

Eugeniusz Jakubas, Piotr Nodzyński, Jacek Szuty

Matematyka przyjemna i pożyteczna

Program nauczania

Kształcenie w zakresie podstawowym:

Liceum ogólnokształcące

Liceum profilowane

Technikum

Kształcenie w zakresie rozszerzonym:

Liceum ogólnokształcące

Projekt okładki i stron tytułowych:

Karolina Lijklema

Konsultacja merytoryczna:

Marek Zakrzewski

Redaktor:

Joanna Górczyńska

Redaktor techniczny:

Elżbieta Czechak

Program zatwierdzony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu programów szkolnych do kształcenia ogólnego do nauczania **matematyki** (w zakresie podstawowym i rozszerzonym) na poziomie **liceum ogólnokształcącego**, liceum **profilowanego** i **technikum** na podstawie recenzji rzeczoznawców:

prof. dr. hab. Marka KORDOSA (z rekomendacji Uniwersytetu Warszawskiego)

dr. Zenona KRZEMIANOWSKIEGO (z rekomendacji Uniwersytetu im. A. Mickiewicza w Poznaniu)

mgr. Piotra BEJNAR-BEJNAROWICZA (z rekomendacji MENiS)

Nr dopuszczenia: DKOS-4015-168/02

Copyright © by Wydawnictwo Szkolne PWN Sp. z o.o.
Warszawa 2002

ISBN 83-7195-441-7

Wydawnictwo Szkolne PWN Sp. z o.o.

00-236 Warszawa, ul. Świętojerska 5/7

Wydanie pierwsze

Arkuszy drukarskich: 4,5

Skład i łamanie: Agencja Poligraficzna Sławomir Zych

Druk ukończono w czerwcu 2002 r.

Druk i oprawa:

Spis treści

1. Podstawa programowa	5
2. Założenia ogólne programu	11
3. Szczegółowe cele edukacyjne – kształcenia i wychowania	13
4. Materiał nauczania związany z celami edukacyjnymi	17
Ramowy rozkład materiału	17
Materiał nauczania z podziałem na klasy	20
5. Procedury osiągnięcia celów	33
6. Opis założonych osiągnięć ucznia i propozycje metod ich oceny	39

1. Podstawa programowa

Matematyka – zakres podstawowy

(liceum ogólnokształcące, liceum profilowane, technikum)

Cele edukacyjne

1. Wykształcenie umiejętności operowania najprostszymi obiektami abstrakcyjnymi: liczbami, zmiennymi i zbudowanymi z nich wyrażeniami algebraicznymi, zbiorami (liczb, punktów, zdarzeń elementarnych) oraz funkcjami.
2. Wykształcenie umiejętności budowania modeli matematycznych dla różnorodnych sytuacji z życia codziennego oraz ich wykorzystania do rozwiązywania problemów praktycznych.
3. Wykształcenie umiejętności projektowania obliczeń i ich wykonywania.
4. Poznanie podstawowych elementów myślenia matematycznego.
5. Nabycie umiejętności samodzielnego zdobywania wiedzy matematycznej.

Zadania szkoły

Zadaniem szkoły jest pomoc uczniom w osiągnięciu wskazanych celów edukacyjnych, ze szczególnym uwzględnieniem:

- umiejętności precyzyjnego formułowania myśli w mowie i piśmie.
- kształcenia wyobraźni geometrycznej.
- umiejętności odczytywania oraz przedstawiania danych w różnych formach (symbolicznej, graficznej, za pomocą wzorów).
- umiejętności wykorzystania nowoczesnych narzędzi wspomagających rozwiązywanie problemów matematycznych (kalkulatory, komputery).
- umiejętności współpracy przy rozwiązywaniu problemów.

Treści

Liczby i ich zbiory

1. Zbiory; suma, iloczyn, różnica zbiorów. Podstawowe pojęcia rachunku zdań.
2. Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory: liczby naturalne (liczby pierwsze), liczby całkowite, wymierne i niewymierne. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej.
3. Przypomnienie działań na potęgach. Potęga o wykładniku wymiernym.
4. Oś liczbowa. Przedziały na osi liczbowej. Sumy przedziałów; iloczyny i różnice takich zbiorów.
5. Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej. Interpretacja geometryczna.
6. Pojęcie błędu przybliżenia. Szacowanie wartości liczbowych. Obliczenia procentowe.

Funkcje i ich własności

1. Pojęcie funkcji. Wykres funkcji liczbowej.
2. Wyznaczanie dziedziny funkcji, jej miejsc zerowych, zbioru wartości, wartości największej i najmniejszej w danym przedziale, przedziałów monotoniczności.
3. Zastosowania funkcji do opisu zależności w przyrodzie, gospodarce i życiu codziennym.
4. Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi x i osi y .

Wielomiany i funkcje wymierne

1. Funkcja liniowa.
2. Trójmian kwadratowy i jego pierwiastki. Wykres funkcji kwadratowej.
3. Rozwiązywanie zadań prowadzących do równań i nierówności stopnia drugiego.
4. Wielomiany. Działania na wielomianach.
5. Dzielenie wielomianów z resztą. Twierdzenie Bézout. Zastosowanie do znajdowania pierwiastków wielomianów metodą rozkładania na czynniki.
6. Działania na wyrażeniach wymiernych. Funkcja homograficzna.
7. Rozwiązywanie równań i nierówności z funkcją homograficzną.

Funkcje trygonometryczne

1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.
2. Miara łukowa kąta. Definicja funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta.
3. Wykresy funkcji trygonometrycznych.
4. Najprostsze tożsamości trygonometryczne.

Ciągi liczbowe

1. Definicja i przykłady ciągów liczbowych.
2. Ciąg arytmetyczny i geometryczny. Wzór na n -ty wyraz. Wzór na sumę n początkowych wyrazów.
3. Procent składany. Oprocentowanie lokat i kredytów.

Planimetria

1. Własności czworokątów wypukłych. Okrąg wpisany w czworokąt. Okrąg opisany na czworokącie.
2. Wyznaczanie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem trygonometrii.
3. Oś symetrii i środek symetrii figury.
4. Twierdzenie Talesa i jego związek z podobieństwem. Cechy podobieństwa trójkątów.

Geometria analityczna

1. Równanie prostej na płaszczyźnie. Półpłaszczyzna – opis za pomocą nierówności.
2. Odległość na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Stereometria

1. Graniastosłupy i ostrosłupy. Walec, stożek, kula.
2. Wzajemne położenie krawędzi i ścian brył: kąt nachylenia prostej do płaszczyzny i kąt dwuścienny.
3. Wyznaczanie związków miarowych w bryłach z zastosowaniem trygonometrii.

Rachunek prawdopodobieństwa

1. Proste zadania kombinatoryczne.
2. Pojęcie prawdopodobieństwa i jego własności.
3. Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń w skończonych przestrzeniach probabilistycznych.
4. Elementy statystyki opisowej: średnia arytmetyczna, średnia ważona, mediana, wariancja i odchylenie standardowe (liczone z próby).

Osiągnięcia

W zakresie operowania obiektami abstrakcyjnymi

1. Wykonywanie działań na liczbach i wyrażeniach algebraicznych.
2. Opisywanie zbiorów za pomocą równań, nierówności i ich układów oraz upraszczanie takich opisów.
3. Sporządzanie wykresów funkcji oraz odczytywanie własności funkcji z wykresu.
4. Wyznaczanie związków miarowych dla figur płaskich i brył.

W zakresie budowania modeli matematycznych i ich stosowania

1. Opisywanie związków pomiędzy wielkościami liczbowymi za pomocą równań i nierówności.
2. Wykrywanie zależności funkcyjnych między wielkościami liczbowymi.
3. Wyznaczanie związków metrycznych i miarowych w otaczającej przestrzeni.
4. Budowanie modeli zjawisk losowych.

W zakresie projektowania obliczeń i ich wykonywania

1. Przeprowadzanie obliczeń dokładnych i przybliżonych (w tym procentowych).
2. Rozwiązywanie niektórych typów równań oraz ich układów.
3. Wyznaczanie miar figur geometrycznych.
4. Obliczania prawdopodobieństw zdarzeń.

W zakresie kształcenia myślenia matematycznego

1. Umiejętność definiowania prostych obiektów matematycznych.
2. Umiejętność podawania przykładów i kontrprzykładów.

W zakresie samodzielnego zdobywania wiedzy matematycznej

1. Wyszukiwanie w materiałach źródłowych potrzebnych informacji matematycznych.
2. Samodzielne opanowanie definicji i twierdzeń z podręcznika.
3. Przyswajanie schematów rozumowań i ich stosowanie.
4. Sprawne sporządzanie notatek.

Matematyka – zakres rozszerzony

(liceum ogólnokształcące)

Cele edukacyjne

1. Wkszałcenie umiejtnoŃci operowania najprostszyimi obiektami abstrakcyjnymi: liczbami, zmiennymi i zbudowanymi z nich wyrażeniami algebraicznymi, zbiorami (liczb, punktów, zdarzeń elementarnych) oraz funkcjami.
2. Wkszałcenie umiejtnoŃci budowania modeli matematycznych dla różnorodnych sytuacji z życia codziennego oraz ich wykorzystania do rozwiązywania problemów praktycznych.
3. Wkszałcenie umiejtnoŃci projektowania obliczeń i ich wykonywania.
4. Poznanie podstawowych elementów myślenia matematycznego.
5. Nabycie umiejtnoŃci samodzielnego zdobywania wiedzy matematycznej.

Zadania szkoły

1. Zwracanie uwagi na umiejtnoŃć precyzyjnego formułowania myśli przez uczniów, w mowie i piŃmie.
2. Kształcenie wyobraźni geometrycznej.
3. Umożliwienie uczniom odczytywania oraz przedstawiania danych w różnych formach (symbolicznej, graficznej, za pomocą wzorów).
4. Wykorzystywanie nowoczesnych narzędzi wspomagających rozwiązywanie problemów matematycznych (kalkulatory, komputery).
5. Zwracanie uwagi na umiejtnoŃć współpracy uczniów przy rozwiązywaniu problemów.

Treści nauczania

Liczby i ich zbiory

1. Indukcja matematyczna.
2. Równania i nierówności z wartością bezwzględną i ich interpretacja geometryczna.

Funkcje i ich własności

1. Różnowartościowość funkcji.
2. Funkcje parzyste, nieparzyste, okresowe.
3. Przekształcanie wykresu funkcji przez zmianę skali i przez symetrię względem osi.

Wielomiany i funkcje wymierne

1. Wzory Viète'a.
2. Równania i nierówności kwadratowe z parametrem.
3. Definicja funkcji wymiernej. Rozwiązywanie równań i nierówności wymiernych.
4. Dwumian Newtona.

Funkcje wykładnicze i logarytmiczne

1. Potęga o wykładniku rzeczywistym.
2. Definicja i wykresy funkcji wykładniczych i logarytmicznych.
3. Proste równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne.

Funkcje trygonometryczne

1. Wzory redukcyjne.
2. Proste równania trygonometryczne.

Ciągi liczbowe

1. Przykłady ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie.
2. Pojęcie granicy ciągu.
3. Obliczanie granic niektórych ciągów. Suma szeregu geometrycznego.

Ciągłość i pochodna funkcji

1. Pojęcie funkcji ciągłej.
2. Pojęcie pochodnej. Interpretacja geometryczna i fizyczna pochodnej.
3. Obliczanie pochodnych wielomianów i funkcji wymiernych.
4. Związek pochodnej z istnieniem ekstremów i z monotonicznością funkcji.
5. Zastosowanie pochodnej do rozwiązywania prostych problemów praktycznych.

Planimetria

1. Twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów.
2. Przykłady przekształceń geometrycznych: symetria osiowa, przesunięcie, obrót, symetria środkowa.
3. Wektory. Dodawanie wektorów i mnożenie wektora przez liczbę. Jednokładność.

Geometria analityczna

1. Okrąg i koło we współrzędnych.
2. Punkty przecięcia prostej z okręgiem i pary okręgów.

Stereometria

1. Przekroje płaskie graniastosłupów i ostrosłupów.
2. Wielościany foremne.

Rachunek prawdopodobieństwa

1. Prawdopodobieństwo warunkowe. Wzór na prawdopodobieństwo całkowite.
2. Niezależność zdarzeń.
3. Schemat Bernoulliego.

Osiągnięcia

1. W zakresie budowania modeli matematycznych i ich stosowania: umiejętność wyznaczania stanów optymalnych i ekstremalnych.
2. W zakresie kształcenia myślenia matematycznego:
 - 1) umiejętność przeprowadzania prostych rozumowań dedukcyjnych,
 - 2) rozumienie idei dowodu nie wprost oraz zasady indukcji matematycznej,
 - 3) umiejętność tworzenia poprawnej klasyfikacji obiektów (liczby, figury, funkcje, przekształcenia) ze względu na pewną ich cechę lub układ cech.

2. Założenia ogólne programu

Program nauczania zawiera opis celów kształcenia, treści i sposobów nauczania oraz osiągnięć uczniów liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum w zakresie podstawowym i *rozszerzonym*. Opisy te wynikają z *Podstawy programowej*, są jej rozwinięciem i uszczegółowieniem. Cytaty z *Podstawy programowej* zawarte w programie wyróżniono pogrubioną czcionką.

Materiał nauczania wynikający z celów edukacyjnych podzielono na klasy. W liceum ogólnokształcącym i liceum profilowanym przyjęto 34 tygodnie nauki w klasach I i II oraz 26 tygodni nauki w klasie III. W technikum odpowiednio - 34 tygodnie w klasach I - III oraz 26 tygodni w klasie IV. Każde ogólne zagadnienie uszczegółowiono, z uwzględnieniem określeń, pojęć, własności, definicji, twierdzeń i umiejętności. Tytuły prezentowanych treści są zgodne z tytułami przedstawionymi w *Podstawie programowej*. W materiałach i publikacjach opracowywanych na podstawie programu (w podręcznikach i rozkładach materiałów), kolejność wprowadzania pojęć i omawiania szczegółowych zagadnień powinna wynikać z przyjętych koncepcji dydaktycznych.

Niektóre hasła programowe dotyczą zagadnień realizowanych w gimnazjum. Są one umieszczone w programie ze względu na ich wagę w nauczaniu ponadgimnazjalnym.

Treści programu dotyczące zakresu rozszerzonego wyróżniono pochylą czcionką. Niektóre pojęcia tam wymienione mogą być opracowywane w lepszych klasach realizujących zakres podstawowy.

W procedurach osiągania celów, oprócz metod i form pracy oraz proponowanych środków dydaktycznych, przedstawiono krótkie charakterystyki zasad nauczania, podkreślając ich specyfikę w nauczaniu matematyki.

W wykazie założonych osiągnięć ucznia szczegółowo podano osiągnięcia wynikające z poszczególnych celów nauczania matematyki. Wybór osiągnięć, które będą podlegały ocenie oraz zakres ich opanowania na poszczególne oceny szkolne powinny zostać określone w wymaganiach i kryteriach oceniania.

Program nauczania ukierunkowany jest na użyteczność matematyki. Realizacja programu powinna przyczynić się do nabycia umiejętności posługiwania się matematyką jako specyficznym językiem porozumiewania się, argumentowania, wykonywania niezbędnych obliczeń i opisywania sytuacji praktycznych.

Matematyka to codzienny język nauk ścisłych, techniki i ekonomii. Od niedawna uczą się jej też biolodzy i lekarze, wkracza do socjologii, językoznawstwa, a nawet historii. Przy takim podejściu wzorem staje się raczej matematyka stosowana niż matematyka czysta, w tradycyjnym ujęciu aksjomatycznym. Ważniejsze stają się problemy modelowania i szacowania niż subtelności trudniejszych rozumowań. Gdy trzeba wybierać pomiędzy jasnością a precyzją, ważniejsza jest jasność.

Oczywiście, istnieją tu pewne różnice pomiędzy zakresem podstawowym a rozszerzonym. Nauczanie na poziomie rozszerzonym jest bardziej nastawione na rozumienie i samodzielne wnioskowanie. Uczeń będzie musiał wykazać się umiejętnością rozwiązywania zadań problemowych i większą biegłością, często też stykać się będzie z wyższym stopniem abstrakcji.

Zwróćmy uwagę, że każdy uczeń liceum ogólnokształcącego musi wybrać pewne przedmioty w zakresie rozszerzonym. Oznacza to, że matematykę w zakresie rozszerzonym wybierać będzie też część uczniów bez sprecyzowanych zainteresowań.

Chociaż w rzeczywistości zakres nauczania określą wymagania wyższych uczelni, to już teraz można przyjąć, że klasy z matematyką w zakresie rozszerzonym nie są odpowiednikiem dawnych klas matematyczno-fizycznych. Przy takim założeniu musimy przyjąć, że także program rozszerzony adresowany jest do zwykłego ucznia, często o skromnych uzdolnieniach matematycznych.

3. Szczegółowe cele edukacyjne – kształcenia i wychowania

Szczegółowe cele edukacyjne wynikają z celów i zadań szkoły sformułowanych w *Podstawie programowej*.

Z ogólnego celu: „**wykształcenie umiejętności operowania najprostszymi obiektami abstrakcyjnymi: liczbami, zmiennymi i zbudowanymi z nich wyrażeniami algebraicznymi, zbiorami (liczb, punktów, zdarzeń elementarnych) oraz funkcjami**” wynika podstawowy cel: kształcenie umiejętności posługiwania się pojęciem liczby. Obejmuje to omówienie wszelkich rodzajów liczb (naturalne, wymierne, rzeczywiste itp.), przybliżenia i procenty.

Drugim ważnym celem jest kształtowanie pojęcia zmiennej, a więc niewiadomej w równaniach i nierównościach, argumentu i wartości funkcji, parametru, wskaźnika i wyrazu ciągu.

Celem nauczania jest również kształtowanie pojęcia wyrażenia algebraicznego, zbudowanego z liczb i zmiennych: sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu, jednomianu i wielomianu, wszelkich wzorów (wzorów skróconego mnożenia, wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego, wzorów kombinatorycznych), tożsamości trygonometrycznych.

Do szczegółowych celów należy zaliczyć kształtowanie pojęcia zbioru. Będą to zbiory liczb utworzone na podstawie różnych cech i własności, przedziały liczbowe, zbiory rozwiązań równań i nierówności, zbiory punktów, zbiory figur geometrycznych oraz zbiory zdarzeń elementarnych.

Bardzo ważnymi obiektami abstrakcyjnymi są również funkcje, zarówno zmiennej rzeczywistej, jak też ciągi i *przekształcenia geometryczne* oraz *pojęcia ciągu rekurencyjnego, granicy, ciągłości i pochodnej funkcji, wektora*.

Powyższe cele edukacyjne zostaną osiągnięte przez uczniów, jeżeli będą oni znali i rozróżniali wymienione obiekty abstrakcyjne (pojęcia matematyczne) oraz, gdy będą rozumieли ich istotę i znaczenie. Formalne definiowanie tych pojęć w zakresie podstawowym nie jest wymagane. Wystarczy, aby uczniowie potrafili się nimi posługiwać w odpowiednich sytuacjach.

W zakresie rozszerzonym wymagana jest większa ścisłość definiowania pojęć i formułowania wniosków.

Drugi główny cel: „**wykształcenie umiejętności budowania modeli matematycznych dla różnorodnych sytuacji z życia codziennego oraz ich wykorzystania do rozwiązywania problemów praktycznych**”, zakłada, że uczniowie będą kształcić umiejętności matematyzowania sytuacji przedstawionych im w postaci niematematycznej. W sytuacjach tych nie będzie określona bezpośrednio metoda postępowania ani zakres pojęć, którymi należy się posłużyć. Celem nauczania powinno być kształcenie umiejętności dostrzegania pojęć matematycznych adekwatnych do danego zagadnienia i zaplanowania sposobów ich wykorzystania do rozwiązania problemu. Sytuacji z życia codziennego, dla których można budować modele matematyczne, jest bardzo wiele. Każda informacja przekazująca zależności ilościowe w postaci zbioru liczb, tabeli, diagramu, wykresu, nadaje się do zmatematyzowania.

W zakresie rozszerzonym należy kształcić umiejętność modelowania na przykładach zaczerpniętych z różnych dyscyplin nauki, uwzględniając ich specyficzne zależności (wraz ze stanami optymalnymi i ekstremalnymi).

Wiele zależności występujących w sytuacjach praktycznych to zależności funkcyjne. Uczniowie powinni nabyć umiejętności wykrywania i wykorzystywania ich do opisu danej sytuacji. Należy również kształcić umiejętność analizy spotykanych w życiu różnych przypadków i zjawisk losowych w celu ich matematycznego opisu, na podstawie którego można wykonać odpowiednie obliczenia.

Umiejętności matematyzowania mają służyć praktycznemu wykorzystaniu modeli w życiu. Uczeń ma nabyć umiejętności matematycznego rozwiązywania prostych (*a w zakresie rozszerzonym bardziej złożonych*) problemów pojawiających się w jego otoczeniu, radzić sobie w sytuacjach wymagających prostych (*bardziej złożonych*) obliczeń oraz powinien umieć optymalizować i racjonalizować swoje działania. Posiadane umiejętności powinny dać uczniowi zaufanie do matematycznych metod opisywania zjawisk.

Ważne są również cele wychowawcze. Uczeń powinien nabrać przekonania, że jego rozeznanie w świecie, interpretacja zjawisk i wysiłek umysłowy mogą dać pozytywne rezultaty. Kilka sukcesów w modelowaniu i wykorzystaniu modeli w życiu może przynieść uczniom duże korzyści w postaci wiary w siebie i w swoje umiejętności. Na przykładzie modelowania można osiągnąć jeszcze jeden ważny cel. Można uświadomić uczniom, że wiele zwykłych i „suchych” pojęć matematycznych, wiele żmudnych ćwiczeń i zadań to konieczność, bez której nie byłoby możliwe rozpoczęcie żadnej matematyzacji. Uczeń powinien mieć przekonanie, że należy mieć opanowane i gotowe do wykorzystania podstawowe pojęcia matematyczne, aby w odpowiedniej sytuacji wykorzystać tylko niektóre z nich.

Trzeci cel główny: **„wykształcenie umiejętności projektowania obliczeń i ich wykonywania”** – określa również ważne cele szczegółowe nauczania matematyki. Są to umiejętności, które tworzą najważniejszą część kanonu wykształcenia ogólnego ucznia i wchodzi w skład pozostałych celów edukacyjnych.

Oczywiście nadal należy kształcić biegłość w zwykłych rachunkach, jak też w przekształceniach algebraicznych. Dotyczy to rachunków pamięciowych, pisemnych i wykonywanych za pomocą kalkulatora czy komputera. Rachunki będą teraz jednak częściej pojawiać się jako fragment bardziej złożonych obliczeń. W takich sytuacjach przyjęcie właściwej strategii obliczeń w istotny sposób decyduje o powodzeniu. *W zakresie rozszerzonym techniczna biegłość przeprowadzania obliczeń powinna być większa.*

Tego rodzaju umiejętności (określane mianem projektowania obliczeń) kształcone są przede wszystkim przy bardziej złożonych zadaniach, a szczególnie w trakcie przygotowywania projektów.

Bardzo ważnym celem nauczania matematyki jest **„poznanie podstawowych elementów myślenia matematycznego”**. Matematyka w swojej istocie to przede wszystkim myślenie logiczne i racjonalne. W trakcie nauki uczniowie zapoznają się z podstawowymi pojęciami logiki i rachunku zdań oraz metodami wnioskowania. Wszelkie rozwiązywanie zadań i problemów będzie sprzyjało wyrobieniu w nich nawyków wyciągania wniosków i ich uzasadniania. *W zakresie rozszerzonym należy zadbać o kształcenie umiejętności przeprowadzania prostych rozumowań dedukcyjnych, rozumienie idei dowodu nie wprost i zasady indukcji matematycznej, oraz umiejętność klasyfikacji obiektów. Należy również zwracać uczniom*

uwagę na to, aby formułując wnioski uświadamiali sobie, czy dany fakt jest hipotezą, czy udowodnioną zależnością.

Oprócz celów związanych ściśle z treściami i umiejętnościami przedmiotowymi, nauczanie matematyki ma pozwolić na **„nabycie umiejętności samodzielnego zdobywania wiedzy matematycznej”**. Jest to nieodzowne, ze względu na ogólne cele współczesnego kształcenia, zakładające nabycie umiejętności ciągłego samokształcenia. Poprzez odpowiednie kierowanie pracą na lekcji, system prac domowych, realizację projektów, korzystanie z zasobów bibliotecznych, zasobów Internetu oraz pracę z interakcyjnymi programami komputerowymi uczniowie będą przygotowywani do aktywnego, samodzielnego uczenia się. *Szczególne znaczenie ma to dla uczniów realizujących program w zakresie rozszerzonym. W większości przypadków wybiorą oni kierunki studiów, których tok przewiduje nauczanie matematyki i nawyki samodzielnego zdobywania wiedzy matematycznej będą bardzo przydatne.*

Zadanie szkoły: **„umiejętność precyzyjnego formułowania myśli w mowie i piśmie”** będzie realizowane poprzez kształcenie umiejętności logicznego myślenia i wyrażanie jego efektów w mowie i w piśmie. Wnioski i stwierdzenia wypowiediane przez uczniów powinny być uzasadniane poprzez przeprowadzanie odpowiedniego rozumowania popartego właściwą argumentacją. Ich wypowiedzi, zarówno w formie pisemnej, jak i ustnej, powinny być jasne i mieć jednoznaczny charakter. *W zakresie rozszerzonym precyzja wypowiedzianych zdań, poziom ścisłości uzasadnień i wnioskowania, określania i definiowania pojęć oraz formułowania rozwiązań zadań z odpowiednimi komentarzami powinien być wyższy.*

Zadanie szkoły: **„kształcenie wyobraźni przestrzennej”** zakłada, że uczniowie będą kształcić wyobraźnię przestrzenną na lekcjach geometrii, a w szczególności stereometrii, co przyczyni się do właściwego postrzegania otaczającego nas świata. Uczniowie powinni nabyć umiejętność obserwacji figur, wyróżniania ich elementów, opisu własności, rysowania figur przestrzennych oraz czytania rysunków tych figur i wykonywania modeli. *W zakresie rozszerzonym należy rozpatrywać bardziej złożone sytuacje przestrzenne, uwzględniające nie tylko zależności między elementami brył, ale również własności ich przekrojów.*

Z zadania szkoły: **„umiejętność odczytywania oraz przedstawiania danych w formie graficznej”** wynika konieczność wykształcenia umiejętności porządkowania, przetwarzania oraz interpretowania danych liczbowych w postaci graficznej. Dane takie łatwo uzyskać ze środków masowego przekazu, notowań giełdowych, kursów walut oraz zestawów rodzinnych przychodów i wydatków. Powinna być również kształcona umiejętność prezentacji danych w postaci tabel, diagramów i wykresów, co umożliwi łatwiejsze dostrzeżenie związków i zależności. *W zakresie rozszerzonym analiza i prezentacja graficzna danych powinna sięgać głębiej, uwzględniając przede wszystkim tempo zmian.*

Realizując **„umiejętność wykorzystywania nowoczesnych narzędzi wspomagających rozwiązywanie problemów (kalkulatory, komputery)”**, będziemy korzystać z ogólnych umiejętności uczniów, wyniesionych z przedmiotu technologia informacyjna, oraz będziemy wzbogacać je o wykorzystanie kalkulatorów i komputerów w nauczaniu matematyki. Kalkulator naukowy (a jeszcze lepiej graficzny) lub komputer powinien wspierać procesy obliczeniowe w różnych sytuacjach oraz może być wykorzystywany do odkrywania pojęć matematycznych, ich kształtowania i rozwiązywania problemów. Uczniowie powinni wykonywać na kalkulatorze

graficznym lub komputerze wykresy funkcji i ich przekształcenia, przetwarzać dane w arkuszu kalkulacyjnym, obliczać wielkości kombinatoryczne i statystyczne. Wykorzystanie kalkulatorów naukowych, graficznych i komputerów usprawnia proces nauczania i jest czynnikiem motywującym uczniów do nauki. *W zakresie rozszerzonym można proponować uczniom realizację projektów związanych z programowaniem.*

Oprócz wyposażania uczniów w wiedzę, szkoła powinna kształcić w nich umiejętności potrzebne do funkcjonowania we współczesnym świecie, między innymi **"umiejętność współpracy przy rozwiązywaniu problemów"**. Można to realizować również podczas nauczania matematyki. Jednym z ważniejszych zadań w tym względzie jest przyzwyczajanie uczniów do współdziałania w zespole. Wspólna praca, rozumiana jako grupowe rozwiązywanie problemów, ma pozytywny wpływ na osiągnięcia uczniów. Praca w małych grupach przygotowuje do bycia przełożonym, partnerem, podwładnym, uczy wspólnego organizowania wykonywania zadań i współpracy z innymi. Uczeń pyta, słucha, prosi, podejmuje decyzje, staje się odpowiedzialny za grupę. Potrafi sam wybrać rolę albo zaakceptować rolę wyznaczoną mu przez grupę.

* * *

Przedstawiony powyżej zestaw celów edukacyjnych i zadań szkoły oraz wynikający z nich bogaty opis celów szczegółowych świadczą o tym, że świat myśli, wyobrażeń, pojęć i umiejętności matematycznych uczniów, będzie bardzo szeroki. Powinni oni nie tylko znać i rozróżniać dużą liczbę obiektów, ale również dostrzegać je w otaczającym świecie wraz z wzajemnymi powiązaniem i zależnościami, budować odpowiednie modele, przetwarzać dane, projektować i wykonywać obliczenia, prowadzić logiczne rozważania i precyzyjnie formułować myśli.

Cele te w stosunku do uczniów, którzy wybrali kształcenie w zakresie podstawowym, należy dostosować do realnych możliwości. Uczniowie ci pokładają nadzieję w innym, nie związanym z matematyką, kierunkiem własnego rozwoju. Ich zainteresowania i przyszłe dziedziny studiów tworzą również bogaty świat pojęć, reguł, prawd i zależności. Przedstawiony w celach zakres pojęć i umiejętności matematycznych oraz związana z tym gimnastyka umysłu, są dla nich wystarczające, aby funkcjonować w społeczeństwie. Wynika z tego bardzo ważny wniosek, że zagadnienia matematyczne nie mogą być dla nich sztucznie utrudniane i ponad miarę komplikowane. Nie należy z nimi rozważać wszelkich subtelności definicji, rozumienia pojęć, skrajnych przypadków, dowodzenia twierdzeń, daleko idących uogólnień. Wystarczy, że będą oni znali i posługiwali się matematyką w podstawowym zakresie.

W zakresie rozszerzonym program zakłada opanowanie dodatkowych treści, przydatnych do podjęcia studiów wyższych na kierunkach ścisłych oraz technicznych i ekonomicznych. Nauczanie na poziomie rozszerzonym powinno zawierać więcej elementów odkrywania i problemowego wprowadzania pojęć i zagadnień. Uczniowie powinni wykazywać większą samodzielność w opanowywaniu poszczególnych partii materiału, większą biegłość techniczną, bardziej twórczą postawę i wyższą precyzję formułowania myśli i wnioskowania a także umiejętność dokonywania uogólnień. Nie jest natomiast wymagana akademicka ścisłość definicji, dowodów twierdzeń i własności, wnioskowania i argumentowania.

4. Materiał nauczania związany z celami edukacyjnymi

Ramowy rozkład materiału

Zakres podstawowy – cykl trzyletni (3 + 3 + 3)

Klasa I	34 tygodnie × 3 godz. = 102 godz.
Liczby i ich zbiory	27
Funkcje i ich własności	19
Wielomiany i funkcje wymierne	19
Planimetria	15
Funkcje trygonometryczne	6
Geometria analityczna	10
Godziny do dyspozycji nauczyciela*	6

Klasa II	34 tygodnie × 3 godz. = 102 godz.
Liczby i ich zbiory – cd.	12
Ciągi	20
Wielomiany i funkcje wymierne – cd.	28
Planimetria – cd.	18
Funkcje trygonometryczne – cd.	18
Godziny do dyspozycji nauczyciela	6

Klasa III	26 tygodni × 3 godz. = 78 godz.
Stereometria	16
Rachunek prawdopodobieństwa	26
Powtórzenia, przygotowanie do matury	30
Godziny do dyspozycji nauczyciela	6

* Proponujemy przeznaczyć je na realizację tematów nadobowiązkowych, prezentacje projektów, powtórzenia całoroczne.

Zakres podstawowy – cykl czteroletni (3 + 2 + 2 + 2)

Klasa I	34 tygodnie × 3 godz. = 102 godz.
Liczby i ich zbiory	27
Funkcje i ich własności	19
Wielomiany i funkcje wymierne	19
Planimetria	15
Funkcje trygonometryczne	6
Geometria analityczna	10
Godziny do dyspozycji nauczyciela	6

Klasa II	34 tygodnie × 2 godz. = 68 godz.
Liczby i ich zbiory – cd.	12
Ciągi	20
Wielomiany i funkcje wymierne – cd.	14
Planimetria – cd.	18
Godziny do dyspozycji nauczyciela	4

Klasa III	30 tygodni × 2 godz. = 60 godz.
Wielomiany i funkcje wymierne – cd.	14
Funkcje trygonometryczne – cd.	18
Rachunek prawdopodobieństwa (statystyka)	10
Stereometria	16
Godziny do dyspozycji nauczyciela	2

Klasa IV	26 tygodni × 2 godz. = 52 godz.
Rachunek prawdopodobieństwa	16
Powtórzenia, przygotowanie do matury	30
Godziny do dyspozycji nauczyciela	6

Zakres rozszerzony – (4+5+5)

Klasa I	34 tygodnie × 4 godz. = 136 godz.
Liczby i ich zbiory	35
Funkcje i ich własności	22
Wielomiany i funkcje wymierne	20
Planimetria	20
Funkcje trygonometryczne	10
Geometria analityczna	21
Godziny do dyspozycji nauczyciela	8

Klasa II	34 tygodnie × 5 godz. = 170 godz.
Liczby i ich zbiory – cd.	25
Ciągi	27
Wielomiany i funkcje wymierne – cd.	40
Funkcje trygonometryczne – cd.	25
Funkcje wykładnicze i logarytmiczne	18
Planimetria – cd.	25
Godziny do dyspozycji nauczyciela	10

Klasa III	26 tygodni × 5 godz. = 130 godz.
Ciągłość i pochodna funkcji	25
Rachunek prawdopodobieństwa	35
Stereometria	25
Powtórzenia, przygotowanie do matury	35
Godziny do dyspozycji nauczyciela	10

Materiał nauczania z podziałem na klasy

Klasa I

Liczby i ich zbiory

- 1. Zbiory; suma, iloczyn, różnica zbiorów. Podstawowe pojęcia rachunku zdań.**

Pojęcie zbioru – przykłady różnych zbiorów.
Zbiory ograniczone i nieograniczone.
Elementy zbioru, zbiory skończone i nieskończone – przykłady zbiorów liczbowych i nieliczbowych.
Podzbiory danego zbioru.
Zawieranie się zbiorów, zbiór pusty, zbiory rozłączne.
Równoliczność zbiorów.
Suma, iloczyn, różnica zbiorów.
Zdanie logiczne.
Wartość logiczna zdania.
Negacja zdania.
Zdania złożone – koniunkcja, alternatywa, implikacja i równoważność.
Prawa de Morgana
Przykład, hipoteza.
Twierdzenie, dowód twierdzenia.
Kontrprzykłady.
- 2. Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory: liczby naturalne (liczby pierwsze), liczby całkowite, wymierne i niewymierne. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej.**

Zbiór liczb naturalnych.
Liczba przeciwna do danej liczby.
Zbiór liczb całkowitych.
Liczba wymierna.
Liczba odwrotna do danej liczby.
Zbiór liczb wymiernych.
Ułamek zwykły.
Rozwinięcie dziesiętne liczby wymiernej i rzeczywistej.
Działania na liczbach rzeczywistych.
Postać dziesiętna ułamka zwykłego.
Zamiana ułamka zwykłego na okresowy.
Długość okresu.
Szacowanie liczb niewymiernych.
Przybliżenia dziesiętne – zaokrąglenia.
Liczby rzeczywiste i ich podzbiory.
Rozwinięcia dziesiętne liczb niewymiernych.
Liczby rzeczywiste w zapisie dziesiętnym.
Własności działań i wzory skróconego mnożenia.
- 3. Przypomnienie działań na potęgach. Potęga o wykładniku wymiernym.**

Potęga o wykładniku naturalnym.
Potęga o wykładniku całkowitym.

Potęga o wykładniku wymiernym.

Zastosowanie kalkulatorów i komputerów do wykonywania obliczeń.

Pierwiastki kwadratowe i sześciennie.

Szacowanie liczb zapisanych w postaci pierwiastków kwadratowych.

Pierwiastki n -tego stopnia.

Odcinki niewspółmierne.

Wzory na potęgę ilorazu i iloczynu, iloraz i iloczyn potęg o tej samej podstawie lub o tym samym wykładniku.

Działania na potęgach.

Dodawanie, odejmowanie i mnożenie liczb postaci $a + b\sqrt{c}$.

Usuwanie niewymierności z mianownika.

Obliczanie wartości wyrażeń arytmetycznych, w których występują potęgi o dowolnym wykładniku wymiernym.

Notacja wykładnicza.

Potęga o dowolnym wykładniku rzeczywistym.

4. Oś liczbowa. Przedziały na osi liczbowej. Sumy przedziałów; iloczyny i różnice takich zbiorów.

Oś liczbowa.

Przedziały na osi liczbowej.

Interpretacja geometryczna przedziału na osi liczbowej.

Działania na przedziałach – suma, różnica, iloczyn.

Nierówności i przedziały.

5. Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej. Interpretacja geometryczna.

Pojęcie wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej.

Własności wartości bezwzględnej.

Przedziały liczbowe a wartość bezwzględna.

Odległość punktów na osi liczbowej.

Interpretacja geometryczna wartości bezwzględnej.

6. Równania i nierówności z wartością bezwzględną i ich interpretacja geometryczna.

Przykłady zagadnień prowadzących do równań i nierówności z wartością bezwzględną.

Rozwiązywanie równań i nierówności z wartością bezwzględną.

Interpretacja geometryczna równań i nierówności z wartością bezwzględną.

7. Pojęcie błędu przybliżenia. Szacowanie wartości liczbowych. Obliczenia procentowe.

Przybliżenia w życiu codziennym.

Dokładność przybliżenia.

Zaokrąglania dziesiętne z nadmiarem i niedomiarem.

Błąd przybliżenia.

Błąd bezwzględny i względny.

Działania na wartościach przybliżonych.

Szacowanie wartości wyrażeń liczbowych.

Wartość dokładna liczby rzeczywistej, przybliżona wartość dziesiętna liczby, wartość szacunkowa liczby.

Procent.

Obliczenia procentowe.

Zadania praktyczne z zastosowaniem procentu.

Procentowe porównania, procentowe zmiany.
Przyrost procentowy.
Różnice między przyrostem bezwzględnym a przyrostem procentowym.
Zmiany procentowe a punkty procentowe.
Zadania praktyczne na procentowe porównania i zmiany procentowe.
Błąd procentowy.

Funkcje i ich własności

- 1. Pojęcie funkcji. Wykres funkcji liczbowej.**

Pojęcie funkcji.
Przykłady zależności i przyporządkowań funkcyjnych, jednoznaczność przyporządkowania
Tabele i grafy.
Dziedzina, argumenty, wartości funkcji.
Układ współrzędnych, wykresy funkcji liczbowych.
- 2. Wyznaczanie dziedziny funkcji, jej miejsc zerowych, zbioru wartości, wartości największej i najmniejszej w danym przedziale, przedziałów monotoniczności.**

Określanie dziedziny funkcji.
Określanie zbioru wartości, odczytywanie argumentu dla danej wartości.
Miejsca zerowe, interpretacja miejsc zerowych, liczba miejsc zerowych.
Monotoniczność i przedziały monotoniczności.
Wyznaczanie wartości największej i najmniejszej.
Przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie i ujemne.
- 3. Różnowartościowość funkcji.**

Pojęcie różnowartościowości funkcji.
Przykłady funkcji różnowartościowych i ich wykresy.
Badanie różnowartościowości funkcji.
- 4. Zastosowania funkcji do opisu zależności w przyrodzie, gospodarce i życiu codziennym.**

Opisy zależności w przyrodzie.
Zależności i wykresy zjawisk ekonomicznych.
Funkcje i wykresy na co dzień.
Oś czasu, funkcje czasu.
- 5. Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi x i osi y.**

Przesunięcia pionowe i przesunięcia poziome.
Badanie zależności pomiędzy funkcją $y = f(x)$ a funkcjami $y = f(x) + a$ i $y = f(x + a)$.
Zmiana dziedziny podczas przesunięcia poziomego.
Określanie rodzaju przesunięcia na podstawie wykresu.
Łączne wykonywanie dwóch przesunięć – pionowego i poziomego.
Badanie wpływu kolejności wykonywanych przesunięć na końcowy wynik.
- 6. Funkcje parzyste, nieparzyste, okresowe.**

Określenie parzystości, nieparzystości i okresowości funkcji.
Przykłady funkcji parzystych, nieparzystych i okresowych.
Badanie parzystości, nieparzystości i okresowości funkcji.
- 7. Przekształcanie wykresu funkcji przez zmianę skali i przez symetrię względem osi.**

Przekształcanie wykresów funkcji względem osi Ox , Oy , prostych $x = a$, $y = b$, $y = x$.

*Sporządzanie wykresów funkcji $y = af(x)$, $y = f(ax)$.
Określanie skali przekształcenia wykresu.*

Wielomiany i funkcje wymierne

1. Funkcja liniowa.

Funkcja liniowa i równomierny wzrost.

Wykres funkcji liniowej.

Monotoniczność funkcji liniowej.

Funkcja liniowa i nierówności liniowe.

Proporcjonalność prosta i odwrotna.

Rozwiązywanie zadań tekstowych z zastosowaniem funkcji liniowej.

2. Trójmian kwadratowy i jego pierwiastki. Wykres funkcji kwadratowej.

Najprostsze przypadki równań kwadratowych.

Rozwiązywanie równań kwadratowych metodą uzupełniania do kwadratu.

Wzory na pierwiastki równania kwadratowego.

Rozwiązywanie równań kwadratowych za pomocą wzorów.

Najprostsze przykłady funkcji kwadratowych postaci $y = ax^2 + c$.

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej.

Postać ogólna funkcji kwadratowej i jej własności.

Miejsca zerowe i symetria wykresu funkcji kwadratowej.

Wykres funkcji $y = ax^2 + bx + c$.

3. Rozwiązywanie zadań prowadzących do równań i nierówności stopnia drugiego.

Zastosowanie równań kwadratowych do rozwiązywania zadań tekstowych.

Problemy ekonomiczne i fizyczne a funkcja kwadratowa.

Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej.

Planimetria

1. Twierdzenie Talesa i jego związek z podobieństwem. Cechy podobieństwa trójkątów.

Twierdzenie Talesa.

Przykłady modelowania matematycznego z wykorzystaniem podobieństwa figur płaskich i brył.

Proporcjonalność odcinków.

Skala podobieństwa figur.

Figury podobne w otaczającym świecie.

Proporcje.

„Złoty podział” odcinka, własności „złotego prostokąta”.

Kryterium podobieństwa wielokątów foremnych.

Suma kątów trójkąta.

Cechy podobieństwa trójkątów.

Twierdzenie Pitagorasa a podobieństwo trójkątów

Twierdzenie o wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego w trójkącie prostokątnym.

Zastosowanie twierdzenia Talesa.

Pola i obwody figur podobnych.

Pola powierzchni i objętości brył podobnych.

2. Przykłady przekształceń geometrycznych: symetria osiowa, przesunięcie, obrót, symetria środkowa.

Przekształcenia jako przykłady funkcji.

Przykłady izometrii i przystawanie figur.

Symetrie własne figur.

Jednokładność i podobieństwo.

3. Wektory. Dodawanie wektorów i mnożenie wektora przez liczbę. Jednokładność.

Równość wektorów.

Współrzędne i długość wektora.

Równoległość wektorów.

Działania na wektorach.

Zastosowanie wektorów do opisu jednokładności.

Zastosowanie wektorów do dowodzenia własności i twierdzeń.

Funkcje trygonometryczne

1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.

Stosunki długości przyprostokątnych do przeciwprostokątnej.

Funkcje trygonometryczne \sin , \cos , tg , i ctg kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.

Wartości funkcji trygonometrycznych dla szczególnych kątów: 30° , 45° , 60° .

Tabele wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego.

Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych.

Budowanie kąta ostrego o danej wartości funkcji trygonometrycznej.

Zastosowanie funkcji trygonometrycznych do rozwiązywania zadań praktycznych.

2. Najprostsze tożsamości trygonometryczne.

Zastosowanie najprostszych tożsamości trygonometrycznych do rozwiązywania zadań i uzasadniania własności figur.

Geometria analityczna

1. Równanie prostej na płaszczyźnie. Półpłaszczyzna – opis za pomocą nierówności.

Układ współrzędnych na płaszczyźnie.

Równanie kierunkowe prostej.

Współczynnik kierunkowy prostej.

Postać ogólna prostej.

Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty.

Równanie odcinkowe prostej.

Równoległość i prostopadłość prostych.

Punkty przecięcia prostych.

Układy równań liniowych, metody rozwiązywania równań.

Układy równań: oznaczone, nieoznaczone, sprzeczne.

Interpretacja geometryczna układu równań.

Półpłaszczyzna domknięta i otwarta jako zbiór rozwiązań nierówności liniowej z dwiema zmiennymi.

Układy i alternatywy nierówności liniowych z dwiema zmiennymi.

Graficzne rozwiązywanie nierówności, układów i alternatyw nierówności liniowych.

2. Odległość na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Odległość i własności odległości.

Odległość dwóch punktów na płaszczyźnie.

Środek odcinka.

Współliniowość punktów.

Długość odcinka.

Odległość punktu od prostej.

Wielokąty w ujęciu analitycznym.

Środek ciężkości trójkąta.

3. Okrąg i koło we współrzędnych.

Równanie okręgu o środku w punkcie $(0, 0)$.

Postać ogólna równania okręgu.

Nierówności opisujące koło i zewnątrz koła.

4. Punkty przecięcia prostej z okręgiem i pary okręgów.

Wzajemne położenie prostej i okręgu.

Prosta sieczna okręgu i styczna do okręgu.

Wzajemne położenie dwóch okręgów.

Układy równań kwadratowych, znajdowanie punktów wspólnych prostej i okręgu oraz dwóch okręgów.

Klasa II

Liczby i ich zbiory – cd.

1. **Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory: liczby naturalne, liczby całkowite, wymierne i niewymierne. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej.**

Liczby pierwsze i złożone.

Rozkład liczby naturalnej na czynniki pierwsze.

Największy wspólny dzielnik.

Najmniejsza wspólna wielokrotność.

Cechy podzielności liczb.

Dowód nie wprost.

Przykłady dowodów niewymierności liczb.

2. **Indukcja matematyczna.**

Pojęcie indukcji matematycznej.

Zastosowanie zasady indukcji matematycznej.

Ciągi liczbowe

1. **Definicja i przykłady ciągów liczbowych.**

Ciąg liczbowy.

Wykres ciągu liczbowego.

Wzór na n -ty wyraz ciągu liczbowego.

Ciągi liczbowe skończone i nieskończone.

Równość ciągów.

Monotoniczność ciągu – ciągi rosnące, malejące i stałe.

2. **Ciąg arytmetyczny i geometryczny. Wzór na n -ty wyraz. Wzór na sumę n początkowych wyrazów.**

Ciąg arytmetyczny.

Wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego.

Średnia arytmetyczna.

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Ciąg geometryczny.

Wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego.

Średnia geometryczna.

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Zastosowanie ciągów arytmetycznych i geometrycznych.

3. **Przykłady ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie.**

Pojęcie i przykłady ciągów rekurencyjnych.

Zamiana postaci rekurencyjnej ciągu na postać zwykłą.

4. **Pojęcie granicy ciągu.**

Definicja granicy ciągu.

Przykłady granic ciągów.

5. **Obliczanie granic niektórych ciągów. Suma szeregu geometrycznego.**

Arytmetyka granic.

Granica nieskończonego ciągu geometrycznego zbieżnego.

Pojęcie szeregu geometrycznego.

Zbieżność szeregu geometrycznego.

6. Procent składany. Oprocentowanie lokat i kredytów.

Stopa procentowa.

Procent składany.

Kapitał, lokaty, oszczędności, raty, kredyty, kapitalizacja odsetek, saldo, debet.

Rozwiązywanie zadań o tematyce ekonomicznej prowadzących do obliczania oprocentowania lokat i kredytów.

Wielomiany i funkcje wymierne – cd.

1. Rozwiązywanie zadań prowadzących do równań i nierówności stopnia drugiego.

Postać iloczynowa funkcji kwadratowej.

Równania i nierówności kwadratowe niezupełne i zupełne.

2. Wzory Viète'a.

Suma i iloczyn pierwiastków trójmianu kwadratowego.

Zastosowanie wzorów Viète'a.

3. Równania i nierówności kwadratowe z parametrem.

Przykłady zagadnień prowadzących do równań i nierówności kwadratowych z parametrem.

Rozwiązywanie równań i nierówności kwadratowych z parametrem oraz ich interpretacja geometryczna.

4. Wielomiany. Działania na wielomianach.

Jednomiany, dwumiany i trójmiany jednej zmiennej.

Pojęcia wielomianu i stopnia wielomianu jednej zmiennej.

Wielomian uporządkowany.

Działania na wielomianach – dodawanie, odejmowanie, mnożenie.

5. Dzielenie wielomianów z resztą. Twierdzenie Bézout. Zastosowanie do znajdowania pierwiastków wielomianów metodą rozkładania na czynniki.

Dzielenie wielomianów.

Pierwiastki wielomianu.

Dzielenie wielomianów z resztą.

Podzielność wielomianów.

Twierdzenie Bézout.

Rozkład wielomianu na czynniki.

Równania i nierówności wielomianowe.

6. Działania na wyrażeniach wymiernych. Funkcja homograficzna.

Wyrażenia wymierne.

Dziedzina wyrażenia wymiernego.

Działania na wyrażeniach wymiernych.

Obliczanie wartości wyrażen wymiernych.

Funkcje homograficzne typu $y = \frac{a}{x}$, $y = \frac{ax + b}{cx + d}$.

7. Rozwiązywanie równań i nierówności z funkcją homograficzną

Równania z funkcją homograficzną i ich interpretacja graficzna.

Nierówności z funkcją homograficzną i ich interpretacja graficzna.

8. Definicja funkcji wymiernej. Rozwiązywanie równań i nierówności wymiernych.

Określenie i własności funkcji wymiernej.

Działania w zbiorze funkcji wymiernych.

Rozwiązywanie równań i nierówności wymiernych.

9. Dwumian Newtona.

Własności potęgi dwumianu, trójkąt Pascala.
Zastosowanie dwumianu Newtona.

Funkcje wykładnicze i logarytmiczne.

1. Potęga o wykładniku rzeczywistym.

Określenie potęgi o wykładniku rzeczywistym.

Własności potęgi o wykładniku rzeczywistym.

2. Definicja i wykresy funkcji wykładniczych i logarytmicznych.

Określenie, wykresy i własności funkcji wykładniczej.

Funkcja wykładnicza w gospodarce i przyrodzie.

Pojęcie logarytmu, własności logarytmów.

Określenie, wykresy i własności funkcji logarytmicznej.

3. Proste równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne.

Rozwiązywanie równań wykładniczych typu: $2^{ax+b} = 4$, $2^{ax+b} = 4^{cx+d}$.

Rozwiązywanie równań logarytmicznych typu: $\log_a x = b$, $\log_x a = b$.

Planimetria – cd.

1. Własności czworokątów wypukłych. Okrąg wpisany w czworokąt. Okrąg opisany na czworokącie.

Okrąg i trójkąt.

Okrąg wpisany w trójkąt i okrąg opisany na trójkącie.

Wielokąty foremne i okręgi.

Klasyfikacja czworokątów.

Własności czworokątów wypukłych.

Okrąg opisany na czworokącie i okrąg wpisany w czworokąt.

2. Wyznaczanie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem trygonometrii.

Obliczanie miar kątów w wielokątach.

Obliczanie pól i obwodów wielokątów.

Obliczanie długości boków, przekątnych, wysokości, środków w wielokątach z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych.

Obliczanie pól i obwodów wielokątów z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych.

3. Twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów.

Dowód twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

Zastosowanie twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów do rozwiązywania dowolnych trójkątów.

4. Przykłady przekształceń geometrycznych: symetria osiowa, przesunięcie, obrót, symetria środkowa.

Przekształcanie figur geometrycznych przez symetrię osiową, przesunięcie, obrót, symetrię środkową.

Własności przekształceń.

5. Oś symetrii i środek symetrii figury.

Wyznaczanie osi symetrii i środka symetrii figury.

Symetrie i *inne przekształcenia*.

Figury osiowo i środkowo symetryczne.

Symetralna odcinka.

Dwusieczna kąta.

Wielokąty foremne.

Pokrycia płaszczyzny.

Symetria w otaczającym świecie.

Klasyfikacja wielokątów foremnych i innych figur ze względu na typ symetrii.

Funkcje trygonometryczne – cd.

1. Miara łukowa. Definicja funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta.

Miara łukowa kąta.

Zamiana miary łukowej na stopniową.

Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej.

2. Wykresy funkcji trygonometrycznych.

Wykresy funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta.

Monotoniczność funkcji trygonometrycznych kąta ostrego.

Zbiory wartości funkcji trygonometrycznych.

Związki między funkcjami trygonometrycznymi.

3. Najprostsze tożsamości trygonometryczne.

Tożsamości trygonometryczne dowolnego kąta.

Zastosowanie tożsamości trygonometrycznych do rozwiązywania zadań i uzasadniania własności figur.

Bardziej złożone tożsamości trygonometryczne.

4. Wzory redukcyjne.

Określenie wzorów redukcyjnych.

Wzory redukcyjne a okresowość funkcji trygonometrycznych.

5. Proste równania trygonometryczne.

Rozwiązywanie równań trygonometrycznych typu: $\sin x = a$, $\sin(ax+b) = c$.

Klasa III

Ciągłość i pochodna funkcji

1. **Pojęcie funkcji ciągłej.**

Granica funkcji w nieskończoności i asymptoty poziome.

Najprostsze przykłady asymptot pionowych.

Definicja granicy funkcji w punkcie.

Określenie ciągłości funkcji.

Badanie ciągłości różnych funkcji.

Własności funkcji ciągłych.

2. **Pojęcie pochodnej. Interpretacja geometryczna i fizyczna pochodnej.**

Prędkość i pochodna.

Określenie pochodnej funkcji w punkcie.

Funkcja pochodna.

Interpretacja geometryczna pochodnej, równanie stycznej do wykresu funkcji.

Interpretacja fizyczna pochodnej, prędkość, przyspieszenie.

3. **Obliczanie pochodnych wielomianów i funkcji wymiernych.**

Pochodna sumy, iloczynu i ilorazu funkcji.

Wyprowadzenie wzorów na pochodne wielomianów i funkcji wymiernych.

Zastosowanie wzorów do obliczania pochodnych.

4. **Związek pochodnej z istnieniem ekstremów i z monotonicznością funkcji.**

Badanie monotoniczności funkcji za pomocą pochodnej.

Pojęcie ekstremum funkcji.

Warunek konieczny i dostateczny istnienia ekstremum.

Wyznaczanie ekstremów funkcji.

Najmniejsza i największa wartość funkcji.

5. **Zastosowanie pochodnej do rozwiązywania prostych problemów praktycznych.**

Badanie tempa zmian różnych procesów.

Wyznaczanie stanów ekstremalnych oraz najmniejszych i największych wartości.

Stereometria

1. **Graniastosłupy i ostrosłupy. Walec, stożek, kula.**

Graniastosłupy i ostrosłupy.

Podstawowe graniastosłupy i ostrosłupy w rzucie równoległym.

Krawędzie, wysokości, ściany boczne, podstawy, przekątne podstaw, krawędzie podstaw, wierzchołki podstawy i wierzchołki graniastosłupów i ostrosłupów.

Przekątne graniastosłupów.

Graniastosłup i ostrosłup prosty i pochyły.

Graniastosłup i ostrosłup prawidłowy.

Siatki graniastosłupów i ostrosłupów.

Bryły obrotowe – walec, stożek i kula.

Siatki walca i stożka.

Osie symetrii i osie obrotów walca, stożka, kuli.

Podstawy i tworzące walca i stożka.

Przekroje osiowe walca, stożka, kuli.

2. **Wielościanny foremne.**
Rodzaje wielościanów foremnych.
Własności wielościanów foremnych.
3. **Wzajemne położenie krawędzi i ścian brył: kąt nachylenia prostej do płaszczyzny i kąt dwuścienny.**
 Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny.
 Kąt nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy.
 Kąt dwuścienny.
 Pary krawędzi równoległych, prostopadłych i skośnych w graniastosłupach i ostrosłupach.
 Kąty pomiędzy krawędzią a wysokością, pomiędzy przekątną ściany bocznej sześcianu a przekątną jego podstawy i między podobnymi elementami.
 Proste i płaszczyzny w przestrzeni.
 Równoległość i prostopadłość prostych w przestrzeni.
 Proste skośne.
 Równoległość i prostopadłość płaszczyzn.
4. **Przekroje płaskie graniastosłupów i ostrosłupów.**
Szkicowanie przekrojów graniastosłupów i ostrosłupów.
Wyznaczanie związków miarowych w przekrojach graniastosłupów i ostrosłupów.
5. **Wyznaczanie związków miarowych w bryłach z zastosowaniem trygonometrii.**
 Miara kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy.
 Miara kąta rozwarcia stożka.
 Miary kątów dwuściennych w graniastosłupach i ostrosłupach.
 Jednostki pola powierzchni brył.
 Jednostki objętości brył.
 Obliczanie długości krawędzi, wysokości i innych charakterystycznych odcinków w graniastosłupach, ostrosłupach i bryłach obrotowych z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych.
 Obliczanie pola powierzchni bocznej, całkowitej oraz objętości ostrosłupów i graniastosłupów z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych.
 Objętości figur podobnych.
 Pola powierzchni i objętości walca, stożka i kuli.
Twierdzenie o rzucie.

Rachunek prawdopodobieństwa

1. **Proste zadania kombinatoryczne.**
 Permutacje.
 Kombinacje.
 Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem pojęć kombinatorycznych.
2. **Pojęcie prawdopodobieństwa i jego własności.**
 Doświadczenia i zjawiska losowe.
 Zdarzenia losowe.
 Zdarzenia jednakowo prawdopodobne.
 Częstość zdarzeń w zjawiskach losowych.
 Stabilność częstości zdarzeń.
 Zdarzenie elementarne.
 Zbiór zdarzeń elementarnych i jego opis.

Zdarzenia elementarne sprzyjające danemu zdarzeniu.
Klasyczna definicja prawdopodobieństwa.
Zdarzenia niemożliwe i zdarzenia pewne.
Zdarzenie przeciwne.
Zdarzenia wykluczające się i prawdopodobieństwo ich sumy.
Iloczyn zdarzeń.
Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń.

3. Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń w skończonych przestrzeniach probabilistycznych.

Opis zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych i zbioru zdarzeń sprzyjających.
Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń za pomocą definicji klasycznej.
Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń za pomocą drzewa.

4. Prawdopodobieństwo warunkowe. Wzór na prawdopodobieństwo całkowite.

Pojęcie prawdopodobieństwa warunkowego.
Obliczanie prawdopodobieństw warunkowych.
Uzasadnienie wzoru na prawdopodobieństwo całkowite.

5. Niezależność zdarzeń.

Pojęcie niezależności zdarzeń.
Badanie niezależności zdarzeń.

6. Schemat Bernoulliego.

Pojęcie schematu Bernoulliego.
Twierdzenie o liczbie sukcesów w schemacie Bernoulliego.
Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń w schemacie Bernoulliego.

7. Elementy statystyki opisowej: średnia arytmetyczna, średnia ważona, mediana, wariancja i odchylenie standardowe (liczone z próby).

Zbieranie, porządkowanie i przedstawianie danych.
Średnia arytmetyczna, średnia ważona, mediana.
Wariancja i odchylenie standardowe (liczone z próby).

5. Procedury osiągnięcia celów

Realizacja celów nauczania matematyki sformułowanych w *Podstawie programowej* i rozwiniętych w niniejszym programie wymaga stosowania odpowiednich procedur nauczania. Składają się na nie metody nauczania, sposoby oceniania, formy pracy i środki dydaktyczne. Stosowanie tych procedur musi opierać się na ogólnych zasadach nauczania, wypróbowanych i stosowanych przez liczne pokolenia nauczycieli.

Należy jednak od razu stwierdzić, że nie ma jednej, uniwersalnej drogi gwarantującej osiągnięcie sukcesu w nauczaniu matematyki. Znane są przykłady różnych postaw nauczycieli, stosujących różne metody nauczania, formy pracy, systemy oceniania, przyjmujących różne priorytety kształcenia i osiągających dobre wyniki nauczania.

Należy również pamiętać, że uczniowie rozpoczynający naukę w liceum przeszli już dziewięcioletni okres nauczania szkolnego i mają ukształtowane odpowiednie nawyki postępowania oraz sposoby osiągania sukcesów. W szkołach ponadgimnazjalnych będziemy więc mieli do czynienia z różnymi uczniami, zarówno z uczniami uczącymi się systematycznie każdej lekcji, z uczniami sprytnymi i inteligentnymi, ogarniającymi sens zagadnienia, ale nie pracującymi planowo i systematycznie, jak i z uczniami opanowującymi każdą lekcję pamięciowo lub z uczniami mało zainteresowanymi matematyką. Należy jednak każdemu uczniowi umożliwić dalszą drogę rozwoju, wskazując mu różne możliwości i sposoby uczenia się.

Poniżej przedstawiono krótki przegląd zasad, metod nauczania, form pracy oraz środków dydaktycznych, których stosowanie powinno przyczynić się do pełnej realizacji celów nauczania matematyki.

Zasady nauczania

Zasada pogłębłości

Stosowanie tej zasady w nauczaniu polega na reprezentacji i wizualizacji pojęć. W matematyce zasada ta powinna być stosowana wszędzie tam, gdzie abstrakcyjne pojęcia mogą być zastąpione przez model, rysunek, schemat, diagram lub powiększony fragment wykresu. Zasada ta przyczynia się do wyrobienia przez uczniów właściwego zrozumienia pojęć matematycznych.

Zasada przystępności nauczania

Polega ona na stopniowaniu trudności i dbałości o zrozumienie materiału. Nauczyciel powinien zawsze starać się o to, aby treści nauczania były wprowadzane w odpowiedniej kolejności – od pojęć łatwiejszych przechodzić do trudniejszych,

ze znanych wyprowadzać nieznanne – oraz powinien być zawsze świadomy, czy są one zrozumiałe. Duża część trudności w opanowaniu materiału nauczania z matematyki rodzi się z powodu niestosowania tej zasady, czyli z niedostosowania metod i treści nauczania do możliwości uczniów.

Zasada systematyczności

Oczywistość stosowania tej zasady jest powszechnie akceptowana. Systematyczna praca ucznia i nauczyciela daje zdecydowanie lepsze rezultaty od pracy wyrwykowej i nieskoordynowanej. Uczeń systematycznie realizujący materiał nauczania oraz systematycznie oceniany przez nauczyciela jest stale gotowy do wykonywania dalszych zadań i nie stwarza problemów wychowawczych.

Zasada świadomego i aktywnego uczestnictwa

Zasada ta stawia ucznia w centralnym miejscu procesu nauczania. Wynika ona z tego, że młoda osoba jest ciekawa świata, ludzi i procesów, posiada olbrzymie możliwości poznawcze i poszukuje własnych zainteresowań. Należy wykorzystać i utrzymać naturalną chęć większości uczniów do nauki i ich aktywność na lekcjach. Nauczyciel nie jest w stanie zrealizować celów edukacyjnych bez akceptacji swoich poczynań i aktywności ze strony uczniów. Cały proces nauczania szkolnego i działalność nauczyciela to przede wszystkim kierowanie uczeniem. Jeśli uczeń będzie pracował ze świadomością i pozytywnym przekonaniem, że nauczyciel jest pomocnikiem w jego rozwoju i wykaże aktywność w zdobywaniu wiedzy, to jego osiągnięcia będą znacznie wyższe.

Zasada praktyczności

Zasada ta ma szczególne znaczenie w nauczaniu matematyki w zakresie podstawowym. Rezygnujemy tutaj z formalizmów, dowodzenia twierdzeń, szerszych uogólnień i wszędzie, gdzie możliwe, odwołujemy się do praktycznych zastosowań matematyki. Przy wprowadzaniu nowych pojęć również wychodzimy od sytuacji z życia codziennego, modelujemy je i projektujemy dla nich odpowiednie obliczenia. Zastosowania matematyki do opisu zjawisk i procesów zachodzących w przyrodzie oraz jej nieodzowność przy kształceniu logicznego myślenia, to główne powody powszechności nauczania tego przedmiotu na wszystkich etapach kształcenia.

Zasada indywidualizacji

Stosowanie tej zasady jest nieodzowne w procesie nauczania matematyki. Wymaga tego system oceniania i egzaminów szkolnych. Mimo, że nauczanie w klasie szkolnej jest zespołowe, nauczyciel cały czas musi mieć na względzie indywidualne postępy każdego ucznia. Musi ocenić jego wiadomości i umiejętności, systematycznie informować jego rodziców o osiągnięciach a wielokrotnie również motywować go do lepszej pracy.

Zasada zespołowości

Zasada ta nie stoi w sprzeczności z zasadą indywidualizacji. Dotyczy ona bowiem innych zagadnień, mianowicie organizacji pracy na lekcji oraz społecznych potrzeb społecznych. Nauczyciel, w celu przyspieszenia nauczania i sprawniejszego opanowania umiejętności matematycznych, powinien często organizować prace zespołowe, przez co przyczyni się również do wyrobienia odpowiednich postaw uczniów, takich jak umiejętność współdziałania, wysłuchiwanie racji innych, wzajemna pomoc i uzupełnianie się, odpowiednie tempo i rytmiczność pracy, przygotowanie do zespołowej pracy zawodowej. Uczeń podczas pracy w grupie zajmie odpowiednie miejsce, włączy się do realizacji celu poprzez oferowanie swoich umiejętności oraz zapozna się z umiejętnościami i metodami uczenia się innych.

Zasada trwałości wiedzy

Zasadę tę należy stosować, aby utrwalić zdobyte przez uczniów wiadomości i umiejętności. Nauczyciel powinien na każdym etapie nauczania określać cel końcowy aktualnych czynności, aby uczeń mógł wytworzyć trwałe związki przyczynowe i aby rozumiał i zapamiętał główną ideę danego zagadnienia. Zadaniem nauczyciela jest również częste sprawdzanie, czy materiał został należycie zrozumiany i organizowanie powtórzenia przerobionych partii materiału. Stosowaniu tej zasady sprzyja również spiralny układ treści nauczania matematyki.

Metody nauczania

Zestaw wszystkich metod nauczania stosowanych przez nauczycieli jest bardzo bogaty. Klasyfikacja metod i ich dobór do konkretnej lekcji może przebiegać na podstawie różnych cech i kryteriów. Najważniejszą rzeczą jest określenie, jakie cele będą realizowane na lekcji, czy będzie to lekcja poświęcona wprowadzeniu nowego materiału, czy lekcja powtórzeniowa (utrwalająca), czy lekcja przeznaczona na sprawdzenie wiadomości i umiejętności. Należy jednak pamiętać, że niejednokrotnie na jednej lekcji wystąpią wszystkie trzy rodzaje działalności edukacyjnej i wówczas w każdej części mogą być stosowane różne metody. Istotne jest również to, że każda metoda może zawierać elementy innej metody i rzadko kiedy metoda jest stosowana w „czystej” formie.

Metody wprowadzania nowego materiału

Wykład problemowy

W tej metodzie nauczyciel formułuje, rozwija i rozwiązuje przed uczniami problem, zadaje sobie pytania i pokazuje drogi prowadzące do odpowiedzi, roz-

wiązuje zadania, projektuje, opisuje i wykonuje obliczenia, wydaje polecenia rozwiązania analogicznych zadań, dyktuje notatki do zeszytów. Źródłem wiedzy jest nauczyciel i metody przez niego stosowane. Uczniowie obserwują go, zapamiętują fakty i zdobywają nowe umiejętności poprzez naśladowanie i powielanie. W praktyce szkolnej, w klasach realizujących zakres podstawowy, mogą mieć miejsce proste wykłady w formie wyjaśnień i instrukcji, *natomiast w klasach realizujących zakres rozszerzony można w ciągu roku przeprowadzić kilka lekcji w formie pełnego wykładu.*

Pogadanka, dyskusja

Są to metody, w których nauczyciel prowadzi rozmowę z uczniami, zadaje im pytania, pozwala działać i wypowiadać się, naprowadza na odpowiedzi i sugeruje właściwe działania, kieruje ewentualną dyskusją i rozstrzyga spory, wydobywa odpowiednie wnioski i projekty działań. Uczniowie sami są źródłem wiedzy, formułują nowe fakty, sporządzają opisy, wykonują praktyczne czynności i nabywają nowe umiejętności.

Rozwiązywanie zadań problemowych

W tej metodzie nauczyciel formułuje problem i kieruje procesem jego rozwiązania. Uczniowie zapoznają się z nim, zgłaszają dodatkowe zapytania, analizują informacje, rozkładają problem na mniejsze problemy i budują plan ich rozwiązania. W czasie realizacji planu kontrolują wyniki pośrednie, w razie konieczności dokonują odpowiednich korekt i modyfikacji, podsumowują wyniki i formułują odpowiedź. Metoda ta powinna być jak najczęściej stosowana, *szczególnie w zakresie rozszerzonym*, ponieważ nauczanie matematyki polega między innymi na kształceniu umiejętności rozwiązywania problemów.

Praca z tekstem, pokaz, obserwacja

W tych metodach źródłem wiedzy jest podręcznik, pokaz lub obserwacja. Można za ich pomocą nauczać w sposób podający, polecając opanowanie odpowiednich tematów. Najlepsze efekty przynosi jednak nauczanie problemowe z wykorzystaniem tych źródeł. Należy formułować problemy i do ich rozwiązania wykorzystywać odpowiedni tekst, pokaz lub obserwację. *Uczniowie realizujący program w zakresie rozszerzonym powinni nabyć dużą biegłość w wykorzystaniu podręcznika i książek pomocniczych.*

Metody powtarzania materiału

Na lekcjach powtórzeniowych stosujemy inne metody niż w trakcie wprowadzania nowego materiału. Są to **ćwiczenia utrwalające** i **systematyzujące**. Mają one na celu powtórzenie i utrwalenie wiadomości oraz podwyższenie sprawności wykonywania działań uczniów. Każdy sprawdzian pisemny powinien być poprzedzony etapem powtórzenia materiału.

Formy pracy

Na skuteczność procesu nauczania mają również wpływ formy pracy. Odnoszą się one do sposobów organizacji pracy na lekcji. Wśród nich można wyróżnić:

- **nauczanie zbiorowe**,
- **nauczanie grupowe**,
- **nauczanie zindywidualizowane**,
- **nauczanie wielopoziomowe**.

Nauczanie **zbiorowe** to najczęściej występująca forma nauczania w szkole. Nauczyciel pracuje z całą klasą i realizuje ze wszystkimi uczniami jednakowe treści nauczania. Praca idzie równym tempem, wszyscy wykonują te same czynności i pracują na tym samym materiale.

Nauczanie **grupowe** polega na podziale klasy na niewielkie grupy. Grupy składają się z uczniów dobrych i słabych. Pracami grupy kieruje lider. Grupa może wybrać spośród siebie sekretarza i sprawozdawcę. Wszystkie grupy pracują nad tym samym problemem lub każda grupa pracuje nad częścią pewnego większego problemu. Wyniki prac grupowych przedstawiane są na forum klasy, po czym następuje podsumowanie pracy wszystkich grup.

Nauczanie **zindywidualizowane** polega na dotarciu w nauczaniu zbiorowym z nauczonymi treściami do każdego ucznia osobno. Istotą jego jest podział treści programowych na tematy i problemy, które uczniowie opracowują we właściwym dla siebie tempie. Nauczaniem zindywidualizowanym należy objąć przede wszystkim uczniów, mających trudności i braki w opanowaniu materiału.

Nauczanie **wielopoziomowe** polega na kierowaniu do niektórych uczniów dodatkowych treści i zadań. Uczniowie sami decydują, czy mają podjąć się wykonania dodatkowych zadań, czy skupić tylko na materiale podstawowym. Nauczanie to ma na względzie przede wszystkim uczniów uzdolnionych, jak i uczniów mających trudności w opanowaniu materiału.

Środki dydaktyczne

Są to różnego rodzaju przedmioty i urządzenia, które dostarczają uczniom określonych bodźców poprzez oddziaływanie na ich słuch, wzrok oraz dotyk i które ułatwiają im poznanie nauczanych treści. Zasada pogłębienia nauczania wymusza stosowanie środków dydaktycznych na lekcjach. Rozbudzają one zainteresowanie matematyką, stymulują rozwój logicznego myślenia, rozwijają zdolność obserwacji i wyobraźni przestrzennej.

Środki dydaktyczne to przede wszystkim **materiały i pomoce**: plansze, zestawienia, arkusze danych, rysunki, animacje, programy komputerowe, różnego rodzaju modele, podręczniki, encyklopedie, tablice matematyczne, foliogramy.

Do środków dydaktycznych zaliczamy również **techniczne urządzenia**, takie jak: tablice z układem współrzędnych, przyrządy kreślarskie, rzutniki pisma, kserokopiarki, projektory, kalkulatory – tradycyjne i graficzne, komputery.

Dobór środków dydaktycznych zależy od założonych celów lekcji i metod nauczania. Nauczyciel powinien często korzystać ze środków dydaktycznych, urozmaicając ich zakres i wzbogacając proces nauczania. Nieodzowne jest wykorzystywanie kalkulatorów graficznych i komputerów. Narzędzia te inspirują do twórczej pracy wielu uczniów oraz znacznie ułatwiają obliczenia i wizualizację matematyki. Najlepiej byłoby, gdyby każda pracownia matematyczna była wyposażona w komputer lub nauczycielski kalkulator graficzny.

6. Opis założonych osiągnięć ucznia i propozycje metod ich oceny

W zakresie operowania obiektami abstrakcyjnymi

1. Wykonywanie działań na liczbach i wyrażeniach algebraicznych.

Wykonywanie działań na liczbach rzeczywistych.

Uzasadnianie stosowanych własności działań na liczbach.

Wykonywanie działań na wyrażeniach algebraicznych.

Porównywanie potęg o jednakowych wykładnikach wymiernych.

Wykonywanie działań na liczbach postaci $a + b\sqrt{c}$.

Usuwanie niewymierności z mianownika.

Wykonywanie działań na potęgach o wykładnikach rzeczywistych.

Obliczanie logarytmów liczb przy danej podstawie.

Wykonywanie działań na przedziałach liczbowych i ich interpretacja na osi.

Stosowanie własności wartości bezwzględnej.

Sprawdzanie trójmianu kwadratowego z postaci kanonicznej do ogólnej i na odwrót.

Rozkładanie trójmianu kwadratowego na czynniki liniowe.

Wyprowadzanie wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego.

Stosowanie wzorów Viète'a.

Przekształcanie równania kwadratowego do prostszej postaci.

Dodawanie, odejmowanie i mnożenie jednomianów, dwumianów i trójmianów oraz określanie stopnia otrzymanej sumy, różnicy i iloczynu.

Stosowanie wzoru na dwumian Newtona.

Sprawdzanie podzielności wielomianów za pomocą mnożenia.

Obliczanie reszty z dzielenia wielomianu przez wielomian.

Rozkładanie wielomianów na czynniki przez:

– wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias,

– stosowanie wzorów skróconego mnożenia,

– grupowanie czynników,

– znajdowanie pierwiastka i podzielenie wielomianu przez odpowiedni dwumian.

Skracanie i rozszerzanie wyrażeń wymiernych.

Wykonywanie działań na wyrażeniach wymiernych.

Przekształcanie wyrażeń wymiernych typu $\frac{ax + b}{cx + d}$ do postaci $\frac{A}{x - p} + q$

Sprawdzanie prostych tożsamości trygonometrycznych.

2. Opisywanie zbiorów za pomocą równań, nierówności i ich układów oraz upraszczanie takich opisów.

Zapisywanie i wskazywanie na osi liczbowej zbiorów rozwiązań równań i nierówności typu $x = a$, $x > a$, $x \geq a$, $x < a$, $x \leq a$.

Określanie przedziałów na osi liczbowej i podawanie ich symbolicznych zapisów. Opisywanie słowami zbiorów określonych formalnym warunkiem.

Wykonywanie działań na zbiorze liczb rzeczywistych i jego podzbiorach.
 Opisywanie i zaznaczanie przedziałów liczbowych na osi.
 Stosowanie definicji wartości bezwzględnej.
 Zapisywanie zbiorów typu $(-a; a)$, $[-a; a]$, $(-\infty; a)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; -a]$, $[a; +\infty)$ za pomocą nierówności z wartością bezwzględną.
 Rysowanie zbiorów punktów spełniających dany warunek,
 np. $\{(x, y): x \in \mathbf{R} \text{ i } x > 2\}$.
 Wyznaczanie równania prostej w postaci kierunkowej.
 Wyznaczanie równania prostej przechodzącej przez dwa punkty.
 Wyznaczanie równania paraboli.
 Wyznaczanie równania okręgu w postaci $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
 Wyznaczanie nierówności opisującej koło.
 Budowanie wyrażień wymiernych na podstawie opisu słownego.
 Wyznaczanie równania stycznej do wykresu funkcji.
 Wyznaczanie równań asymptot poziomych i pionowych.
 Opisywanie zbiorów zdarzeń za pomocą symboliki używanej dla zbiorów.
 Uzasadnianie wzorów na prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego i prawdopodobieństwo sumy zdarzeń.

3. Sporządzanie wykresów funkcji oraz odczytywanie własności funkcji z wykresu.

Sporządzanie wykresów funkcji na podstawie tabelki i grafów.
 Graficzne interpretowanie wyników działań na przedziałach liczbowych.
 Odczytywanie informacji ilościowych i jakościowych z przyporządkowań i zależności.
 Wykonywanie wykresów funkcji za pomocą kalkulatora graficznego lub komputera.
 Odczytywanie dziedziny funkcji z danego grafu lub wykresu funkcji.
 Rysowanie wykresu funkcji liniowej i odczytywanie z niego podstawowych własności funkcji.
 Określanie przedziałów monotoniczności funkcji na podstawie wykresów.
 Odczytywanie potrzebnych informacji z wykresów różnych funkcji nieliniowych.
 Odczytywanie na podstawie tabelki funkcyjnej charakterystycznych wartości – miejsc zerowych, wartości dodatnich i ujemnych oraz wartości największej i najmniejszej.
 Sporządzanie wykresu funkcji na podstawie jej własności.
 Odczytywanie i interpretacja informacji z wykresu i wyciąganie wniosków dotyczących przebiegu danego zjawiska lub procesu.
 Odczytywanie z wykresu własności funkcji, takich jak:
 – monotoniczność,
 – różnowartościowość,
 – parzystość,
 – nieparzystość,
 – okresowość.
 Zaznaczanie na wykresie funkcji przedziałów, w których funkcja jest rosnąca, malejąca lub stała.
 Wykonywanie przesunięcia wykresów funkcji wzdłuż tylko jednej osi (Ox lub Oy) albo obu osi.
 Odczytywanie z wykresu funkcji kwadratowej jej własności, takich jak:

- dziedzina i zbiór wartości,
- skierowanie i rozwartość (stromość) ramion,
- charakterystyczne parametry funkcji: współrzędne wierzchołka, wartość najmniejsza albo największa, miejsca zerowe, punkt przecięcia z osią Oy ,
- oś symetrii,
- przedziały monotoniczności.

Sporządzanie wykresu funkcji kwadratowej na podstawie:

- tabelki,
- dwóch różnych miejsc zerowych i wierzchołka paraboli,
- dwóch różnych miejsc zerowych i punktu przecięcia z osią Oy ,
- dwóch różnych miejsc zerowych i współczynnika przy x^2 ,
- wierzchołka paraboli i punktu przecięcia z osią Oy .

Wykorzystywanie wykresu funkcji kwadratowej do określania monotoniczności i do znajdowania ekstremów funkcji.

Szkicowanie wykresów wartości bezwzględnej funkcji kwadratowej.

Określanie na podstawie wykresów rodzaju układu równań liniowych i liczby jego rozwiązań.

Rysowanie w układzie współrzędnych zbiorów rozwiązań dowolnej nierówności liniowej z dwiema niewiadomymi.

Rysowanie zbioru rozwiązań układu i alternatywy dwóch nierówności.

Wykorzystanie wykresu i wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego do rozwiązywania nierówności kwadratowych.

Sporządzanie wykresów funkcji homograficznych.

Sporządzanie wykresów funkcji wymiernych.

Sporządzanie wykresów funkcji wykładniczych i logarytmicznych.

Rozwiązywanie graficzne, również za pomocą kalkulatora graficznego, prostych równań i nierówności z funkcją homograficzną.

Rysowanie wykresów funkcji trygonometrycznych kąta ostrego i omawianie ich własności.

Określanie monotoniczności funkcji trygonometrycznych kąta ostrego na przykładzie trójkątów prostokątnych o różnych kątach ostrych i stałej długości przyprostokątnej.

Sporządzanie wykresów funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej.

Określanie monotoniczności ciągu na podstawie wykresu.

Określanie ciągłości funkcji na podstawie wykresu.

Badanie różniczkowalności funkcji na podstawie wykresu.

4. Wyznaczanie związków miarowych dla figur płaskich i brył.

Stosowanie twierdzenia Pitagorasa do obliczania:

- długości trzeciego boku w trójkącie prostokątnym,
- przekątnej kwadratu i prostokąta,
- wysokości w trójkącie równobocznym,
- długości odcinka, mając dane współrzędne jego końców,
- promienia okręgu wpisanego i opisanego na trójkącie równobocznym,
- przekątnej sześcianu.

Wyznaczanie związków miarowych dla trójkątów i czworokątów.

Wyznaczanie miar figur po przekształceniach.

Znajdowanie wartości kąta ostrego na podstawie wartości funkcji trygonometrycznych.

Obliczanie pól powierzchni bocznej, całkowitej oraz objętości ostrosłupów i graniastosłupów.

Obliczanie kąta pomiędzy przekątną ściany bocznej sześcianu a przekątną jego podstawy.

Obliczanie miar kątów dwuściennych w graniastosłupach i ostrosłupach.

Obliczanie pola powierzchni i objętości walca, stożka i kuli.

Obliczanie promienia kuli wpisanej w walec (*stożek*).

W zakresie budowania modeli matematycznych i ich stosowania

1. Opisywanie związków pomiędzy wielkościami liczbowymi za pomocą równań i nierówności.

Rozwiązywanie prostych zadań tekstowych prowadzących do układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Określanie wzoru funkcji kwadratowej, mając dane jej miejsca zerowe i współrzędne wierzchołka.

Znajdowanie wzoru nierówności opisującej półpłaszczyznę zadaną rysunkiem.

Układanie równań kwadratowych do zadań z treścią i ich rozwiązywanie.

Zapisywanie odpowiednich wzorów opisujących wielkości odwrotnie proporcjonalne.

Wykorzystywanie tożsamości trygonometrycznych do rozwiązywania zadań i uzasadniania własności figur.

Zastosowanie pojęcia procentu składanego i rozwiązywanie zadań praktycznych dotyczących tego pojęcia.

Rozwiązywanie zadań z treścią dotyczących nieskończonego ciągu geometrycznego. Zastosowanie funkcji wykładniczej do opisu zależności w gospodarce i w przyrodzie.

Rozwiązywanie zadań praktycznych z wykorzystaniem twierdzenia Talesa.

Wyznaczanie punktów przecięcia prostej z okręgiem i punktów przecięcia dwóch okręgów.

Znajdowanie równań stycznych do okręgu.

2. Wykrywanie zależności funkcyjnych między wielkościami liczbowymi.

Rozpoznawanie zależności funkcyjnych w zagadnieniach omawianych na różnych przedmiotach oraz w sytuacjach życia codziennego.

Wskazywanie wykresów funkcji wśród danych krzywych i innych zbiorów punktów.

Wyznaczanie dziedziny funkcji określonej wzorem analitycznym.

Porównywanie przebiegu dwóch lub więcej zjawisk na podstawie analizy ich wykresów lub tabel z uwzględnieniem punktów charakterystycznych.

Analizowanie przebiegu dowolnego wykresu jako funkcji czasu i opisywanie przebiegu tego zjawiska.

Określanie liczby rozwiązań układu równań w zależności od parametru.

Badanie liczby pierwiastków równania kwadratowego w zależności od parametrów.

Określanie liczby rozwiązań równania kwadratowego w zależności od parametru.

Rozwiązywanie zadań z treścią prowadzących do równań i nierówności z funkcją homograficzną.

Dostrzeganie ciągów w prostych sytuacjach i budowanie dla tych sytuacji modelu matematycznego (wypisywanie kolejnych wyrazów, znajdowanie zależności między wyrazami i zapisywanie jej wzorem).

Określanie i uzasadnianie wzoru na n -ty wyraz danego ciągu liczbowego w prostych przypadkach.

3. Wyznaczanie związków metrycznych i miarowych w otaczającej przestrzeni.

Wykorzystywanie liczb całkowitych do wyrażania temperatury oraz określania wartości zadłużenia.

Wykorzystywanie liczb wymiernych do określania ułamkowych części całości, do pomiarów i obliczeń długości, pola figur, objętości brył.

Stosowanie twierdzenia Pitagorasa do rozwiązywania zadań.

Wykorzystywanie funkcji trygonometrycznych do rozwiązywania zadań praktycznych.

Dostrzeganie symetrii w otaczającym świecie i określanie rodzaju symetrii.

Formułowanie cech podobieństwa najprostszych figur.

Stosowanie do rozwiązywania zadań cech podobieństwa trójkątów (wielokątów).

Wykorzystywanie cech podobieństwa figur do rozwiązywania zadań na dowodzenie, na przykład twierdzenia o odcinku łączącym środki boków dowolnego trójkąta.

Wykorzystywanie twierdzenia sinusów i cosinusów do rozwiązywania zadań praktycznych.

Rysowanie podstawowych brył – graniastosłupów i ostrosłupów – w rzucie równoległym.

Rysowanie przekrojów graniastosłupów i ostrosłupów w prostych przypadkach.

Rysowanie siatek graniastosłupów i ostrosłupów.

Opisywanie wybranych wielościanów foremnych.

Wskazywanie pary krawędzi równoległych, prostopadłych i skośnych w graniastosłupach i ostrosłupach.

Wskazywanie pary ścian równoległych i prostopadłych w graniastosłupach i ostrosłupach.

Rysowanie płaszczyzn równoległych i prostopadłych.

Znajdowanie odpowiednich rzutów prostokątnych, na przykład rzutu przekątnych graniastosłupa na podstawę tego graniastosłupa.

Rozpoznawanie na podstawie modelu lub rysunku oraz w otaczającej rzeczywistości podstawowych brył obrotowych.

Rysowanie walca, stożka i kuli w rzucie na płaszczyznę.

Projektowanie i sporządzanie siatki walca i stożka.

Rysowanie przekrojów osiowych walca, stożka, kuli oraz zaznaczanie ich na konkretnym modelu.

Wykorzystywanie wiadomości dotyczących brył obrotowych do rozwiązywania problemów praktycznych.

Opisywanie niektórych przekrojów brył obrotowych.

Zaznaczanie na modelu danej bryły linii narysowanych na siatce.

Rysowanie przekroju walca i stożka z wpisaną lub opisaną kulą. Określanie położenia środka tej kuli.

Badanie, czy w dany walec można wpisać kulę i czy na danym walcu można opisać kulę.

4. Budowanie modeli zjawisk losowych.

Wykonywanie losowych prób danego doświadczenia, gromadzenie i przetwarzanie wyników.

Sprawdzanie poprawności obliczonych prawdopodobieństw zdarzeń za pomocą odpowiednio zaprojektowanych doświadczeń lub za pomocą komputera lub kalkulatora.

Budowanie prostych modeli probabilistycznych doświadczenia w postaci skończonego zbioru zdarzeń elementarnych.

Wykorzystanie drzewa do opisu zjawisk losowych.

5. Umiejętność wyznaczanie stanów optymalnych i ekstremalnych.

Obliczanie ekstremów funkcji kwadratowej, wielomianowej i wymiernej.

Wyznaczanie największych i najmniejszych długości, pól i objętości figur geometrycznych na płaszczyźnie i w przestrzeni.

W zakresie projektowania obliczeń i ich wykonywania

1. Przeprowadzanie obliczeń dokładnych i przybliżonych (w tym procentowych).

Zliczanie elementów zbiorów skończonych.

Przedstawianie liczb wymiernych w postaci ułamka.

Obliczenia procentowe.

Stosowanie kalkulatorów i komputerów do przeprowadzania obliczeń.

Podawanie przybliżeń dziesiętnych liczb niewymiernych z zadaną dokładnością.

Określanie rzędu wielkości liczby.

Zapisywanie liczby w notacji wykładniczej.

Obliczanie potęgi danej liczby o wykładniku naturalnym, całkowitym.

Porównywanie liczb zapisanych w postaci potęg o wykładniku wymiernym poprzez szacowanie lub sprowadzanie do wspólnej podstawy.

Obliczanie wartości liczb wymiernych i niewymiernych oraz zaznaczanie ich na osi liczbowej.

Zamiana ułamka zwykłego na dziesiętny.

Zamiana ułamka okresowego na zwykły.

Szacowanie wartości pierwiastków kwadratowych.

Szacowanie wartości średniej danych liczb.

Obliczanie wartości liczbowej wyrażeń wymiernych.

Określanie zbioru wartości funkcji trygonometrycznych.

Stosowanie wzorów redukcyjnych.

Obliczanie wartości wyrazów ciągu.

Stosowanie wzorów rekurencyjnych.

Obliczanie granic ciągów.

Obliczanie sum ciągu arytmetycznego i geometrycznego.

Zamiana miary stopniowej kąta na miarę łukową i odwrotnie.

Wyznaczanie skali podobieństwa dwóch figur na płaszczyźnie.

Obliczanie współrzędnych i długości wektorów.

Wyznaczanie środka odcinka.

Wyznaczanie środka ciężkości trójkąta.

Wykonywanie prostych obliczeń kombinatorycznych.

Obliczanie objętości i pól powierzchni brył.

Obliczanie ilorazów różnicowych funkcji.

Obliczanie granic funkcji.

Obliczanie pochodnych funkcji.

2. Rozwiązywanie niektórych typów równań oraz ich układów.

Rozwiązywanie równań liniowych.

Rozwiązywanie równań z wartością bezwzględną.

Rozwiązywanie nierówności z wartością bezwzględną.

Rozwiązywanie równań i nierówności kwadratowych.

Rozwiązywanie prostych układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi metodą podstawiania i przeciwnych współczynników.

Rozwiązywanie układów trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi.

Rozwiązywanie równań kwadratowych z parametrem i z wartością bezwzględną.

Rozwiązywanie równań i nierówności z funkcją homograficzną prowadzących do równań liniowych.

Rozwiązywanie prostych równań i nierówności wielomianowych.

Rozwiązywanie równań i nierówności wymiernych, również z wartością bezwzględną.

Rozwiązywanie prostych równań i nierówności wykładniczych i logarytmicznych.

3. Wyznaczanie miar figur geometrycznych.

Obliczanie wysokości i pól trójkątów.

Wyznaczanie miar kątów trójkąta z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych.

Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych.

Rozwiązywanie dowolnych trójkątów z wykorzystaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

Obliczanie pól wielokątów.

Obliczanie długości łuku okręgu, długości okręgu, pola koła i pola wycinka koła.

Wyznaczanie boków i kątów wielokątów z zastosowaniem własności symetrycznej, dwusiecznej i środkowej.

Obliczanie obwodów i pól figur podobnych.

Obliczanie pól powierzchni bocznej i całkowitej oraz objętości ostrosłupów i graniastosłupów, również z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych.

4. Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń.

Obliczanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych w danym zjawisku losowym.

Wydzielanie ze zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych zdarzeń elementarnych sprzyjających danemu zdarzeniu oraz wyznaczanie ich liczby.

Wykorzystanie elementów kombinatoryki do wyznaczania liczby zdarzeń elementarnych.

Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń na podstawie definicji klasycznej.

Określanie zdarzenia przeciwnego do danego zdarzenia i obliczanie jego prawdopodobieństwa.

Sprawdzanie, czy dane dwa zdarzenia wykluczają się i obliczanie prawdopodobieństwa sumy tych zdarzeń.

Wyznaczanie prawdopodobieństwa iloczynu zdarzeń.

Wyznaczanie prawdopodobieństwa sumy zdarzeń z wykorzystaniem prawdopodobieństwa iloczynu zdarzeń.

Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń z zastosowaniem reguły mnożenia prawdopodobieństw dla drzew.

Wykorzystywanie własności, że suma prawdopodobieństw na odpowiednich poziomach drzewa jest równa 1.

Obliczanie prawdopodobieństw warunkowych i całkowitych.

Badanie niezależności zdarzeń.

Obliczanie liczby sukcesów w schemacie Bernoulliego.

W zakresie kształcenia myślenia matematycznego

1. Umiejętność definiowania prostych obiektów matematycznych.

Określanie, rozumienie i stosowanie następujących pojęć:

- zbiór i element zbioru,
- liczba naturalna, całkowita, wymierna, niewymierna, rzeczywista,
- rozszerzenie danego zbioru liczbowego ze względu na wykonalność działań,
- rozkład danej liczby naturalnej na czynniki pierwsze,
- liczby względnie pierwsze,
- pierwiastek i potęga o wykładniku wymiernym,
- *potęga o wykładniku rzeczywistym*,
- rozwinięcie dziesiętne skończone lub okresowe,
- ułamek okresowy,
- wartość bezwzględna liczby rzeczywistej,
- błąd przybliżenia,
- funkcja,
- argument i dziedzina funkcji,
- wartość funkcji w punkcie i zbiór wartości funkcji,
- przedziały monotoniczności,
- monotoniczność funkcji,
- *różnowartościowość, parzystość, nieparzystość, okresowość funkcji*,
- *granica funkcji*,
- *ciągłość funkcji*,
- *pochodna funkcji*,
- *ekstremum, najmniejsza i największa wartości funkcji*,
- *logarytm*,
- współczynnik kierunkowy prostej,
- równoległość i prostopadłość prostych,
- okrąg opisany na czworokącie i okrąg wpisany w czworokąt,
- *wektor na płaszczyźnie i działania na wektorach*,
- odległość i jej własności,
- równania równoważne,
- rozwiązanie równania,
- pierwiastek równania,
- jednomian, dwumian, trójmian i ogólnie wielomian,
- wyrażenie algebraiczne,
- wielomian jednej zmiennej,
- pierwiastek wielomianu,
- rozkład wielomianu na czynniki,
- wielkości wprost proporcjonalne,

- wielkości odwrotnie proporcjonalne,
- funkcje sin, cos, tg, ctg kąta ostrego w trójkącie prostokątnym,
- miara łukowa dowolnego kąta,
- funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej,
- *funkcja wymierna,*
- *funkcja wykładnicza i logarytmiczna,*
- tożsamości (równania tożsamościowe),
- ciąg liczbowy,
- *ciąg rekurencyjny,*
- *zbieżność ciągu,*
- ciąg arytmetyczny,
- procent,
- stopa procentowa,
- ciąg geometryczny,
- procent składany,
- *ciąg geometryczny i suma jego elementów,*
- *ciągi rekurencyjne,*
- wielokąt,
- wielokąt foremny,
- pole figury,
- *jednokładność figur,*
- podobieństwo dwóch figur na płaszczyźnie,
- permutacja ciągu n -elementowego,
- silnia,
- *symbol Newtona,*
- *trójkąt Pascala,*
- prawdopodobieństwo zdarzenia,
- *niezależność zdarzeń,*
- *schemat Bernoulliego,*
- wielościan, graniastosłup, ostrosłup,
- objętość brył.

2. Umiejętność podawania przykładów i kontrprzykładów.

Podawanie przykładów i kontrprzykładów do następujących zagadnień:

- należenie elementu do danego zbioru,
- zbiory skończone i nieskończone,
- zawieranie się zbiorów liczbowych i nieliczbowych,
- przyporządkowanie lub zależności funkcyjne,
- wielkości wprost proporcjonalne,
- wielkości odwrotnie proporcjonalne,
- *ciągi rekurencyjne,*
- *zbieżność ciągów,*
- czworokąty wpisane i opisane na okręgu,
- figury symetryczne,
- rodzaje symetrii w otaczającym świecie,
- rozwiązanie danego równania liniowego,
- rozwiązanie danej nierówności liniowej,
- rozwiązanie danego równania kwadratowego,
- rozwiązanie danej nierówności kwadratowej,

- rozkład wielomianu n -tego stopnia na czynniki,
- monotoniczność funkcji,
- różnowartościowość, parzystość, nieparzystość, okresowość funkcji,
- figury osiowo i środkowo symetryczne,
- wielokąty foremne,
- pokrycie płaszczyzny niektórymi figurami symetrycznymi,
- przekształcenia izometryczne,
- jednokładność figur,
- podobieństwo figur,
- ekstremum, najmniejsza i największa wartości funkcji,
- zjawiska losowe,
- zdarzenie elementarne (próba losowa) i pojęcie zdarzenia,
- niezależność zdarzeń,
- graniastosłupy i ostrosłupy oraz bryły obrotowe,
- wielościany foremne,
- przekroje brył.

3. Umiejętność przeprowadzania prostych rozumowań dedukcyjnych.

Przeprowadzenie dowodu twierdzenia:

- Pitagorasa,
- Talesa,
- Bézout,
- o odcinku łączącym środki boków trójkąta,
- o odcinku łączącym środki ramion trapezu,
- o środkowych trójkąta,
- sinusów, cosinusów,
- o prawdopodobieństwie całkowitym,
- o liczbie sukcesów w schemacie Bernoulliego,

4. Rozumienie idei dowodu nie wprost oraz zasady indukcji matematycznej.

Przeprowadzenie dowodów niewymierności liczb metodą nie wprost.

Stosowanie zasady indukcji matematycznej do dowodów:

- wzorów na wyrazy i sumy ciągów, w tym ciągów rekurencyjnych,
- nierówności,
- twierdzeń o podzielności.

5. Umiejętność tworzenia poprawnej klasyfikacji obiektów (liczby, figury, funkcje, przekształcenia) ze względu na pewną ich cechę lub układ cech.

Przeprowadzanie klasyfikacji:

- liczb rzeczywistych,
- trójkątów,
- czworokątów,
- wielościanów,
- brył obrotowych.

W zakresie samodzielnego zdobywania wiedzy matematycznej

1. Wyszukiwanie w materiałach źródłowych potrzebnych informacji matematycznych.

Wykorzystywanie:

- podręcznika,

- książek pomocniczych,
- zasobów bibliotecznych,
- encyklopedii,
- Internetu,
- interakcyjnych programów komputerowych,
- prasy,
- innych dostępnych źródeł.

2. **Samodzielne opanowanie definicji i twierdzeń z podręcznika.**

Analizowanie wyrażen i zależności występujących w definicjach i twierdzeniach.

Śledzenie toku rozumowania prezentowanego w podręczniku.

Opracowywanie podanych w podręczniku przykładów.

Samodzielny dobór nowych przykładów i kontrprzykładów.

Formułowanie przypuszczeń i hipotez.

Weryfikacja przypuszczeń i hipotez.

Rozumienie wybranych dowodów.

3. **Przyswajanie schematów rozumowań i ich stosowanie.**

Opanowanie i stosowanie następujących schematów:

- cech podzielności liczb przez 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 100, 1000,
- sposobu wyznaczania największego wspólnego dzielnika i najmniejszej wspólnej wielokrotności,
- algorytmu zamiany ułamka zwykłego na okresowy i okresowego na zwykły,
- metody sita Eratostenesa do wyznaczania liczb pierwszych w danym przedziale,
- zasady zaokrąglania liczb z nadmiarem i niedomiarem,
- wykonywania przesunięć wykresów funkcji,
- schematu wyznaczania pierwiastków trójmianu kwadratowego,
- warunku na okrąg wpisany w czworokąt i opisany na czworokącie,
- warunku na równoległość i prostopadłość prostych,
- sposobu wyznaczania równania prostej o danym współczynniku kierunkowym i prostej przechodzącej przez dany punkt,
- metody rozwiązywania układów równań liniowych,
- schematu określania rodzaju układu równań – oznaczonego, nieoznaczonego, sprzecznego,
- sposobu obliczania odległości dwóch punktów na płaszczyźnie,
- schematu wyznaczania równania prostej prostopadłej do danej prostej,
- sposobu dzielenia wielomianów,
- schematu znajdowania pierwiastków całkowitych wielomianu z zastosowaniem twierdzenia Bézout,
- *zastosowania szkiców wykresów wielomianów do rozwiązywania nierówności wielomianowych,*
- budowania kąta ostrego o danej wartości funkcji trygonometrycznej,
- obliczania liczby permutacji i kombinacji,
- *wzoru Newtona,*
- schematu wyznaczania prawdopodobieństwa na podstawie klasycznej definicji,
- *schematu badania niezależności zdarzeń,*
- *schematu Bernoulliego.*

4. Sprawne sporządzanie notatek

Stosowanie standardowej notacji wyrażeń i symboliki.

Biegłe sporządzanie rysunków, schematów i diagramów oraz prawidłowe ich oznaczanie.

Zwięzłe formułowanie komentarzy i opisów do przeprowadzonych rozmów.

Propozycje metod oceny osiągnięć uczniów

Ocena szkolna pełni w procesie nauczania wiele funkcji. Funkcja diagnostyczna polega na określaniu stopnia opanowania wiedzy i umiejętności ucznia. Pozwala nauczycielowi na wykrycie luk, opóźnień, błędów i podjęcie prób ich usunięcia. Pełni także funkcję informacyjną i motywacyjną, gdyż informuje ucznia i jego rodziców o wynikach uczenia się, może stanowić nagrodę za osiągnięte wyniki. Ocenianie może też być różnicujące, ale tę funkcję należy wykorzystywać sporadycznie. Ocena powinna być obiektywna, rzetelna, systematyczna, opatrzona komentarzem, dokonana możliwie jak najszybciej po sprawdzianie lub innej formie kontroli opanowania wiedzy czy umiejętności.

Sprawdzanie osiągnięć uczniów najlepiej jest realizować poprzez różnorodne formy:

- odpowiedzi ustne przy tablicy,
- kartkówki, sprawdziany z materiału aktualnie opracowywanego,
- klasówki (zapowiadane wcześniej, co najmniej godzinne sprawdziany obejmujące większą partię materiału),
- testy z zadaniami zamkniętymi i otwartymi,
- projekty,
- wykonywanie modeli, plansz, ilustracji, tablic,
- prace domowe,
- udział w konkursach przedmiotowych,
- aktywność na lekcji.

Ponieważ każda z wymienionych form sprawdzania odnosi się tylko do niektórych elementów wiedzy i umiejętności, nauczyciel, aby osiągnąć zamierzone cele, powinien stosować je wszystkie.

Problemy związane z kontrolą i oceną na lekcjach matematyki powinny być zawarte w przedmiotowym systemie oceniania z matematyki, który jest częścią wewnątrzszkolnego systemu oceniania. Wewnątrzszkolny system oceniania zawiera ogólne cele oceniania w danej szkole, wskazuje na to, co podlega ocenie, podaje zasady funkcjonowania systemu, formy oceny, tryb oceniania, klasyfikowania i promowania.

Ważną sprawą jest również to, aby uczeń znał stosowany na lekcjach system punktacji i zasady oceniania. Proponujemy następujący zamiennik punktów na oceny:

- poniżej 40% możliwych do zdobycia punktów – niedostateczny,
- co najmniej 40% możliwych do zdobycia punktów – dopuszczający,

co najmniej 50% możliwych do zdobycia punktów – dostateczny,
co najmniej 70% możliwych do zdobycia punktów – dobry,
co najmniej 80% możliwych do zdobycia punktów – bardzo dobry,
co najmniej 90% możliwych do zdobycia punktów – celujący.

Przy ustalaniu kryteriów ocen semestralnych i rocznych z matematyki, nauczyciel powinien wziąć pod uwagę stopień opanowania danej treści lub umiejętności, w kontekście: rozumienia pojęcia, podawania przykładów i kontrprzykładów z nim związanych, poznania i stosowania twierdzeń, użycia algorytmów, posługiwania się językiem matematyki oraz opanowania całości materiału nauczania. Oczywiście, oceny powinny być wystawiane z uwzględnieniem zakresu kształcenia (podstawowy, rozszerzony), indywidualnych możliwości ucznia, jego zdolności i zaangażowania w pracę.

Należy zwrócić uwagę, że przedmiotowy system oceniania musi uwzględniać specyfikę szkoły i dobór zespołu klasowego. Ponadto system oceniania powinien być spójny z innymi dokumentami wypracowanymi przez nauczyciela matematyki, takimi jak: plan metodyczny, harmonogram pracy indywidualnej z uczniami mającymi trudności w matematyce oraz program rozwoju uczniów uzdolnionych.