienia na pole powierzchni i objętość kuli. 	<ul style="list-style-type: none"> • rysuje rzut kuli; • oblicza pole powierzchni i objętość kuli o danym promieniu lub średnicy; • wyznacza promień kuli, znając jej objętość; • oblicza pole powierzchni i objętość kuli wpisanej w graniastosłup; • porównuje pola powierzchni i objętości brył obrotowych spełniających określone warunki (np. walec, stożek i półkula o wspólnej podstawie); • rozwiązuje zadania praktyczne związane z kulą i sferą (np. dotyczące kuli ziemskiej).
PONADPODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • określa przekroje kuli; • wyjaśnia pojęcie czaszy. 	<ul style="list-style-type: none"> • wyprowadza wzór na objętość kuli i czaszy; • oblicza pole przekroju kuli o podanej odległości od środka kuli.

WIEŁOŚCIANY FOREMNE I ZADANIA NA EKSTREMA

WIEŁOŚCIANY FOREMNE (1 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • wyjaśnia pojęcie wielościanu foremnego i podaje przykłady; • podaje liczbę krawędzi, ścian, wierzchołków wielościanów foremnych. 	<ul style="list-style-type: none"> • oblicza pola powierzchni wielościanów foremnych.
PONADPODSTAWOWE		<ul style="list-style-type: none"> • bada własności i przekroje wielościanów foremnych; • wykazuje, korzystając z wzoru Eulera, istnienie tylko pięciu wielościanów foremnych.

KULE I WIEŁOŚCIANY PLATOŃSKIE (2 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • wyjaśnia pojęcia: <ul style="list-style-type: none"> – wielościan wpisany w kulę, – wielościan opisany na kuli; • podaje twierdzenie o środkowych czworościanu foremnego. 	<ul style="list-style-type: none"> • oblicza promień kuli opisanej i kuli wpisanej w sześcián lub czworościan foremny.
PONADPODSTAWOWE		<ul style="list-style-type: none"> • oblicza promień kuli wpisanej w ośmiościan foremny; • wyznacza długość krawędzi wielościanu foremnego wpisanego w kulę; • rozwiązuje zadania, wykorzystując wiadomości o kuli wpisanej w wielościan foremny.

ZADANIA NA EKSTREMA (2 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • podaje warunek konieczny i warunek wystarczający istnienia ekstremum. 	<ul style="list-style-type: none"> • opisuje wielkości związane z figurami przestrzennymi (objętość, pole powierzchni, pole przekroju) w zależności od innych wymiarów; • wyznacza wartości ekstremalne funkcji opisujących wielkości związane z figurami przestrzennymi.
PONADPODSTAWOWE		<ul style="list-style-type: none"> • rozwiązuje zadania dotyczące brył, korzystając z pochodnej oraz funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.

KĄTY W WIEŁOŚCIANACH

KĄT MIĘDZY PROSTYMI (1 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • wyjaśnia pojęcia: <ul style="list-style-type: none"> – kąt między prostymi w przestrzeni, – proste skośne, proste równoległe i proste przecinające się; • wskazuje na modelu wielościanu kąty między krawędziami i przekątnymi; • zaznacza na rysunkach, przedstawiających rzuty graniastosłupów i ostrosłupów, kąty między odcinkami. 	<ul style="list-style-type: none"> • wyznacza miary kątów między odcinkami w graniastosłupach i ostrosłupach; • rozwiązuje zadania praktyczne (dachy, piramidy), obliczając miary kątów między odcinkami w graniastosłupach i ostrosłupach.
PONADPODSTAWOWE		<ul style="list-style-type: none"> • wyznacza miary kątów między odcinkami w mniej standardowych wielościanach; • szacuje i uzasadnia przedział, do którego należy miara kąta między określonymi odcinkami w wielościanach.

RZUT PROSTOKĄTNY. KĄT MIĘDZY PROSTĄ A PŁASZCZYZNĄ (2 h)		
	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIEJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • wyjaśnia pojęcia: <ul style="list-style-type: none"> – rzut prostokątny punktu na płaszczyznę, – rzut prostokątny prostej, figury na płaszczyznę, – kąt między prostą a płaszczyzną, – prosta prostopadła do płaszczyzny; • opisuje rzut odcinka, prostej na płaszczyznę; • wskazuje na modelach wielościanów rzuty prostokątne krawędzi i przekątnych na płaszczyzny zawierające ściany tych wielościanów; • rozpoznaje na rysunkach wielościanów określone kąty. 	<ul style="list-style-type: none"> • oblicza długość rzutu odcinków graniastosłupów i ostrosłupów na płaszczyznę podstawy; • zaznacza na rysunkach kąty między odcinkami i ścianami w graniastosłupach i ostrosłupach; • wyznacza miary kątów między odcinkami i ścianami w graniastosłupach i ostrosłupach.
PONADPODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none"> • określa rzut danej figury na płaszczyznę w zależności od położenia tej figury względem płaszczyzny; • podaje twierdzenie o trzech prostopadłych. 	<ul style="list-style-type: none"> • rozwiązuje zadania praktyczne, obliczając miary kątów między odcinkami i ścianami w graniastosłupach i ostrosłupach; • uzasadnia wzajemne położenie krawędzi i przekątnych wielościanów, korzystając z twierdzenia o trzech prostopadłych.

KĄT DWUŚCIENNY. TWIERDZENIE O RZUCIE PROSTOKĄTNYM* (3 h)

	WIADOMOŚCI I ROZUMIENIE Uczeń:	UMIĘJĘTNOŚCI Uczeń:
PODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none">• wyjaśnia pojęcia:<ul style="list-style-type: none">– kąt dwuścienny,– miara kąta dwuściennego;• rozpoznaje na rysunkach przedstawiających rzuty wielościanów odpowiednie kąty dwuścienne.	<ul style="list-style-type: none">• zaznacza na rysunkach kąty między ścianami graniastosłupów i ostrosłupów;• wyznacza miary kątów między ścianami graniastosłupów;• wyznacza miary kątów między ścianą boczną a podstawą ostrosłupa;• porównuje miary kątów między ścianą boczną a podstawą ostrosłupów prawidłowych o różnych podstawach i podanych własnościach;• rozwiązuje zadania praktyczne, obliczając miary kątów między ścianami wielościanów (<i>Kilka zadań o dachach</i>).
PONADPODSTAWOWE	<ul style="list-style-type: none">• podaje twierdzenie o rzucie prostokątnym;• zaznacza kąty między płaszczyznami ścian wielokątów wpisanych w inny wielokąt.	<ul style="list-style-type: none">• wyznacza miary kątów między:<ul style="list-style-type: none">– sąsiednimi ścianami ostrosłupów prawidłowych,– ścianami ostrosłupów, które nie są prawidłowe,– ścianami wielościanów ściętych;• stosuje twierdzenie o rzucie prostokątnym do obliczania pól przekrojów brył;• rozwiązuje zadania praktyczne, korzystając z twierdzenia o rzucie prostokątnym.

Opracowała: Iwona Kowalska